

#1: MATRICI DI PAULI E STATI DI SPIN A DUE VALORI

di Ezio Fornero

#2:

#3: Questo lavoro può interessare studenti di materie scientifiche desiderosi di approfondire l'algebra
#4: delle matrici di Pauli e degli stati di spin. Sono analizzate alcune questioni, quali le motivazioni
#5: che conducono alla scelta di queste matrici come operatori fondamentali sullo spazio degli spin, o il
#6: calcolo della forma generale delle matrici di $SU(2)$, sulle quali non è facile trovare letteratura ac-
#7: cessibile a chi non sia ferrato nell'algebra e nella geometria superiori.

#8: Si può invece giungere a formulare molte proprietà sostituendo metodi sofisticati sul piano formale con
#9: gli strumenti dell'algebra dei numeri complessi e del calcolo vettoriale, ricorrendo in modo sistemati-
#10: co al metodo computazionale con lo scopo di evitare le dimostrazioni formali e un simbolismo speciali-
#11: stico e convertendo funzioni analitiche in istruzioni eseguibili, senza inficiare la certezza dei ri-
#12: sultati di volta in volta ottenuti; in compenso, si perde la brevità possibile solo con gli strumenti
#13: più avanzati.

#14: La trattazione di questi argomenti è preceduta da un'analisi delle matrici di Pauli e della loro alge-
#15: bra, e molto spazio è dedicato alla loro funzione di generatrici delle matrici di $SU(2)$.

#16: La trattazione è nell'insieme accessibile a studenti che abbiano sufficiente conoscenza dell'algebra
#17: delle matrici e delle basi della meccanica quantistica; su alcuni concetti di livello superiore (alge-
#18: bra di Lie, generatori) non è difficile trovare informazioni, e comunque non è necessaria una conoscen-
#19: za approfondita di questi argomenti.

#20: La gran parte del lavoro è svolta da istruzioni eseguibili in Derive 5, un ambiente particolarmente
#21: adeguato per il tipo di calcolo richiesto nel presente lavoro.

#22:

#23: I risultati dei calcoli eseguiti dal computer sono di solito (ma non sempre) riportati in centro pagi-
#24: na, salvo le eccezioni dovute a ragioni di chiarezza o di spazio.

#25:

#26: INDICE

#27:

#28: Simboli.....	# 59
#29: Premesse sugli stati di spin, spinori ecc.	# 92
#30: Costruzione delle matrici di Pauli.....	# 152
#31: Calcolo degli autovalori e autostati delle matrici σ	# 197
#32: Azione delle matrici di Pauli sui vettori delle basi [up, dn], [rt, lt], [in, ou].....	# 258
#33: Matrici σ come trasformazioni nel piano e nello spazio.....	# 271
#34: Valori di aspettazione per le matrici σ	# 314
#35: Trasformazioni tra autostati delle σ	# 517
#36: Isomorfismo con i numeri complessi di modulo 1.....	# 572
#37: Cambiamenti di base.....	# 620
#38: Relazioni tra le σ e i cambiamenti di base.....	# 821
#39: Algebra delle matrici di Pauli.....	# 832
#40: Relazione con i quaternioni.....	# 927
#41: Costruzione di una base di $SU(2)$	# 999
#42: Forma generale di una matrice di $SU(2)$	# 1070
#43: Generatori di $SU(2)$ e matrici di Pauli (1).....	# 1118
#44: Generatori di $SU(2)$ e matrici di Pauli (2).....	# 1151

#45:	Generatori di $SU(2)$ e matrici di Pauli (3).....	# 1188
#46:	Calcolo di matrici di $SU(2)$ a partire dalle matrici σ	# 1242
#47:	Combinazioni lineari di matrici di Pauli.....	# 1261
#48:	Prodotti tra due matrici on e matrici di $SU(2)$	# 1423
#49:	Orientamento degli spinori in S_2 e dei vettori in R_3	# 1557
#50:	Trasformazioni tra autostati di on e rotazioni nello spazio.....	# 1615
#51:	Matrici e spinori in coordinate sferiche.....	# 1714
#52:	Trasformazioni tra spinori in coordinate sferiche.....	# 1797
#53:	Relazione con $SO(3)$	# 1838
#54:	Isomorfismo tra le algebre di Lie associate a $SU(2)$ e a $SO(3)$	# 1873
#55:	Rappresentazione spinoriale e vettoriale delle rotazioni.....	# 1903
#56:	Conversione tra rappresentazione spinoriale e vettoriale degli spin.....	# 1988
#57:	Funzioni utilizzate.....	# 2058
#58:		
#59:	SIMBOLI	
#60:	R_3 : spazio tridimensionale	
#61:	C : insieme dei numeri complessi	
#62:	C_2 : spazio delle coppie ordinate di numeri complessi	
#63:	S_2 : spazio 'interno' degli spin in due dimensioni; isomorfo a C_2	
#64:	$SU(2)$: gruppo delle matrici speciali unitarie	
#65:	H : insieme dei quaternioni	
#66:	σ : matrice di Pauli	
#67:	I_2 : matrice identità 2×2	
#68:	i : unità immaginaria	
#69:	e : base dei log naturali	
#70:	$\wedge, \vee, \rightarrow$: connettivi logici	
#71:	$x \rightarrow y$: sostituisco l'espressione o variabile y all'espressione o variabile x	
#72:	$*$: prodotto algebrico ordinario	
#73:	$^$: elevazione a potenza	
#74:	$ a\rangle$ o ' a ' : vettore 'ket'	
#75:	$\langle a $: vettore 'bra'	
#76:	$\langle x \rangle$: valore di aspettazione o valore medio atteso dell'oggetto ' x '	
#77:	$CONJ(u)$ o $conj(u)$: se ' u ' è un vettore, è il vettore le cui componenti sono le compl. coniugate di	
#78:	quelle di ' u '	
#79:	$prscal(u, v) := CONJ(u) \cdot v$	
#80:	$[a, b, c, \dots]$: lista di oggetti a, b, c, \dots	
#81:	$:=$ definisce una funzione	
#82:	per 'spazio fisico' si intenderà lo spazio delle configurazioni 3-dimensionale	
#83:	le lettere a, b, c, d indicano variabili complesse, le lettere greche variabili reali	
#84:	la radice quadrata dell'oggetto ' x ' è scritta come \sqrt{x}	
#85:	i vettori 'ket' sono scritti come $[x, y, \dots]$	
#86:		
#87:	$a : \in \text{Complex}$	
#88:	$b : \in \text{Complex}$	

#89: $c \in \text{Complex}$

#90: $d \in \text{Complex}$

#91:

#92: PREMESSE SU STATI DI SPIN, SPINORI ECC.

#93: Nella meccanica quantistica delle matrici, le grandezze osservabili (in breve, gli 'osservabili') sono

#94: autovalori - o sono a questi collegate - associati a operatori rappresentati da matrici hermitiane,

#95: cioè uguali alla loro trasposta coniugata. Le matrici di Pauli (in breve, le ' σ ') hanno come autovalori

#96: numeri interi associati alle proiezioni degli spin in una direzione assegnata, quando i possibili stati

#97: misurati di spin sono due (elettroni, stati di polarizzazione del fotone); tali stati sono gli autostati

#98: associati alle σ e appartenenti a uno dei loro due autovalori.

#99: L'equazione tipica di questa meccanica assume quindi la forma generale

#100:
$$O|x\rangle = \lambda|x\rangle$$

#101: nella quale ' O ' è il simbolo dell'operatore, $|x\rangle$ un suo autostato, λ il corrispondente autovalore che è

#102: reale in quanto associato a un operatore hermitiano.

#103: Se fisicamente solo gli autostati relativi ad autovalori di matrici hermitiane sono oggetto di osserva-

#104: zione, matematicamente qualsiasi combinazione lineare a coefficienti complessi di autostati è ancora un

#105: autostato; perciò gli spin devono essere rappresentati dagli elementi di uno spazio interno S^2 , tale

#106: che ogni suo elemento è biunivocamente identificato da una coppia di numeri complessi. In Fisica le mi-

#107: sure forniscono solo risultati reali, per cui due stati che differiscono solo per un fattore di fase

#108: (vale a dire, uno dei due stati è il prodotto dell'altro per un numero complesso di modulo 1) sono con-

#109: siderati indistinguibili in quanto relativi allo stesso autovalore; ma in Matematica sono distinti, e

#110: nei calcoli i fattori di fase non si possono ignorare.

#111: L'interpretazione fisica delle combinazioni lineari di autostati qui non interessa; noi ci occuperemo

#112: esclusivamente di eseguire calcoli per dedurne le dovute conseguenze.

#113:

#114: E' noto che lo spazio degli spin è uno spazio intrinseco, non essendo lo spin l'estensione al microco-

#115: smo di una grandezza classica; tuttavia, gli spin si compongono con i momenti angolari orbitali per ot-

#116: tenere il momento angolare totale. Devono quindi essere rappresentati mediante un formalismo che ne

#117: esprima l'orientamento nello spazio fisico tridimensionale, mentre lo spazio interno nel quale sono

#118: espresse le componenti degli stati di spin è solo bidimensionale. Serve quindi un'algebra nella quale

#119: gli autostati associati alle σ siano orientabili secondo tre direzioni reciprocamente ortogonali, in-

#120: tuitivamente, rispetto a un osservatore, verso l'alto o il basso, a destra o a sinistra, in profondità

#121: o verso l'osservatore; abbiamo quindi tre coppie di stati, opposti tra di loro se appartenenti alla

#122: stessa coppia, cioè alla stessa direzione nello spazio fisico, ma in questo stesso spazio sono ortogo-

#123: nali agli stati appartenenti alle altre coppie. Ne segue che le matrici σ devono essere tre, biunivoca-

#124: mente associate alle direzioni di una terna di assi cartesiani nello spazio, in modo che gli autovalori

#125: e gli autostati relativi ad ognuna delle σ siano opposti.

#126: Gli autostati di ciascuna delle σ , essendo autovettori associati ad autovalori distinti della stessa

#127: matrice, costituiscono una base del sottospazio 2-dim. sul quale opera la relativa σ e sono quindi re-

#128: ciprocamente ortogonali nello spazio interno degli stati di spin. Poiché questo ha dimensione 2, tutti

#129: i suoi elementi sono combinazioni lineari a coefficienti complessi degli autostati di una sola delle σ .

#130:

#131: Ovviamente, lo spazio di tutti gli stati di spin è unico, e le componenti di uno spin possono essere

#132: espresse rispetto a una qualsiasi delle tre basi, a seconda dell'asse preferito dall'osservatore, soli-

#133: tamente, l'asse Oz. Perciò per convenzione la base è costituita dagli stati 'up' e 'down', in breve
 #134: 'up' e 'dn'; ma si può lavorare anche sulle basi 'right' e 'left' - brev. 'rt' e 'lt' - oppure 'in' e
 #135: 'out' - brev. 'in' e 'ou'.
 #136: ['ou' punta verso l'osservatore, 'in' nel senso opposto]
 #137: Dobbiamo dedurre che nello spazio interno degli spin l'orientamento reciproco di due spin non coincide
 #138: con quello nello spazio ordinario, dato che i due stati di una stessa base devono essere ortogonali
 #139: nello spazio interno e opposti in quello fisico. Anche gli stati ortogonali nello spazio fisico quali
 #140: p. es. 'rt' e 'up', o 'in' e 'lt', nello spazio degli spin formano angoli di 45°; ciò suggerisce che
 #141: gli angoli nello spazio interno siano la metà dei corrispondenti nello spazio tridimensionale.
 #142: Infatti gli spin sono descritti da spinori, pseudo-vettori per i quali si deve operare una rotazione di
 #143: due giri per tornare all'orientamento iniziale, come una freccia che percorra il nastro di Moebius man-
 #144: tenendo lo stesso orientamento rispetto al supporto.
 #145:
 #146: Sebbene le dimensioni di S2 e R3 non coincidano, l'informazione contenuta in uno spinore (di Pauli)
 #147: coincide con quella del versore che lo descrive nello spazio fisico. Infatti, spinori che differiscono
 #148: solo per un fattore di fase descrivono lo stesso spin, che quindi è identificato solo da tre parametri
 #149: reali come le terne di numeri reali; più esattamente, le coordinate reali sono solo due in entrambe le
 #150: rappresentazioni, data la condizione valida per spinori e vettori che il loro valore assoluto sia 1.
 #151:
 #152: COSTRUZIONE DELLE MATRICI DI PAULI
 #153: Le matrici 2-dimensionali a coefficienti complessi contengono otto parametri reali, ma la condizione di
 #154: hermiticità li riduce a quattro. Infatti:
 #155: gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono l'uno il compl. coniugato dell'altro;
 #156: gli elementi della diagonale principale coincidono con il loro compl. coniugato e quindi sono reali.
 #157: Inoltre, avendo gli autovalori della stessa matrice segni opposti, la traccia è nulla, quindi gli ele-
 #158: menti della diagonale principale devono essere opposti.
 #159: Le matrici che soddisfano a tutte le condizioni dipendono da tre parametri reali, α β γ .
 #160: Imponendo che gli autovalori siano 1 e -1, per esprimere nel modo più semplice possibile che gli spin
 #161: sono opposti, otteniamo che il determinante sia uguale a -1 [il det. di una matrice è uguale al prodot-
 #162: to degli autovalori; la traccia ne è la somma].
 #163: La soluzione generale è
 #164:
$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & -\alpha \end{bmatrix}$$

 #165: con la condizione
 #166:
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

 #167:
 #168: Le matrici più semplici conformi a questo schema generale sono
 #169:
$$\sigma_z := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

 #170:
$$\sigma_x := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

 #171:
$$\sigma_y := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

 #172: e hanno tutte determinante = -1 e traccia nulla.

#173: La soluzione generale è una combinazione lineare delle tre σ , e quindi è un vettore di uno spazio vettoriale 3-dimensionale di base $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$.

#174: toriale 3-dimensionale di base $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$.

#175:

#176: Alcune proprietà delle matrici σ :

#177: il prodotto di una delle σ per se stessa è uguale alla matrice identità I_2

#178: $I_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

#179: $\sigma_z \cdot \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

#180: $\sigma_x \cdot \sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

#181: $\sigma_y \cdot \sigma_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

#182: La somma dei quadrati è $3 \cdot I_2$. Deriva dalla precedente.

#183: [Questa proprietà fondamentale definisce un isomorfismo tra lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari a coefficienti reali delle σ , e la 2-sfera; o, se si aggiunge la matrice identica in due dimensioni I_2 , alla 3-sfera e ai quaternioni di modulo 1.

#184: neari a coefficienti reali delle σ , e la 2-sfera; o, se si aggiunge la matrice identica in due dimensioni I_2 , alla 3-sfera e ai quaternioni di modulo 1.

#185: sioni I_2 , alla 3-sfera e ai quaternioni di modulo 1.

#186: La relazione

#187: $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3 \cdot I_2$

#188: è l'unico invariante dell'algebra delle σ ; corrisponde all'operatore Casimir].

#189: Le σ sono associabili a versori orientati nello spazio lungo tre assi ortogonali, e le loro combinazioni lineari a coefficienti reali a vettori nello spazio fisico tridimensionale.

#190: ni lineari a coefficienti reali a vettori nello spazio fisico tridimensionale.

#191: E' usuale scegliere l'asse Oz come asse di riferimento preferenziale (p. es. come asse lungo cui è orientato il polarimetro per la rivelazione di fotoni).

#192: orientato il polarimetro per la rivelazione di fotoni).

#193: La matrice σ_z è la forma diagonale delle altre due; ciò è evidente, dato che le tre σ hanno gli stessi autovalori delle altre. Ciò giustifica la scelta dell'asse Oz come asse preferenziale, e della base $[\uparrow, \downarrow]$ per lo spazio interno.

#194: autovalori delle altre. Ciò giustifica la scelta dell'asse Oz come asse preferenziale, e della base $[\uparrow, \downarrow]$ per lo spazio interno.

#195: $[\uparrow, \downarrow]$ per lo spazio interno.

#196:

#197: CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E AUTOSTATI DELLE MATRICI σ

#198: Invertendo il procedimento precedente, cerchiamo di ottenere gli autostati delle σ partendo dalle matrici. Il metodo 'standard' prevede che si risolva l'equazione caratteristica per calcolare gli autovalori, per poi determinare gli autovettori; ma possiamo procedere altrimenti iniziando col risolvere l'equazione matriciale

#199: trici. Il metodo 'standard' prevede che si risolva l'equazione caratteristica per calcolare gli autovalori, per poi determinare gli autovettori; ma possiamo procedere altrimenti iniziando col risolvere l'equazione matriciale

#200: lori, per poi determinare gli autovettori; ma possiamo procedere altrimenti iniziando col risolvere l'equazione matriciale

#201: l'equazione matriciale

#202: $\sigma_z \cdot [a, b] = \lambda \cdot [a, b]$

#203: nelle incognite a e b ; la soluzione generale è

#204: $[a = a \cdot \lambda, -b = b \cdot \lambda]$

#205: da cui deduciamo

#206: $(\lambda = 1 \wedge b = 0) \vee (\lambda = -1 \wedge a = 0)$

#207: Formalmente, a e b potrebbero essere numeri complessi qualsiasi; imponendo che il valore assoluto dei vettori di base sia 1, e tenendo presente che il fattore di fase $e^{i\phi}$ è non significativo, otteniamo

#208: vettori di base sia 1, e tenendo presente che il fattore di fase $e^{i\phi}$ è non significativo, otteniamo

#209: gli autostati di σ_z :

#210: $\uparrow := [1, 0]$

#211: $\downarrow := [0, 1]$

#212: ortogonali tra di loro, come possiamo verificare immediatamente calcolando il loro prodotto scalare:

#213: prscal(up, dn)

#214: 0

#215: Applichiamo lo stesso procedimento a σ_x :

#216: $\sigma_x \cdot [a, b] = \lambda \cdot [a, b]$

#217: $[b = a \cdot \lambda, a = b \cdot \lambda] \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a} = \pm 1$

#218: o anche

#219: $a^2 = b^2 \rightarrow |b| = |a| \rightarrow b = e^{i \cdot \varphi} \cdot a$

#220: Possiamo imporre che a sia reale, e quindi lo sia anche b ; l'ortogonalità degli autostati distinti del-

#221: la stessa matrice implica che, se $b = a$ in uno dei due, nell'altro sia $b = -a$. Infatti

#222: $\text{prscal}([a, a], [a, -a]) = |a|^2 - |a|^2 = 0$

#223: Tutti gli spinori di S_2 vanno normalizzati a 1, per cui

#224: $a^2 + b^2 = 2 \cdot a^2 = 1 \rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

#225: Le soluzioni possibili sono quattro e convenzionalmente si scelgono

#226: $rt := \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

#227: $lt := \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

#228: che sono ortogonali:

#229: prscal(rt, lt)

#230: 0

#231: Le componenti dei vettori rt, lt sono espresse nella base $[up, dn]$ degli autostati della matrice diago-

#232: nalizzata, cioè σ_z . Procediamo ora con la matrice σ_y

#233: $\sigma_y \cdot [a, b] = \lambda \cdot [a, b]$

#234: $[-i \cdot b = a \cdot \lambda, i \cdot a = b \cdot \lambda] \rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$

#235: [abbiamo diviso membro a membro, eliminando i e λ]

#236: da cui

#237: $b^2 = -a^2 \wedge |a|^2 + |b|^2 = 1 \rightarrow b = \pm i \cdot a \wedge a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

#238: [di nuovo, prendiamo una delle quattro soluzioni, in quanto differiscono per un fattore di fase]

#239: infine otteniamo

#240: $in := \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \right]$

#241: $ou := \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \right]$

#242: prscal(in, ou)

#243: 0

#244: Verifichiamo che gli autostati calcolati corrispondono agli autovalori 1 e -1:

#245: $\sigma_x \cdot rt = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = rt$

$$\#246: \sigma_x \cdot \text{lt} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\text{lt}$$

$$\#247: \sigma_y \cdot \text{in} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix} = \text{in}$$

$$\#248: \sigma_y \cdot \text{ou} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix} = -\text{ou}$$

#249: I passaggi sono più complicati se si procede calcolando le sol. dell'equazione caratteristica:

$$\#250: \text{DET}(\sigma_z - \lambda \cdot I_2) = 0$$

$$\#251: (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) = 0$$

#252: e così per le altre; dato λ - p.es. $\lambda = -1$ - si trova l'autostato ad esso associato

$$\#253: \sigma_z \cdot [a, b] = -[a, b]$$

$$\#254: [a = -a, -b = -b]$$

#255: che corrisponde ad $a = 0, b = 1$ cioè $[0, 1] = \text{dn}$.

#256: Indichiamo con 'A' l'insieme {up, dn, rt, lt, in, ou}.

#257:

#258: AZIONE DELLE MATRICI DI PAULI SUI VETTORI DELLE BASI [up, dn], [rt, lt], [in, ou]

#259: Le tre tabelle rappresentano, procedendo da sinistra a destra, le azioni di $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$ sugli elementi

#260: di 'A'. In ogni tabella la colonna sin. contiene gli operandi, quella centrale le loro componenti nella

#261: base [up, dn], quella destra i risultati in forma simbolica.

#262:

$$\#263: \left[\begin{array}{ccc} \sigma_z & & \sigma_x & & \sigma_y \end{array} \right]$$

$$\#264: \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \begin{array}{ccc} \text{up} & [1, 0] & \text{up} \\ \text{dn} & [0, -1] & -\text{dn} \\ \text{rt} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] & \text{lt} \\ \text{lt} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] & \text{rt} \\ \text{in} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] & \text{ou} \\ \text{ou} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] & \text{in} \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \text{up} & [0, 1] & \text{dn} \\ \text{dn} & [1, 0] & \text{up} \\ \text{rt} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] & \text{rt} \\ \text{lt} & \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] & -\text{lt} \\ \text{in} & \left[\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] & i \cdot \text{ou} \\ \text{ou} & \left[-\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] & -i \cdot \text{in} \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \text{up} & [0, i] & i \cdot \text{dn} \\ \text{dn} & [-i, 0] & -i \cdot \text{up} \\ \text{rt} & \left[-\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] & -i \cdot \text{lt} \\ \text{lt} & \left[\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] & i \cdot \text{rt} \\ \text{in} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] & \text{in} \\ \text{ou} & \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] & -\text{ou} \end{array} \end{array} \right]$$

#265:

#266: La matrice σ_z scambia rt con lt e in con ou e inverte il segno di dn, lasciando invariato up;

#267: σ_x scambia up con dn, e in con ou salvo coniugazione, inverte lt e lascia invariato rt;

#268: σ_y scambia up con dn e rt con lt salvo coniugazione, inverte ou e lascia inalterato in.

#269: Ogni matrice trasforma un autostato di un'altra matrice nell'altro autostato di quest'ultima.

#270:

#271: MATRICI σ COME TRASFORMAZIONI NEL PIANO E NELLO SPAZIO

#272: In Fisica le σ sono interpretate come rappresentazioni di operatori che generano gli stati di spin os-

#273: servati; ma in Matematica sono trasformazioni in uno spazio vettoriale 2-dim. sul campo complesso;

#274: possiamo interpretare 'up' e 'dn' come i versori \hat{i} e \hat{j} di una coppia di assi ortogonali e x, y come le

#275: proiezioni di un vettore unitario su C2 lungo gli assi.

$$\#276: \sigma_z \cdot [x, y] = [x, -y]$$

#277: $\rightarrow \sigma_z$ inverte l'asse Oy;

#278: $\sigma_x \cdot [x, y] = [y, x]$

#279: $\rightarrow \sigma_x$ scambia gli assi Ox e Oy ed è il prodotto dell'inversione di Oy per una rotazione antior. di $\pi/2$

$$\#280: \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

#281: $\sigma_y \cdot [x, y] = [-i \cdot y, i \cdot x]$

#282: $\rightarrow \sigma_y$ è il prodotto dell'unità immaginaria per una rotazione antioraria di $\pi/2$

$$\#283: i \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot [x, y] = [-i \cdot y, i \cdot x]$$

#284: σ_y è un'applicazione di RxC in CxR :

#285: $\sigma_y \cdot [x, i \cdot y] = [y, i \cdot x]$

#286: L'applicazione di σ_y sugli spinori $[x, iy]$ equivale allo scambio delle componenti di un numero comples-

#287: so $x + iy : x + i \cdot y \rightarrow y + i \cdot x$, che è il prodotto di una coniugazione per una rotazione antioraria di

#288: $\pi/2$ nel piano di Gauss:

$$\#289: e^{i \cdot \pi/2} \cdot (x - i \cdot y) = y + i \cdot x$$

#290:

#291: Abbiamo visto che operando su 'A' ogni σ trasforma ogni autostato delle altre nel suo opposto rispetto

#292: allo spazio fisico, lasciando invariati i propri; perciò ognuna di esse definisce una rotazione di π

#293: intorno ad un asse (quello degli autostati della stessa matrice).

#294: [volendo essere rigorosi, gli autostati trasformati possono differire da quelli convenzionalmente sta-

#295: biliti per un fattore di fase; p. es. $\sigma_x \cdot in = -i \cdot ou$ e $\sigma_y \cdot rt = -i \cdot lt$, il che non ne modifica l'orien-

#296: tamento]

#297:

#298: Gli autostati delle σ vanno associati a versori in R^3

#299: $up \rightarrow [1, 0, 0] \wedge dn \rightarrow [-1, 0, 0]$

#300: $rt \rightarrow [0, 1, 0] \wedge lt \rightarrow [0, -1, 0]$

#301: $in \rightarrow [0, 0, 1] \wedge ou \rightarrow [0, 0, -1]$

#302: [l'ordine delle componenti è $z \ x \ y$]

#303: Le σ corrispondono alle matrici di ordine 3

$$\#304: T_{\sigma_z} := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\#305: T_{\sigma_x} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\#306: T_{\sigma_y} := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

#307: Ogni T_{σ} è inversa di se stessa, il prodotto di una T_{σ} per se stessa è la matrice identica I_3 .

#308: Il prodotto di due delle T_{σ} genera la terza, ma è commutativo. Quindi l'algebra delle σ non è con-

#309: servata nel prodotto delle T_{σ} :

$$\#310: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\#311: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\#312: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#313:

#314: VALORI DI ASPETTAZIONE PER LE MATRICI σ

#315: In generale, il valore di aspettazione o valor medio della grandezza associata ad un operatore (per le

#316: σ , la proiezione dello spin lungo un asse prestabilito) in uno stato $|a\rangle$ è dato da $\langle a|O|a\rangle$; se $|a\rangle$ è

#317: l'autostato appartenente all'autovalore λ , si ottiene proprio λ in tutte le misure; in tal caso,

#318: $\langle \lambda \rangle = \lambda$; altrimenti $\langle \lambda \rangle$ è la media cui tende, all'aumentare del numero delle misurazioni, la successio-

#319: ne dei valori trovati.

#320: P. es. lo stato 'lt' è relativo all'autovalore -1, che corrisponde a tutte le rilevazioni effettuate

#321: con uno strumento opportunamente predisposto, p. es. un polarimetro orientato lungo l'asse Ox per i

#322: fotoni filtrati da un altro polarimetro orientato allo stesso modo. Modificando l'orientamento relati-

#323: vo, lo strumento rilevatore fornirà una successione casuale di misure, descrivibile da una serie impre-

#324: vedibile di 1 e -1, corrispondente ad uno stato di spin determinato dall'orientamento degli strumenti.

#325: Quest'ultimo determina 'a priori' la probabilità che si ottenga 1 o -1 per ogni singola misurazione;

#326: supponiamo che in una base $[x, y]$ lo spin sia descritto da $[ax + by]$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$; secondo la

#327: meccanica quantistica, per un dato spin, la probabilità che una singola misura della componente dello

#328: spin lungo la direzione definita dalla base $[x, y]$ corrisponda a 1 o a -1 è uguale al modulo quadro dei

#329: coefficienti 'a' e 'b' rispettivamente.

#330: La media aritmetica delle misure approssimerà tanto meglio il valore di aspettazione per quello stato

#331: di spin quanto maggiore è il numero delle rilevazioni effettuate.

#332:

#333: I valori di aspettazione dell'osservabile associata all'operatore 'O' per lo stato $|s\rangle$ si calcolano me-

#334: diante la funzione $\text{CONJ}(s) \cdot O \cdot s = \langle s|O|s\rangle$; un vettore 'bra' $\langle s|$ è il coniugato del 'ket' $|s\rangle$.

#335:

$$\#336: \begin{bmatrix} \langle \sigma_z \rangle & \text{up} \cdot \sigma_z \cdot \text{up} & \text{dn} \cdot \sigma_z \cdot \text{dn} & \text{rt} \cdot \sigma_z \cdot \text{rt} & \text{lt} \cdot \sigma_z \cdot \text{lt} \\ \langle \sigma_x \rangle & \text{up} \cdot \sigma_x \cdot \text{up} & \text{dn} \cdot \sigma_x \cdot \text{dn} & \text{rt} \cdot \sigma_x \cdot \text{rt} & \text{lt} \cdot \sigma_x \cdot \text{lt} \\ \langle \sigma_y \rangle & \text{up} \cdot \sigma_y \cdot \text{up} & \text{dn} \cdot \sigma_y \cdot \text{dn} & \text{rt} \cdot \sigma_y \cdot \text{rt} & \text{lt} \cdot \sigma_y \cdot \text{lt} \\ \langle \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \rangle & \text{up} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \text{up} & \text{dn} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \text{dn} & \text{rt} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \text{rt} & \text{lt} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \text{lt} \\ & \text{cong(in)} \cdot \sigma_z \cdot \text{in} & \text{cong(ou)} \cdot \sigma_z \cdot \text{ou} & & \\ & \text{cong(in)} \cdot \sigma_x \cdot \text{in} & \text{cong(ou)} \cdot \sigma_x \cdot \text{ou} & & \\ & \text{cong(in)} \cdot \sigma_y \cdot \text{in} & \text{cong(ou)} \cdot \sigma_y \cdot \text{ou} & & \\ & \text{cong(in)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \text{in} & \text{cong(ou)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \text{ou} & & \end{bmatrix}$$

#337:

#338: Eseguendo le operazioni inserite nel quadro, si ottiene la seguente tabella riassuntiva

#339:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_z \rangle & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \sigma_x \rangle & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \langle \sigma_y \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \langle \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \rangle & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \text{valore} & \text{up} & \text{dn} & \text{rt} & \text{lt} & \text{in} & \text{ou} \end{bmatrix}$$

#341:

#342: Quando il valore atteso è 1 o -1 per uno degli autostati relativi a una delle σ , è nullo per tutti gli

#343: autostati delle altre matrici.

#344: I valori di aspettazione, o valori medi delle σ possono essere calcolati per un generico stato combina-#345: zione lineare a coefficienti complessi degli autostati delle σ , in particolare nello spazio generato

#346: dai vettori 'up' e 'dn'.

#347: Costruiamo uno stato a coefficienti complessi a partire dagli stati 'up' e 'dn':

$$\text{cspin}(\alpha, \beta, \kappa, \lambda) := \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \kappa^2 + \lambda^2)}} \cdot ((\alpha + i\kappa) \cdot \text{up} + (\beta + i\lambda) \cdot \text{dn})$$

#349: [a = $\alpha + i\kappa$, b = $\beta + i\lambda$]#350: La funzione cspin genera gli autostati delle σ assegnando ai parametri reali $\alpha \beta \kappa \lambda$ valori opportuni;#351: p. es. per ottenere 'in' dobbiamo porre $\alpha = 1, \lambda = 1, \kappa = 0, \beta = 0$ #352: $\text{cspin}(1, 0, 0, 1)$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right]$$

#354:

#355: Calcoliamo il valor medio di σ_z , cioè la media delle misure della componente dello spin lungo l'asse Oz

#356: per una combinazione lineare generata dalla funzione cspin:

#357: $\text{CONJ}(\text{cspin}(\alpha, \beta, \kappa, \lambda)) \cdot \sigma_z \cdot \text{cspin}(\alpha, \beta, \kappa, \lambda)$

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2 + \kappa^2 - \lambda^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \kappa^2 + \lambda^2}$$

#359: Valor medio di σ_x #360: $\text{CONJ}(\text{cspin}(\alpha, \beta, \kappa, \lambda)) \cdot \sigma_x \cdot \text{cspin}(\alpha, \beta, \kappa, \lambda)$

$$\frac{2 \cdot (\alpha \cdot \beta + \kappa \cdot \lambda)}{\alpha^2 + \beta^2 + \kappa^2 + \lambda^2}$$

#362: Valor medio di σ_y #363: $\text{CONJ}(\text{cspin}(\alpha, \beta, \kappa, \lambda)) \cdot \sigma_y \cdot \text{cspin}(\alpha, \beta, \kappa, \lambda)$

$$\frac{2 \cdot (\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa)}{\alpha^2 + \beta^2 + \kappa^2 + \lambda^2}$$

#365: Cerchiamo sotto quali condizioni i valori medi sono nulli:

#366: $\langle \sigma_z \rangle = 0$ se $|a| = |b|$; si perviene allo stesso risultato in altro modo, più avanti;#367: $\langle \sigma_x \rangle$ si annulla banalmente per#368: $\alpha = \kappa = 0 \vee \beta = \lambda = 0 \vee \alpha = \lambda = 0 \vee \beta = \kappa = 0$

#369: cioè, se sono nulli il coefficiente di 'up' o quello di 'dn', oppure uno dei due è reale e l'altro im-

#370: maginario puro; il primo caso è ovvio, perché gli stati 'up' e 'dn' descrivono spin che non hanno com-

#371: ponenti lungo gli assi ortogonali a Oz. Il secondo è immediatamente verificabile:

#372: $\text{CONJ}(\alpha \cdot \text{up} + i \cdot \lambda \cdot \text{dn}) \cdot \sigma_x \cdot (\alpha \cdot \text{up} + i \cdot \lambda \cdot \text{dn})$

#373: 0

#374: $\text{CONJ}(\hat{i} \cdot \kappa \cdot \text{up} + \beta \cdot \text{dn}) \cdot \sigma_x \cdot (\hat{i} \cdot \kappa \cdot \text{up} + \beta \cdot \text{dn})$

#375: 0

#376: Invece

#377: $\text{CONJ}(\alpha \cdot \text{up} + \hat{i} \cdot \lambda \cdot \text{dn}) \cdot \sigma_z \cdot (\alpha \cdot \text{up} + \hat{i} \cdot \lambda \cdot \text{dn})$

#378:
$$\alpha^2 - \lambda^2$$

#379: $[\alpha, \hat{i}\lambda]$ o $[\hat{i}\alpha, \lambda]$ sono stati appartenenti al piano (y, z) ; il caso $\lambda = \pm\alpha$ corrisponde a 'in' o 'ou' che

#380: non hanno componenti lungo Oz, e infatti annullano anche $\langle\sigma_z\rangle$.

#381: Cerchiamo se vi sono soluzioni non banali per $\langle\sigma_x\rangle = 0$ sfruttando l'identità

#382: $(\alpha - \hat{i} \cdot \kappa) \cdot (\beta + \hat{i} \cdot \lambda) = \alpha \cdot \beta + \kappa \cdot \lambda + \hat{i} \cdot (\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa)$

#383: La parte reale e quella immaginaria del secondo membro sono i numeratori risp. di $\langle\sigma_x\rangle$ e $\langle\sigma_y\rangle$ a meno di

#384: un fattore 2; inoltre, per ogni $x, y \in \mathbb{C}$,

#385: $x = |x| \cdot \hat{e}^{i\theta} \wedge y = |y| \cdot \hat{e}^{i\varphi} \rightarrow x \cdot y = |x \cdot y| \cdot \hat{e}^{i(\theta + \varphi)} \rightarrow \text{RE}(x \cdot y) = |x \cdot y| \cdot \cos(\theta + \varphi)$

#386: Sia ora x il coniugato di a , cioè $\alpha - i\kappa$, $y = b$, θ la fase di a , φ quella di b ; poichè numeri complessi

#387: coniugati hanno fasi opposte, la fase di $\alpha - i\kappa$ è $-\theta$; quindi

#388: $\alpha \cdot \beta + \kappa \cdot \lambda = \text{RE}(\text{CONJ}(a) \cdot b) = |a \cdot b| \cdot \cos(\varphi - \theta)$

#389: escludendo che a o b sia nullo otteniamo

#390: $\langle\sigma_x\rangle = 0$ se $\theta = (\varphi \pm \pi/2) + k \cdot 2 \cdot \pi$

#391: La differenza di fase $= \pi/2$ implica che $b = \pm i a$; si generalizza quanto già ottenuto sopra, ma senza ag-

#392: giungere nulla di fisicamente significativo, dato che si tratta di 'in' e 'ou'.

#393:

#394: Per $\langle\sigma_y\rangle$, avremo

#395: $\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa = |a \cdot b| \cdot \sin(\varphi - \theta)$

#396: per cui $\langle\sigma_y\rangle = 0$ se a o b è nullo, o se

#397: $\sin(\varphi - \theta) = 0 \rightarrow \theta = \varphi + k \cdot \pi$

#398: La seconda soluzione non implica che a o b sia nullo, ma che siano opposti o uguali; infatti

#399: $\text{CONJ}(a \cdot \text{up} - a \cdot \text{dn}) \cdot \sigma_y \cdot (a \cdot \text{up} - a \cdot \text{dn}) = -\hat{i} \cdot |a|^2 + \hat{i} \cdot |a|^2 = 0$

#400: $\text{CONJ}(a \cdot \text{up} + a \cdot \text{dn}) \cdot \sigma_y \cdot (a \cdot \text{up} + a \cdot \text{dn}) = 0$

#401: Gli stati corrispondenti sono gli autostati di σ_x , 'rt' e 'lt'.

#402:

#403: Riassumendo,

#404: $\langle\sigma_z\rangle = 0$ se e solo se

#405: $|a| = |b| \rightarrow b = a \cdot \hat{e}^{i\varphi}$

#406: $\langle\sigma_x\rangle = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee b = i \cdot a \vee b = -i \cdot a$

#407: $\langle\sigma_y\rangle = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee b = a \vee b = -a$

#408: $\langle\sigma_x\rangle = \langle\sigma_y\rangle = 0$ solo se $a = 0 \vee b = 0$

#409: $\langle\sigma_z\rangle = \langle\sigma_x\rangle = 0$ solo se $b = \pm i a$

#410: $\langle\sigma_z\rangle = \langle\sigma_y\rangle = 0$ solo se $b = \pm a$

#411: Gli ultimi tre casi corripondono, nell'ordine, agli autostati di σ_z , σ_y e σ_x .

#412:

#413: Le σ hanno un orientamento rispetto allo spazio fisico, per cui ognuna di esse sarebbe ortogonale a un

#414: piano ricoperto da vettori descriventi stati per i quali il valore atteso $\langle\sigma\rangle$ è nullo. Potremmo atten-

#415: derci che il valor medio di σ_z per una combinazione lineare arbitraria degli autostati di σ_x e di σ_y

#416: debba essere nullo, dato che questi sono associati ad assi ortogonali a Oz . Due esempi sono

$$\#417: x \cdot r_t + y \cdot l_t = \left[\frac{\sqrt{2} \cdot x}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot y}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot x}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot y}{2} \right]$$

$$\#418: x \cdot i_n + y \cdot o_u = \left[\frac{\sqrt{2} \cdot x}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot y}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i \cdot x}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot i \cdot y}{2} \right]$$

#419: $x, y \in \mathbb{C}; |x|^2 + |y|^2 = 1$

#420: per i quali invece generalmente $|a| \neq |b|$ e quindi $\langle \sigma_z \rangle$ non è nullo.

#421: Infatti, il valore atteso di $\langle \sigma_z \rangle$ per una generica combinazione lineare degli spinori 'rt' e 'in' è

$$\#422: \text{CONJ}(\alpha \cdot r_t + \beta \cdot i_n) \cdot \sigma_z \cdot (\alpha \cdot r_t + \beta \cdot i_n)$$

$$\#423: \alpha \cdot \beta$$

#424: benché $\langle \sigma_z \rangle$ sia nullo sia per 'in' che per 'rt'; ma questi non sono stati tra di loro linearmente indi-

#425: pendenti, per cui non vale la regola secondo la quale il valor medio di una combinazione lineare di

#426: termini coincide con la combinazione lineare dei valori medi degli stessi termini.

#427: In uno spazio vettoriale, una combinazione lineare di vettori ortogonali a un asse è ancora ortogonale

#428: allo stesso asse; ma gli stati di spin sono trattati nello spazio interno, nel quale sono ortogonali

#429: gli spinori associati a direzioni opposte dello spazio fisico.

#430:

#431: Una combinazione lineare di autostati delle σ definisce ancora uno spinore di modulo 1 nello spazio de-

#432: gli spin, ma nello spazio fisico il vettore ad esso associato è la proiezione dello spin lungo un dato

#433: asse, che può coincidere con tutto lo spin o essere nulla nel caso contrario estremo.

#434: Dato un sistema di assi cartesiani Oxyz, nel primo caso, se lo spin è orientato lungo uno degli assi,

#435: sono nulli i valori medi delle due σ ortogonali all'asse dello spin; nel secondo, se la proiezione del-

#436: lo spin lungo p. es. l'asse Oz è nulla, è nullo anche il valor medio della matrice associata σ_z , e lo

#437: stesso vale per gli altri assi.

#438: La condizione necessaria e sufficiente affinché la componente di uno spin lungo un asse sia nulla è

#439: l'uguaglianza in valore assoluto dei coefficienti che lo rappresentano nella base degli autostati

#440: orientati lungo quell'asse. Se la condizione è verificata, vengono sommati vettori opposti con lo stes-

#441: so peso statistico, e la media della loro somma è nulla.

#442: La condizione è necessaria, in quanto i coefficienti che identificano uno spin in una delle basi rap-

#443: presentano i pesi statistici delle componenti dello spinore che lo descrive. Se non fossero uguali a

#444: meno di un fattore di fase, prevarrebbe il peso di una delle componenti, e il valor medio atteso per lo

#445: spin nella direzione associata alla base scelta non sarebbe nullo.

#446: Per es. se nella rappresentazione in base [up, dn] (quella usuale) prevalessse il coefficiente di 'dn',

#447: $\langle \sigma_z \rangle$ sarebbe un numero reale di segno negativo e le misure della componente dello spin lungo l'asse Oz

#448: fornirebbero nella maggior parte dei casi il valore -1.

#449: Allo stesso modo, se uno spin è descritto da

$$\#450: a \cdot r_t + b \cdot l_t \wedge |a| > |b|$$

#451: dobbiamo attenderci che $\langle \sigma_x \rangle > 0$; infatti

$$\#452: \text{CONJ}(a \cdot r_t + b \cdot l_t) \cdot \sigma_x \cdot (a \cdot r_t + b \cdot l_t) = \text{CONJ}((\alpha + i \cdot \kappa) \cdot r_t + (\beta + i \cdot \lambda) \cdot l_t) \cdot \sigma_x \cdot ((\alpha + i \cdot \kappa) \cdot r_t + (\beta + i \cdot \lambda) \cdot l_t)$$

#453: risulta in

$$\#454: \alpha^2 + \kappa^2 - \beta^2 - \lambda^2 = |a|^2 - |b|^2 > 0$$

#455: Lo stesso risultato si ottiene se si calcola $\langle \sigma_y \rangle$ per lo stato $a \cdot i_n + b \cdot o_u$.

#456: Il valore assoluto di uno spinore associato ad uno spin si conserva in ogni sistema di riferimento nel-

#457: lo spazio fisico, per cui, se le sue proiezioni lungo due assi ortogonali sono nulle, la componente
 #458: lungo il terzo asse coincide con tutto lo spin. Quindi, se i valori medi di due delle σ sono nulli, la
 #459: terza avrà valore di aspettazione massimo o minimo, cioè 1 o -1, a seconda che gli orientamenti dello
 #460: spin e della σ siano concordi od opposti.
 #461: Per es., $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$ per gli stati 'up' e 'dn', $\langle \sigma_z \rangle = 1$ o -1 rispettivamente.
 #462:
 #463: Non esiste uno stato di spin per il quale tutti i valori medi delle σ siano nulli; se lo è $\langle \sigma_z \rangle$, non
 #464: può essere $a = 0$ o $b = 0$, che invece è condizione necessaria perché $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$.
 #465: Segue una tabella degli stati che annullano uno o due valori medi delle tre σ :
 #466:

$$\#467: \left[\begin{array}{l} \langle \sigma_z \rangle = 0 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot dn) \\ \langle \sigma_x \rangle = 0 \quad \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot up \quad \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot dn \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up + \hat{i} \cdot dn) \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up - \hat{i} \cdot dn) \\ \langle \sigma_y \rangle = 0 \quad \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot up \quad \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot dn \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up + dn) \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up - dn) \\ \langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0 \quad \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot up \quad \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot dn \\ \langle \sigma_z \rangle = \langle \sigma_x \rangle = 0 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up + \hat{i} \cdot dn) \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up - \hat{i} \cdot dn) \\ \langle \sigma_z \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up + dn) \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (up - dn) \end{array} \right]$$

#468: esplicitando le componenti nella base [up, dn] abbiamo la tabella

$$\#469: \left[\begin{array}{l} \langle \sigma_z \rangle = 0 \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi}}{2} \right] \\ \langle \sigma_x \rangle = 0 \quad \left[\hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi}, 0 \right] \quad \left[0, \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \right] \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right] \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right] \\ \langle \sigma_y \rangle = 0 \quad \left[\hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi}, 0 \right] \quad \left[0, \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \right] \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ \langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0 \quad \left[\hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi}, 0 \right] \quad \left[0, \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \right] \\ \langle \sigma_z \rangle = \langle \sigma_x \rangle = 0 \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right] \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right] \\ \langle \sigma_z \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0 \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \end{array} \right]$$

#470:

#471: Il significato fisico è evidente: il valor medio atteso della proiezione di uno spin in una direzione

#472: ortogonale alla sua è nullo, per cui la somma dei valori (1 e -1) associati alle singole misurazioni

#473: tende a zero all'aumentare del loro numero.

#474: Gli stati che annullano $\langle \sigma_z \rangle$ sono combinazioni di 'rt' e 'lt' per $\varphi = 0$, di 'in' e 'ou' per $\varphi = \pi/2$;

#475: come al solito, moltiplicando le due componenti per un fattore di fase arbitrario si ottiene lo stesso

#476: stato fisico.

#477: Poiché è impossibile che i valori medi delle σ siano simultaneamente nulli, per qualsiasi stato, ne se-

#478: gue che esiste sempre un asse tale che la media della proiezione di uno spin su di esso non è mai nul-

#479: la; se tale asse non esistesse, per qualsiasi terna di assi ortgonali Oxyz i valori medi delle σ sareb-

#480: bero nulli.

#481:

#482: Lo schema generale dei valori di aspettazione delle σ per gli stati di spin le cui componenti siano u-

#483: guali in valore assoluto è il seguente, e non dipende dalla scelta della base di autostati delle σ ; ciò

#484: dimostra che la condizione sui valori assoluti dei coefficienti è suffIciente.

#485:

$$\#486: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{up} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{dn}) \cdot \sigma_z \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{up} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{dn}) = 0$$

$$\#487: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{up} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{dn}) \cdot \sigma_x \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{up} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{dn}) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) = \cos(\varphi - \theta)$$

$$\#488: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{up} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{dn}) \cdot \sigma_y \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{up} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{dn}) = \text{SIN}(\varphi) \cdot \text{COS}(\theta) - \text{COS}(\varphi) \cdot \text{SIN}(\theta) = \text{SIN}(\varphi - \theta)$$

$$\#489: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{rt} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{lt}) \cdot \sigma_x \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{rt} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{lt}) = 0$$

$$\#490: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{rt} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{lt}) \cdot \sigma_y \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{rt} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{lt}) = \text{COS}(\varphi) \cdot \text{SIN}(\theta) - \text{SIN}(\varphi) \cdot \text{COS}(\theta) = \text{SIN}(\theta - \varphi)$$

$$\#491: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{rt} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{lt}) \cdot \sigma_z \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{rt} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{lt}) = \text{COS}(\varphi) \cdot \text{COS}(\theta) + \text{SIN}(\varphi) \cdot \text{SIN}(\theta) = \text{COS}(\varphi - \theta)$$

$$\#492: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{in} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{ou}) \cdot \sigma_y \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{in} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{ou}) = 0$$

$$\#493: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{in} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{ou}) \cdot \sigma_x \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{in} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{ou}) = \text{SIN}(\varphi) \cdot \text{COS}(\theta) - \text{COS}(\varphi) \cdot \text{SIN}(\theta) = \text{SIN}(\varphi - \theta)$$

$$\#494: \frac{1}{2} \cdot \text{CONJ}(\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{in} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{ou}) \cdot \sigma_z \cdot (\hat{e}^{\hat{i} \cdot \theta} \cdot \text{in} + \hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{ou}) = \text{COS}(\varphi) \cdot \text{COS}(\theta) + \text{SIN}(\varphi) \cdot \text{SIN}(\theta) = \text{COS}(\varphi - \theta)$$

#495:

#496: Il valor medio del quadrato delle σ è sempre uguale a 1 per qualsiasi stato $|s\rangle$:

$$\#497: \sigma_j^2 = I2 \rightarrow \text{CONJ}(s) \cdot \sigma_j^2 \cdot s = \text{CONJ}(s) \cdot s = 1$$

#498: Infatti, le singole misurazioni delle proiezioni di uno spin $|s\rangle$ lungo un asse corrispondono agli auto-

#499: valori 1 o -1, il cui quadrato è sempre 1.

#500:

#501: Il massimo di $\langle \sigma_z \rangle$ è dato da $b = 0$ e vale 1:

$$\#502: \frac{\alpha^2 - 0 + \kappa^2 - 0}{\alpha^2 + 0 + \kappa^2 + 0} = 1$$

#503: Il minimo da $a = 0$ e vale -1:

$$\#504: \frac{0 - \beta^2 + 0 - \lambda^2}{0 + \beta^2 + 0 + \lambda^2} = -1$$

#505: Il massimo di $\langle \sigma_x \rangle$ coincide con quello di $\text{COS}(\theta - \varphi) \rightarrow \theta = \varphi$;

#506: il minimo con quello di $\text{COS}(\theta - \varphi) \rightarrow \theta = \varphi = \pm \pi/2$

#507: Il massimo di σ_y coincide con quello di $\text{SIN}(\theta - \varphi) \rightarrow \theta = \varphi + \pi/2$;

#508: il minimo con quello di $\text{SIN}(\theta - \varphi) \rightarrow \theta = \varphi - \pi/2$

#509: Tutti i max e i min coincidono risp. con +1 e -1.

#510:

#511: La seguente tabella rappresenta in sintesi tutti i risultati ottenuti sui valori medi delle tre matrici

#512: di Pauli:

$$\#513: \begin{bmatrix} \langle \sigma_z \rangle & b = 0 & |a| = |b| & a = 0 \\ \langle \sigma_x \rangle & \alpha \cdot \beta + \kappa \cdot \lambda = 1 & \alpha \cdot \beta + \kappa \cdot \lambda = 0 & \alpha \cdot \beta + \kappa \cdot \lambda = -1 \\ \langle \sigma_y \rangle & \alpha \cdot \kappa - \beta \cdot \lambda = 1 & \alpha \cdot \kappa - \beta \cdot \lambda = 0 & \alpha \cdot \kappa - \beta \cdot \lambda = -1 \end{bmatrix}$$

#514: La seconda colonna da sx rappresenta le condizioni per i max, la terza per il valore nullo e quella a

#515: destra per i minimi.

#516:

#517: TRASFORMAZIONI TRA AUTOSTATI DELLE σ

#518: Possiamo esprimere i quattro autostati di σ_x e σ_y rispetto a 'up' e 'dn' come segue:

$$\#519: rt := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot up + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot dn$$

$$\#520: lt := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot up - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot dn$$

$$\#521: in := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot up + \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot dn$$

$$\#522: ou := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot up - \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot dn$$

#523: E' anche possibile esprimere 'up' e 'dn' rispetto a 'rt' e 'lt' o rispetto a 'in' e 'ou', ecc. appli-

#524: cando l'identita' $|s\rangle = \langle a|s\rangle|a\rangle + \langle b|s\rangle|b\rangle$ dove $[|a\rangle, |b\rangle]$ è una base O.N.

#525: Per calcolare le componenti di 'up' e 'dn' nella base [rt, lt] possiamo utilizzare la funzione prscal:

$$\#526: prscal(rt, up) \cdot rt + prscal(lt, up) \cdot lt$$

$$\#527: [1, 0]$$

#528: fornisce lo stato 'up'. Infatti

$$\#529: prscal(rt, up) = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge prscal(lt, up) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow up = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot rt + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot lt$$

#530:

#531: Cerchiamo le matrici per trasformare una base in un'altra.

#532: In generale, possiamo esprimere uno spinore appartenente a una base in funzione di tutti gli altri me-

#533: diante una funzione che restituisca le componenti di un vettore 'u' nella base [v, w]:

$$\#534: comp(u, v, w) := [prscal(v, u), prscal(w, u)]$$

#535: e ottenere una tabella, nella quale le righe si riferiscono agli stati, e le colonne alle basi;l'incro-

#536: cio di una riga e di una colonna contiene le componenti dello stato corrispondente calcolate nella base

#537: indicata in colonna.

$$\#538: \begin{bmatrix} \text{stato} & [\text{up}, \text{dn}] & [\text{rt}, \text{lt}] & [\text{in}, \text{ou}] \\ \text{up} & [1, 0] & \text{comp}(\text{up}, \text{rt}, \text{lt}) & \text{comp}(\text{up}, \text{in}, \text{ou}) \\ \text{dn} & [0, 1] & \text{comp}(\text{dn}, \text{rt}, \text{lt}) & \text{comp}(\text{dn}, \text{in}, \text{ou}) \\ \text{rt} & \text{comp}(\text{rt}, \text{up}, \text{dn}) & \text{comp}(\text{rt}, \text{rt}, \text{lt}) & \text{comp}(\text{rt}, \text{in}, \text{ou}) \\ \text{lt} & \text{comp}(\text{lt}, \text{up}, \text{dn}) & \text{comp}(\text{lt}, \text{rt}, \text{lt}) & \text{comp}(\text{lt}, \text{in}, \text{ou}) \\ \text{in} & \text{comp}(\text{in}, \text{up}, \text{dn}) & \text{comp}(\text{in}, \text{rt}, \text{lt}) & \text{comp}(\text{in}, \text{in}, \text{ou}) \\ \text{ou} & \text{comp}(\text{ou}, \text{up}, \text{dn}) & \text{comp}(\text{ou}, \text{rt}, \text{lt}) & \text{comp}(\text{ou}, \text{in}, \text{ou}) \end{bmatrix}$$

#539:

#540: Sviluppando i calcoli si ottiene il quadro seguente:

#541:

$$\begin{array}{l} \text{\#542:} \\ \left[\begin{array}{ll} \text{stato} & [\text{up}, \text{dn}] \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{ll} \text{rt}, \text{lt} \end{array} \right. \quad \left. \left[\begin{array}{ll} \text{in}, \text{ou} \end{array} \right] \right. \\ \text{up} \quad [1, 0] \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \\ \text{dn} \quad [0, 1] \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ll} -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{array} \right] \\ \text{rt} \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \quad [1, 0] \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{array} \right] \\ \text{lt} \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \quad [0, 1] \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{array} \right] \\ \text{in} \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{array} \right] \quad [1, 0] \\ \text{ou} \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{array} \right] \quad [0, 1] \end{array} \right]$$

#543:

#544: P. es, 'in' può essere sviluppato rispetto alla base [rt, lt] nel modo seguente:

$$\text{\#545: } \text{in} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \cdot \text{rt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \cdot \text{lt}$$

#546: Infatti, confrontando le componenti rispetto a [up, dn] dei due membri otteniamo

$$\text{\#547: } \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{array} \right]$$

#548:

#549: Gli stati 'rt' e 'lt' possono essere ottenuti da 'up' e 'dn' mediante rotazioni di 45° nello spazio in-

#550: terno degli spin S2

$$\text{\#551: } \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \cdot \text{up} = \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] = \text{rt}$$

$$\text{\#552: } \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \cdot \text{up} = \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] = \text{lt}$$

$$\text{\#553: } \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \cdot \text{dn} = \left[\begin{array}{ll} -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] = -\text{lt}$$

$$\text{\#554: } \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \cdot \text{dn} = \left[\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] = \text{rt}$$

#555: [-lt coincide con lt; l'angolo π tra spinori coincide con 2π tra i vettori loro associati nello spazio

#556: fisico]

#557: Una rotazione antioraria di 45° applicata a 'rt' genera 'dn':

$$\#558: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \text{rt} = [0, 1] = \text{dn}$$

#559: Applicando in successione rotazioni antiorarie di $\pi/4$ a partire da 'up', si generano nell'ordine

#560: rt, dn, -lt, -up, -rt, -dn, lt, up.

#561: [il segno '-' definisce una differenza di fase = π , fisicamente non significativa];

#562:

#563: Per ottenere 'in' e 'ou' da 'up' e 'dn', si devono applicare, rispettivamente, le matrici

$$\#564: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} & \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#565: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} & \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#566: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} & \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] \wedge \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} & \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right]$$

#567: Le stesse matrici generano 'in' e 'ou' a partire da dn:

$$\#568: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} & \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \text{dn} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] \wedge \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} & \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \text{dn} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right] = -\text{ou}$$

#569: [Questa proprietà conferma che gli angoli tra spinori sono la metà degli angoli formati dai vettori ad

#570: essi associati nello spazio fisico 3-dimensionale, [0, 0, 1] per 'up', [0, 1, 0] per 'rt' ecc.]

#571:

#572: ISOMORFISMO CON I NUMERI COMPLESSI DI MODULO 1

#573: Esiste una biiezione tra gli autostati di σ_x e σ_z e le radici di ordine pari dell'unità fino all'ottava

#574: e per estensione tra gli spinori nelle basi [up, dn] e [rt, lt] e i numeri complessi di modulo 1, con-

#575: tando come distinti [-a, -b] e [a, b]:

#576: [a, b] $\rightarrow a + i \cdot b$

$$\#577: \text{rt} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) \wedge \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) \right)^8 = 1$$

$$\#578: \text{lt} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 - i) \wedge \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 - i) \right)^8 = 1$$

$$\#579: \text{dn} = [0, 1] \rightarrow i \wedge i^4 = 1$$

$$\#580: -\text{up} = [-1, 0] \rightarrow -1 \wedge (-1)^2 = 1$$

$$\#581: \text{up} = [1, 0] \rightarrow 1 \wedge 1^2 = 1$$

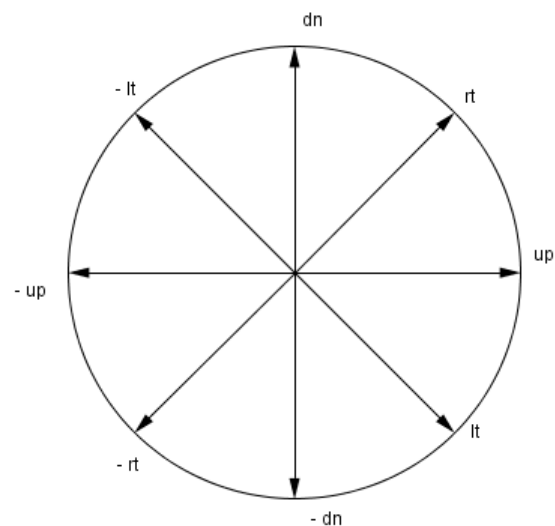
#582:

#583: Non vi è corrispondenza tra prodotto scalare degli spinori e prodotto delle radici dell'unità; l'iso-

#584: morfismo riguarda l'ordinario prodotto algebrico se si identificano spinori di S_2 e numeri complessi
 #585: di modulo 1.
 #586: Due radici dell'unità di ordine 'n' e 'm' hanno fasi $2\pi/n$ e $2\pi/m$ rispettivamente, e la fase del loro
 #587: prodotto è la loro somma, $2\pi(m+n)/m \cdot n$. Il prodotto è la radice di 1 di ordine $(m+n)$, elevata a $m \cdot n$.
 #588: Il prodotto delle radici di 1 associate a due spinori appartenenti all'unione degli autospazi di σ_z e
 #589: σ_x genera lo spinore associato alla somma delle fasi delle due radici. Esiste quindi una iniezione tra
 #590: l'insieme delle radici di 1, o delle loro fasi, e l'unione degli autospazi di σ_z e σ_x ; più in genera-
 #591: le, esiste una biiezione tra numeri complessi di modulo 1 e spinori unitari di S_2 .
 #592: I numeri z / $|z| = 1$ fungono da operatori della trasformazione di uno spinore ad un altro; indicando
 #593: con $\text{spin}(\theta)$ e $\text{spin}(\phi)$ gli spin associati ai numeri unitari di fasi θ e ϕ , abbiamo
 #594: $\text{spin}(\phi) = e^{i(\phi-\theta)} \cdot \text{spin}(\theta)$
 #595: Il fattore di trasformazione è una radice di 1 se $\phi - \theta = 2\pi/n$.
 #596: Se identifichiamo uno spinore di S_2 con un numero 'z', il coefficiente di 'up' è la parte reale, quel-
 #597: lo di 'dn' la parte immaginaria di 'z'.
 #598: Lo stato 'rt' è quindi nello stesso tempo spinore e generatore (attraverso la radice ottava di 1 cui è
 #599: associato) di tutti gli autostati di σ_z e σ_x .
 #600:
 #601: Ne segue che 'rt' è operatore di rotazioni di $2\pi/8 = \pi/4$ nel piano di Gauss; la sua applicazione itera-
 #602: ta genera tutti gli autostati di σ_x e σ_z :
 #603: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) \right)^2 = i$
 #604: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) \cdot i = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) \right)^3 = -it$
 #605: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \right) = -1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) \right)^4 = -up$
 #606: $[a + ib]$ rappresenta $[a, b,]$ e consideriamo $-up$ distinto da 'up']
 #607: ecc.; le potenze pari generano 'up' e 'dn', quelle dispari 'rt' e 'lt'. In generale,
 #608: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) \right)^n = (-1)^{n/4}$
 #609:
 #610: La biiezione $[u, iv] \rightarrow u + iv$ tra l'insieme degli autostati di σ_y e σ_z e il piano di Gauss implica re-
 #611: lazioni formalmente identiche a quelle già trattate, salvo che 'ou' sostituisce 'rt' come operatore di
 #612: rotazioni in senso orario e non più antiorario, e 'dn' corrisponde ora a $-i$; lo stesso numero comples-
 #613: so rappresenta sia 'rt' sia 'ou' in due distinti piani di Gauss.
 #614: Il quadro delle trasformazioni indotte dagli operatori 'rt' e 'ou' sugli autostati di σ_x , σ_z e di σ_y ,
 #615: σ_z è il seguente:

$$\#616: \begin{bmatrix} 0 & & \\ \text{rt} & 1 & \text{up} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 + i) & \text{rt} \\ \text{rt} & & \\ 2 & i & \text{dn} \\ 3 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} & -\text{lt} \\ \text{rt} & & \\ 4 & -1 & -\text{up} \\ 5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} & -\text{rt} \\ \text{rt} & & \\ 6 & -i & -\text{dn} \\ 7 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} & \text{lt} \\ \text{rt} & & \\ 8 & 1 & \text{up} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & & \\ \text{ou} & 1 & \text{up} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 - i) & \text{ou} \\ \text{ou} & & \\ 2 & -i & \text{dn} \\ 3 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} & -\text{in} \\ \text{ou} & & \\ 4 & -1 & -\text{up} \\ 5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} & -\text{ou} \\ \text{ou} & & \\ 6 & i & -\text{dn} \\ 7 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} & \text{in} \\ \text{ou} & & \\ 8 & 1 & \text{up} \end{bmatrix}$$

#617:

#618: La rappresentazione grafica degli autostati di σ_z e σ_x nel piano di Gauss è la seguente

#619:

#620: CAMBIAMENTI DI BASE

#621: Le matrici che operano trasformazioni della base devono essere unitarie, per cui l'inversa di una ma-

#622: trice - per def. di matrice unitaria - coincide con l'aggiunta, cioè la trasposta coniugata.

#623: In generale, il calcolo dei vettori di una 'nuova' base ortonormale $[e'_1, e'_2, \dots, e'_n]$ a partire da una#624: base ortonormale $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ si ottiene con la matrice tale che gli elementi delle colonne sono le#625: componenti dei vettori $[e'_1, \dots, e'_n]$ nella 'vecchia' base $[e_1, \dots, e_n]$; quindi per ottenere la matrice che#626: moltiplicata per i vettori della base $[\text{up}, \text{dn}]$ genera i vettori rt e lt , dobbiamo allineare le colonne#627: $[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ e $[\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$:

$$\#628: \text{TRXZ} := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#629: identica alla propria aggiunta, e quindi coincidente con l'inversa:

$$\#630: \text{TRXZ} \cdot \text{TRXZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{I2}$$

$$\#631: \text{DET}(\text{TRXZ}) = -1$$

#632: TRXZ trasforma σ_x in σ_z e viceversa:

$$\#633: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \sigma_x \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

$$\#634: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \sigma_z \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

#635: Inoltre inverte i segni degli elementi di σ_y , dato che nello spazio tridimensionale lo scambio tra O_x

#636: e O_z equivale a una rotazione intorno a O_y che sposta O_z in $-O_x$ e O_x in O_z seguita dall'inversione di

#637: O_y e O_x per rotazione di π intorno a O_z :

$$\#638: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \sigma_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{1} \\ -\hat{1} & 0 \end{bmatrix} = -\sigma_y$$

#639:

#640: Con TRXZ si trasformano 'up' e 'dn' in 'rt' e 'lt', e viceversa, e si scambiano 'in' e 'ou':

$$\#641: \text{TRXZ} \cdot \text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \text{rt}$$

$$\#642: \text{TRXZ} \cdot \text{dn} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \text{lt}$$

$$\#643: \text{TRXZ} \cdot \text{rt} = [1, 0] = \text{up}$$

$$\#644: \text{TRXZ} \cdot \text{lt} = [0, 1] = \text{dn}$$

$$\#645: \text{TRXZ} \cdot \text{in}$$

$$\#646: \left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{1}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\hat{1}}{2} \right]$$

$$\#647: \text{TRXZ} \cdot \text{ou}$$

$$\#648: \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{1}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{1}}{2} \right]$$

#649: che sono rappresentazioni rispettivamente di 'ou' e 'in'; infatti

$$\#650: \text{prscal} \left(\text{in}, \left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{1}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\hat{1}}{2} \right] \right) = 0 \wedge \text{prscal} \left(\text{ou}, \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{1}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{1}}{2} \right] \right) = 0$$

#651: ottenibili dalla rappresentazione usuale modificando le fasi:

$$\#652: \hat{e}^{\hat{1} \cdot \pi/4} \cdot \text{ou} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{1}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\hat{1}}{2} \right] \wedge \hat{e}^{-\hat{1} \cdot \pi/4} \cdot \text{in} = \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{1}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{1}}{2} \right]$$

#653:

#654: Si osservi che le componenti di un vettore sono controvarianti rispetto alla trasformazione di una base

#655: in un'altra; ciò significa che, se $|e'i\rangle = T|ei\rangle$, le componenti a' di un vettore nella base $\{|e'i\rangle\}$ si

#656: ottengono moltiplicando riga per colonna la matrice inversa τ per il vettore colonna delle componenti

#657: di $|a\rangle$ nella base $|ei\rangle$.

#658: Infatti, (applicando la convenzione di somma per indici ripetuti) abbiamo

$$a'_k = \langle e'_k | a \rangle = \langle e_i T_{k,i}^\dagger | a \rangle = \langle e_i \tau_{ki} | a \rangle$$

#659: Gli elementi della matrice ' τ ' sono numeri, e 'filtrano' attraverso il prodotto scalare

$$a'_k = \tau_{k,i} \langle e_i | a \rangle = \tau_{k,i} a_i$$

#660:

#661: dove $\tau_{k,i}$ è l'elemento della matrice inversa τ all'incrocio della riga k e della colonna i .

#662: Perciò, p. es.,

$$\#663: \text{TRXZ} \cdot \text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

#664: può essere interpretato nel senso che, nella base $[\text{rt}, \text{lt}]$, 'up' ha componenti $[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$; e

$$\#665: \text{TRXZ} \cdot \text{in} = \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right] \wedge \text{TRXZ} \cdot \text{ou} = \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right]$$

#666: ci forniscono le componenti di 'in' e 'ou' nella stessa base $[\text{rt}, \text{lt}]$.

#667: Infatti,

$$\#668: \text{prscal}(\text{rt}, \text{in}) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \wedge \text{prscal}(\text{lt}, \text{in}) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

#669: Da questo punto di vista,

$$\#670: \text{TRXZ} \cdot \text{rt} = [1, 0] \wedge \text{TRXZ} \cdot \text{lt} = [0, 1]$$

#671: possono essere la trasformazione di $[\text{rt}, \text{lt}]$ in $[\text{up}, \text{dn}]$ rappresentata nella base $[\text{up}, \text{dn}]$, oppure la

#672: rappresentazione banale di 'rt' e 'lt' nella stessa base $[\text{rt}, \text{lt}]$.

#673:

#674: Nel piano cartesiano (x, y) TRXZ è il prodotto di una rotazione antioraria di $\pi/4$ e una inversione del-

#675: l'asse Oy:

$$\#676: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

#677: Verifichiamo termine a termine:

$$\#678: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#679: Il prodotto non è commutativo

$$\#680: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#681:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#682:

#683: Per passare dalla base $[\text{up}, \text{dn}]$ alla base $[\text{in}, \text{ou}]$ serve la matrice TRYZ:

$$\#684: \text{TRYZ} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

#685: l'inversa è la trasposta coniugata

$$\#686: \text{TRZY} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\#687: \text{TRYZ} \cdot \text{TRZY} = \text{TRZY} \cdot \text{TRYZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\#688: \text{DET}(\text{TRYZ}) = -\mathbf{i} \wedge \text{DET}(\text{TRZY}) = \mathbf{i}$$

#689: Nessuna potenza di TRYZ equivale all'identità I2, fino alla 24-esima:

$$\text{iftryz}(n) := \begin{cases} \text{If } \text{TRYZ}^n = \text{I2} \\ n \end{cases}$$

$$\#690: \begin{cases} \text{If } n > 2 \\ \text{iftryz}(n-1) \\ 0 \end{cases}$$

$$\#691: \text{VECTOR}(\text{iftryz}(k), k, 1, 24)$$

$$\#692: [0, 24]$$

$$\#693: \text{iftryz}(24)$$

$$\#694: 24$$

$$\#695:$$

#696: TRYZ trasforma ognuna delle σ nella successiva, e TRZY nella precedente secondo l'ordine ciclico

#697: x y z x ...

$$\#698: \text{TRZY} \cdot \sigma_x \cdot \text{TRYZ} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

$$\#699: \text{TRYZ} \cdot \sigma_x \cdot \text{TRZY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

$$\#700: \text{TRYZ} \cdot \sigma_y \cdot \text{TRZY} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

$$\#701: \text{TRZY} \cdot \sigma_y \cdot \text{TRYZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

$$\#702: \text{TRYZ} \cdot \sigma_z \cdot \text{TRZY} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

$$\#703: \text{TRZY} \cdot \sigma_z \cdot \text{TRYZ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

$$\#704: \text{TRYZ} \cdot \text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot \mathbf{i}}{2} \right] = \text{in}$$

$$\#705: \text{TRYZ} \cdot \text{dn} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2} \cdot \mathbf{i}}{2} \right] = \text{ou}$$

$$\#706: \text{TRZY} \cdot \text{in} = [1, 0] = \text{up}$$

$$\#707: \text{TRZY} \cdot \text{ou} = [0, 1] = \text{dn}$$

$$\#708: \text{TRYZ} \cdot \text{rt} = [1, 0] = \text{up}$$

$$\#709: \text{TRYZ} \cdot \text{lt} = [0, \mathbf{i}] = \mathbf{i} \cdot \text{dn}$$

$$\#710: \text{TRYZ} \cdot \text{in} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right] = \hat{e}^{\hat{i} \cdot \pi/4} \cdot \text{rt}$$

$$\#711: \text{TRYZ} \cdot \text{ou} = \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right] = \hat{e}^{-\hat{i} \cdot \pi/4} \cdot \text{lt}$$

#712: Nello spazio fisico TRYZ trasforma Ox in Oz, Oz in Oy e Oy in Ox, sostituisce la terna di assi [X Y Z]

#713: con [Z X Y].

#714: Applicando TRZY a 'up' e 'dn' troviamo le loro componenti nella base [in, ou]:

$$\#715: \text{TRZY} \cdot \text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \wedge \text{TRZY} \cdot \text{dn} = \left[-\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right]$$

#716:

#717: Il passaggio da [in, ou] a [rt, lt] si può ottenere - esprimendo le componenti dei vettori nella base

#718: [up, dn] - componendo le matrici TRXZ e TRZY:

#719: $\text{TRXY} := \text{TRXZ} \cdot \text{TRZY}$

$$\#720: \text{TRXY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\hat{i} \end{bmatrix}$$

#721: L'inversa TRYX è l'aggiunta

$$\#722: \text{TRYX} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{i} \end{bmatrix}$$

#723: $\text{DET}(\text{TRYX}) = \hat{i} \wedge \text{DET}(\text{TRXY}) = -\hat{i}$

$$\#724: \text{TRXY}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z \wedge \text{TRXY}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

#725:

#726: TRXY e TRYX trasformano σ_x e σ_y l'una nell'altra lasciando σ_z invariata:

$$\#727: \text{TRYX} \cdot \sigma_x \cdot \text{TRXY} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{i} \\ \hat{i} & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

$$\#728: \text{TRXY} \cdot \sigma_y \cdot \text{TRYX} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

$$\#729: \text{TRYX} \cdot \sigma_y \cdot \text{TRXY} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\sigma_x$$

$$\#730: \text{TRXY} \cdot \sigma_x \cdot \text{TRYX} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{i} \\ -\hat{i} & 0 \end{bmatrix} = -\sigma_y$$

$$\#731: \text{TRYX} \cdot \sigma_z \cdot \text{TRXY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

$$\#732: \text{TRXY} \cdot \sigma_z \cdot \text{TRYX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

#733: $\text{TRXY} \cdot \text{up} = [1, 0] = \text{up} = \text{TRYX} \cdot \text{up}$

#734: $\text{TRXY} \cdot \text{dn} = [0, -\hat{i}] = -\hat{i} \cdot \text{dn}$

#735: $\text{TRYX} \cdot \text{dn} = [0, \hat{i}] = \hat{i} \cdot \text{dn}$

$$\#736: \text{TRXY} \cdot \text{in} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \text{rt}$$

$$\#737: \text{TRXY} \cdot \text{ou} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \text{lt}$$

$$\#738: \text{TRYX} \cdot \text{rt} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right] = \text{in}$$

$$\#739: \text{TRYX} \cdot \text{lt} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix} = \text{ou}$$

#740: TRXY scambia Ox con Oy, lasciando invariato Oz, salvo la complessificazione di 'dn'.

#741:

#742: Per ottenere il cambiamento di base 'diretto' da [rt, lt] a [in, ou] costruiamo la matrice

$$\#743: \begin{bmatrix} \text{prscal}(\text{rt}, \text{in}) & \text{prscal}(\text{rt}, \text{ou}) \\ \text{prscal}(\text{lt}, \text{in}) & \text{prscal}(\text{lt}, \text{ou}) \end{bmatrix}$$

$$\#744: \text{CBXY} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

#745: Si ottiene lo stesso risultato risolvendo l'equazione matriciale $\text{TRXZ} \cdot X = \text{TRYZ}$ nell'incognita 'X':

#746: nel piano (x, y) TRYZ è il prodotto di TRXZ per una pseudorotazione complessa; per trovare la matrice

#747: che moltiplica a destra TRXZ in modo da ottenere TRYZ, risolviamo l'equazione

$$\#748: \text{SOLVE} \left(\begin{bmatrix} a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ i \cdot a & -i \cdot a \end{bmatrix}, [x, y, z, t] \right)$$

$$\#749: \begin{bmatrix} x = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \wedge y = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \wedge z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \wedge t = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#750: \text{TRXZ} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} & -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix}$$

#751:

#752: A titolo di verifica, otteniamo le componenti di ou e in nella base [up, dn] a partire dagli elementi

#753: delle colonne di CBXY - che sono in e ou nella base [rt, lt]:

$$\#754: \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \cdot \text{rt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \cdot \text{lt} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix} = \text{in}$$

$$\#755: \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \cdot \text{rt} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \cdot \text{lt} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix} = \text{ou}$$

#756: Nella base [rt, lt] 'rt' e 'lt' sono rappresentati da [1, 0] e [0, 1] risp.; applicando a questi la ma-

#757: trice CBXY riotteniamo le componenti di 'in' e 'ou' nella base [rt, lt]:

$$\#758: \text{CBXY} \cdot [1, 0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{bmatrix} = \text{in} \wedge \text{CBXY} \cdot [0, 1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{bmatrix} = \text{ou}$$

#759: L'inversa di CBXY è

$$\#760: \text{CBYX} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#761: \text{CBXY} \cdot \text{CBYX} = \text{CBYX} \cdot \text{CBXY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\#762: \text{CBYX} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{bmatrix} = [1, 0] = \text{rt} \wedge \text{CBYX} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{bmatrix} = [0, 1] = \text{lt}$$

#763: Applicando CBYX ai vettori 'up' e 'dn', rappresentati nella base [rt, lt], rispettivamente come

$$\#764: \text{up} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \wedge \text{dn} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#765: si devono ottenere le loro componenti nella base [in, ou]. Infatti:

$$\#766: \text{CBYX} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \wedge \text{CBYX} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} & \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix}$$

#767: cioè, $\text{CBYX} \cdot \text{up}$ (in [rt, lt]) = up (in [in, ou]); analogamente per lo stato 'dn'.

#768:

#769: Trasformazioni delle matrici σ sotto CBXY e CBYX:

$$\#770: \text{CBYX} \cdot \sigma_x \cdot \text{CBXY} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

$$\#771: \text{CBXY} \cdot \sigma_x \cdot \text{CBYX} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

$$\#772: \text{CBYX} \cdot \sigma_z \cdot \text{CBXY} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

$$\#773: \text{CBXY} \cdot \sigma_z \cdot \text{CBYX} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -\sigma_y$$

$$\#774: \text{CBYX} \cdot \sigma_y \cdot \text{CBXY} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\sigma_z$$

$$\#775: \text{CBXY} \cdot \sigma_y \cdot \text{CBYX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

#776:

#777: _____

#778: NOTA

#779: Ovviamente, le trasformazioni sulle σ non alterano i valori di aspettazione delle proiezioni degli spin

#780: lungo gli assi. P.es. $\langle \sigma_x \rangle$ è nullo per gli stati 'in' e 'ou', e tale rimane sotto CBXY, CBYX ecc.

#781: Dato uno stato $|a\rangle$ il valore di aspettazione dell'operatore 'O' è dato da $\langle a|O|a\rangle$ nel formalismo

#782: astratto; tale valore non dipende dalla base ortonormale nella quale sono espressi gli elementi di $|a\rangle$

#783: e della matrice che rappresenta 'O' nella base data. Data una base ortonormale $\{e_i\}$, e una 'nuova' base

#784: $\{e'_i\}$, $i=1\dots N$ e detta 'T' la matrice che opera il cambiamento di base da $\{e_i\}$ a $\{e'_i\}$, la matrice 'A'

#785: che rappresenta l'operatore 'O' nella precedente base $\{e_i\}$ è trasformata nel prodotto $\tau A T$, essendo

#786: ' τ ' l'inversa di T.

#787: Lo stato $|a\rangle$ (o piuttosto le sue componenti rispetto alla base, ma dal punto di vista matematico non si

#788: può distinguere una variazione delle componenti del vettore che rappresenta lo stato in una data base

#789: da una sostituzione con un altro stato, nella stessa base) sarà sostituito - nella base $\{e'_i\}$ - da $\tau|a\rangle$

#790: come 'ket' e da $\langle a|T$ come 'bra'; in pratica, per calcolare un valore di aspettazione di un'osservabile

#791: avendo eseguito la trasformazione T, procediamo come segue ['*' sta per il prodotto algebrico] :

#792: 1. si trasforma la matrice 'A' \rightarrow 'A' è sostituita da $\tau A T$;

#793: 2. si applica la trasf. inversa allo stato $|a\rangle \rightarrow \tau|a\rangle$ è sostituito da $\tau|a\rangle$;

#794: 3. si calcola il valore di aspettazione di $\tau A T$ per lo stato $\tau|a\rangle$ come prodotto del complesso coniuga-

#795: to di $\tau|a\rangle$ per $(\tau A T) \cdot (\tau|a\rangle)$.

#796: Esempi:

#797: sappiamo che $\langle \sigma_z \rangle$ è nullo per lo stato 'in'; allora lo deve essere in qualsiasi base. P.es.

#798: $\text{cong}(\text{in}) \cdot \sigma_z \cdot \text{in} = 0$

#799: se lo stato 'in' è rappresentato nella base [up, dn]; si ottiene lo stesso risultato sotto la trasforma-

#800: zione CBXY; 'in' è trasformato in CBYX*in e oz in oy

#801: $\text{cong}(\text{CBYX} \cdot \text{in}) \cdot \sigma_y \cdot \text{CBYX} \cdot \text{in}$

#802: 0

#803: eseguendo tutti i passaggi a partire da 'in' e da oz:

#804: $\text{cong}(\text{CBYX} \cdot \text{in}) \cdot \text{CBYX} \cdot \sigma_z \cdot \text{CBYX} \cdot \text{in}$

#805: 0

#806: _____

#807:

#808: TABELLA DEI CAMBIAMENTI DI BASE

#809:

#810:

stato	TRXZ = TRZX	TRYZ	TRZY	TRXY	TRYX
up	rt	in	rt	up	up
dn	lt	ou	$-\hat{i} \cdot \text{lt}$	$-\hat{i} \cdot \text{dn}$	$\hat{i} \cdot \text{dn}$
rt	up	up	$\left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right]$	ou	in
lt	dn	$\hat{i} \cdot \text{dn}$	$\left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2} \right]$	in	ou
in	$\left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right]$	up	rt	lt
ou	$\left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right]$	dn	lt	rt

#811:

#812: Per quanto riguarda la trasformazione diretta CBXY e inversa, abbiamo la seguente tabella

#813:

#814:

stato	CBXY	CBYX
rt = [1, 0]	$\text{in} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2} \right]$	$\text{ou} = \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right]$
lt = [0, 1]	$\text{ou} = \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right]$	$\text{in} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2} \right]$
$\text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$	$\text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$	$\text{up} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
$\text{dn} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$	$\hat{i} \cdot \text{dn} = \left[\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2}, -\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right]$	$-\hat{i} \cdot \text{dn} = \left[-\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right]$
$\text{in} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2} \right]$	lt = [0, 1]	rt = [1, 0]
$\text{ou} = \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{i}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{i}}{2} \right]$	rt = [1, 0]	lt = [0, 1]

#815:

#816: TRASFORMAZIONI DELLE MATRICI PER CAMBIAMENTO DI BASE

#817:

#818:

matrice	TRXZ = TRZX	TRYZ	TRZY	TRXY	TRYX
σ_z	σ_x	σ_x	σ_y	σ_z	σ_z
σ_x	σ_z	σ_y	σ_z	σ_y	$-\sigma_y$
σ_y	$-\sigma_y$	σ_z	σ_x	$-\sigma_x$	σ_x

#819: la colonna a sin. contiene le matrici da trasformare, le altre le trasformate.

#820:

#821: RELAZIONI TRA LE σ E I CAMBIAMENTI DI BASE

#822: Poiché le σ sono associate a direzioni ortogonali nello spazio, è presumibile che la relazione

#823: $\sigma_x \rightarrow \text{TRYZ}$; $\sigma_y \rightarrow \text{TRXZ}$; $\sigma_z \rightarrow \text{TRXY}$ implichi che le azioni delle σ e delle corrispondenti matrici di tra-

#824: sformazione siano identiche o strettamente correlate. In realtà il modo di operare di queste due classi

#825: di oggetti è affatto differente.

#826: Le seguenti tabelle riassumono le rispettive azioni.

#827:

#828:

σ_z	TRXY	TRYX
up \rightarrow up \wedge dn \rightarrow -dn	up \rightarrow up \wedge dn \rightarrow - i·dn	up \rightarrow up \wedge dn \rightarrow i·dn
rt \rightarrow lt	rt \rightarrow ou	rt \rightarrow in
lt \rightarrow rt	lt \rightarrow in	lt \rightarrow ou
in \rightarrow ou	in \rightarrow rt	in \rightarrow lt
ou \rightarrow in	ou \rightarrow lt	ou \rightarrow rt

#829:

σ_x	TRYZ	TRZY
up \rightarrow dn	up \rightarrow in	up \rightarrow rt
dn \rightarrow up	dn \rightarrow ou	dn \rightarrow - i·lt
rt \rightarrow rt	rt \rightarrow up	rt \rightarrow in (*)
lt \rightarrow -lt	lt \rightarrow i·dn	lt \rightarrow ou (*)
in \rightarrow i·ou	in \rightarrow rt (*)	in \rightarrow up
ou \rightarrow - i·in	ou \rightarrow lt (*)	ou \rightarrow dn

#830:

σ_y	TRXZ
up \rightarrow i·dn	up \rightarrow rt
dn \rightarrow - i·up	dn \rightarrow lt
rt \rightarrow - i·lt	rt \rightarrow up
lt \rightarrow i·rt	lt \rightarrow dn
in \rightarrow in	in \rightarrow ou (*)
ou \rightarrow -ou	ou \rightarrow in (*)

#831:

#832: ALGEBRA DI LIE DELLE MATRICI DI PAULI

#833: L'algebra di Lie associata alle σ è non abeliana, in quanto due σ distinte non commutano.

#834: $\sigma := [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$

#835: Introduciamo istruzioni per la delta di Kronecker e i simboli di Levi-Civita

#836:

```

delta(j, k) :=
  If j = k
    1
    0

```

#837:

```

segno(j, k) :=
  If (j = 1  $\wedge$  k = 2)  $\vee$  (j = 2  $\wedge$  k = 3)  $\vee$  (j = 3  $\wedge$  k = 1)
    1
    -1

```

#838:

```

levcv(j, k, m) :=
  If j = k  $\vee$  k = m  $\vee$  j = m
    0
    segno(j, k)

```

#839:

#840: Costruiamo la matrice dei prodotti.

#841:
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \cdot \sigma_x & \sigma_x \cdot \sigma_y & \sigma_x \cdot \sigma_z \\ \sigma_y \cdot \sigma_x & \sigma_y \cdot \sigma_y & \sigma_y \cdot \sigma_z \\ \sigma_z \cdot \sigma_x & \sigma_z \cdot \sigma_y & \sigma_z \cdot \sigma_z \end{bmatrix}$$

#842:
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

#843:

#844: Si può notare che le matrici della diagonale principale sono uguali alla matrice identità I2, mentre le

#845: altre sono uguali alla rispettiva trasposta coniugata. Ciò corrisponde alla regola

#846:
$$\sigma_{j \ k} \cdot \sigma_{k \ j} = \text{CONJ}(\sigma_{k \ j} \cdot \sigma_{j \ k})$$

#847:

#848: Il prodotto di due matrici σ è uguale alla matrice identica I2 se hanno lo stesso indice, altrimenti è

#849: uguale a $\pm i$ per la terza matrice, prendendo il segno '+' se j precede k secondo l'ordine ciclico

#850: 1, 2, 3, 1... e il segno '-' nel caso contrario.

#851: In simboli,

#852:
$$\sigma_{j \ k} \cdot \sigma_{k \ m} = i \cdot \sigma_{j \ m}$$

#853: con tutti e tre gli indici diversi tra di loro, e j che precede k secondo l'ordine ciclico.

#854:

#855: Parentesi di commutazione

#856:
$$\text{COM}(u, v) := u \cdot v - v \cdot u$$

#857: Evidentemente, per ogni j $\text{COM}(\sigma_j, \sigma_j) = 0$ (NILPOTENZA); devono essere verificate anche la bilinearità e

#858: l'identità di Jacobi - v. dopo.

#859: Costruiamo il quadro di tutti i commutatori $[\sigma_j, \sigma_k]$:

#860:
$$\text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\text{com}(\sigma_j, \sigma_k), k, 1, 3), j, 1, 3)$$

#861:
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \cdot i & 0 \\ 0 & -2 \cdot i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 \cdot i & 0 \\ 0 & 2 \cdot i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \cdot i \\ 2 \cdot i & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -2 \cdot i \\ -2 \cdot i & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

#862: Il commutatore $[\sigma_j, \sigma_k]$ è nell'incrocio della riga j con la colonna k; i termini non appartenenti alla

#863: diagonale principale sono l'uno il trasposto coniugato dell'altro, e si trasformano l'uno nell'altro

#864: invertendo i segni dei loro elementi corrispondenti.

#865: In base alla regola del prodotto, le parentesi di commutazione soddisfano l'identità:

#866:
$$\text{com}(\sigma_j, \sigma_k) = \pm 2 \cdot i \cdot \sigma_m$$

#867: con j, k, m diversi tra di loro; se j = k si ottiene la matrice nulla. Il segno è '+' se j precede k

#868: nell'ordine ciclico, altrimenti è '-'; m è il terzo indice.

#869: Da questa regola deriva

#870:
$$\text{com}(\sigma_j, \sigma_k) + \text{com}(\sigma_k, \sigma_j) = 0$$

#871: Una semplice regola per il calcolo dei commutatori delle σ si ottiene impiegando i simboli ϵ_{jkm} di

#872: Levi-Civita:

#873: $[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{j,k,m}\sigma_m$, applicando la convenzione di somma a m

#874: Si può applicare la funzione seguente:

#875: $\text{COM2}(j, k) := 2 \cdot i \cdot \sum_{m=1}^3 \text{levcv}(j, k, m) \cdot \sigma_m$

#876: da cui otteniamo

#877: $\text{COM2}(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 \cdot i & 0 \\ 0 & -2 \cdot i \end{bmatrix} \wedge \text{COM2}(2, 3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \cdot i \\ 2 \cdot i & 0 \end{bmatrix} \wedge \text{COM2}(3, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

#878: in accordo con la tabella precedentemente ottenuta eseguendo i calcoli per ogni commutatore.

#879: Invertendo l'ordine degli indici si ottengono i trasposti coniugati.

#880:

#881: Parentesi di anticommutazione

#882: L'anticommutatore per def. è dato da

#883: $\text{ANTICOMMUTATORE}(u, v) := u \cdot v + v \cdot u$

#884: Costruiamo il quadro degli anticommutatori:

#885: $\text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\sigma_j \cdot \sigma_k + \sigma_k \cdot \sigma_j, k, 1, 3), j, 1, 3)$

#886:
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

#887: Solo gli elementi della diagonale principale sono non nulli; questo perché i prodotti tra due matrici σ

#888: hanno segni opposti se si scambiano tra di loro i rispettivi indici.

#889: L'anticomm. $\{\sigma_j, \sigma_k\}$ si può calcolare con la seg. funzione:

#890: $\text{ANTICOM}(j, k) := 2 \cdot \delta(j, k) \cdot I2$

#891:

#892: Possiamo ricalcolare tutti i prodotti tra due matrici σ sommando commutatori e anticommutatori; poniamo

#893: $\sigma_j \cdot \sigma_k = \text{pr}\sigma(j, k)$

#894: $\text{pr}\sigma(j, k) := \frac{1}{2} \cdot (\text{COM2}(j, k) + \text{ANTICOM}(j, k))$

#895: $\text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\text{pr}\sigma(j, k), k, 1, 3), j, 1, 3)$

#896:
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

#897: $\sigma_j \cdot \sigma_k$ si trova all'incrocio della riga j con la colonna k .

#898:

#899: Per il prodotto di due matrici di Pauli si può applicare anche la seguente identità:

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{j,k} \cdot I2 + i \cdot \epsilon_{j,k,m} \sigma_m$$

#900: [con la conv. di somma su m] che possiamo tradurre nella funzione $\sigma\sigma2$:

$$\#901: \sigma\sigma2(j, k) := \delta\delta(j, k) \cdot I2 + \hat{i} \cdot \sum_{m=1}^3 \text{levcv}(j, k, m) \cdot \sigma_m$$

#902: Infatti:

$$\#903: \text{pr}\sigma(j, k) - \sigma\sigma2(j, k)$$

$$\#904: \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#905: es.

$$\#906: \sigma\sigma2(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I2$$

$$\#907: \sigma\sigma2(3, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{i} \cdot \sigma_y$$

$$\#908: \sigma\sigma2(3, 2) = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{i} \\ -\hat{i} & 0 \end{bmatrix} = -\hat{i} \cdot \sigma_x$$

#909:

#910: Le matrici σ costituiscono un gruppo che soddisfa un'algebra di Lie; vale quindi la

#911: PROPRIETA' DI BILINEARITA'

$$\#912: [\alpha \cdot \sigma_x + \beta \cdot \sigma_y, \sigma_z] = \alpha \cdot [\sigma_x, \sigma_z] + \beta \cdot [\sigma_y, \sigma_z] \text{ e } [\sigma_z, \alpha \cdot \sigma_x + \beta \cdot \sigma_y] = \alpha \cdot [\sigma_z, \sigma_x] + \beta \cdot [\sigma_z, \sigma_y]$$

#913: Infatti, confrontando i rispettivi elementi termine a termine otteniamo:

$$\#914: \text{COM}(\alpha \cdot \sigma_x + \beta \cdot \sigma_y, \sigma_z) = \alpha \cdot \text{COM}(\sigma_x, \sigma_z) + \beta \cdot \text{COM}(\sigma_y, \sigma_z)$$

$$\#915: \begin{bmatrix} 0 = 0 & -2 \cdot \alpha + 2 \cdot \hat{i} \cdot \beta = -2 \cdot \alpha + 2 \cdot \hat{i} \cdot \beta \\ 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \hat{i} \cdot \beta = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \hat{i} \cdot \beta & 0 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\#916: \text{COM}(\sigma_z, \alpha \cdot \sigma_x + \beta \cdot \sigma_y) = \alpha \cdot \text{COM}(\sigma_z, \sigma_x) + \beta \cdot \text{COM}(\sigma_z, \sigma_y)$$

$$\#917: \begin{bmatrix} 0 = 0 & 2 \cdot \alpha - 2 \cdot \hat{i} \cdot \beta = 2 \cdot \alpha - 2 \cdot \hat{i} \cdot \beta \\ -2 \cdot \alpha - 2 \cdot \hat{i} \cdot \beta = -2 \cdot \alpha - 2 \cdot \hat{i} \cdot \beta & 0 = 0 \end{bmatrix}$$

#918:

#919: Vale inoltre l'IDENTITA' DI JACOBI

$$\#920: [\sigma_j, [\sigma_k, \sigma_m]] + [\sigma_k, [\sigma_m, \sigma_j]] + [\sigma_m, [\sigma_j, \sigma_k]] = 0$$

#921: ['0' = matrice nulla]

#922: che possiamo verificare ponendo $j = x, k = y, m = z$; per gli altri casi non vi è bisogno di verifica,

#923: perché spostando gli indici di una unità ($j = y, k = z, m = x$) si sommano gli stessi termini:

$$\#924: \text{com}(\sigma_x, \text{com}(\sigma_y, \sigma_z)) + \text{com}(\sigma_y, \text{com}(\sigma_z, \sigma_x)) + \text{com}(\sigma_z, \text{com}(\sigma_x, \sigma_y))$$

$$\#925: \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#926:

#927: RELAZIONE CON I QUATERNIONI

#928: La corrispondenza con l'algebra dei quaternioni è un omomorfismo iniettivo dall'insieme dei quaternioni

#929: a quello delle matrici 2x2 sul campo dei numeri complessi.

#930: Infatti i quadrati delle unità immaginarie sono uguali a -1, come il prodotto di due matrici σ multi-

#931: plicate ciascuna per l'unità immaginaria \hat{i} è uguale a -I2; il prodotto di due un. immaginarie distinte

#932: nell'ordine ciclico $\hat{i} \rightarrow 1, j \rightarrow 2, k \rightarrow 3$ è uguale alla terza, o alla terza preceduta dal segno negativo

#933: se si inverte l'ordine dei fattori: $\hat{i} \cdot j = k, j \cdot \hat{i} = -k$ ecc. L'insieme delle regole di calcolo dei qua-

#934: ternioni corrisponde a quello del prodotto di due matrici σ :

#935:

$$\#936: \hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1$$

$$\#937: \hat{j} \cdot \hat{i} = -\hat{i} \cdot \hat{j} \wedge \hat{k} \cdot \hat{j} = -\hat{j} \cdot \hat{k} \wedge \hat{i} \cdot \hat{k} = -\hat{k} \cdot \hat{i}$$

$$\#938: \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \wedge \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{j}$$

$$\#939: \sigma_j^2 = I2 \rightarrow (\pm \hat{i} \cdot \sigma_j)^2 = -I2$$

$$\#940: \hat{j} \neq \hat{k} \rightarrow \sigma_j \cdot \sigma_k = -\sigma_k \cdot \sigma_j$$

#941: Disponendo le unità immaginarie e le matrici in una biiezione $\hat{i} \rightarrow \sigma_x, \hat{j} \rightarrow \sigma_y, \hat{k} \rightarrow \sigma_z$, la sostituzione

#942: $p \rightarrow -\hat{i} \cdot \sigma$, dove 'p' è una delle unità immaginarie e σ la corrispondente immagine, fornisce la regola del

#943: prodotto di due matrici scritte rispettando l'ordine ciclico senza inversioni:

$$\#944: \hat{j} \neq \hat{k} \neq \hat{m} \rightarrow (-\hat{i} \cdot \sigma_j) \cdot (-\hat{i} \cdot \sigma_k) = -\hat{i} \cdot \sigma_m \rightarrow \sigma_j \cdot \sigma_k = \hat{i} \cdot \sigma_m$$

#945: I prodotti tra due unità immaginarie p, q in ordine ciclico sono dati da (conv. di somma su r)

$$p \cdot q = -\delta_{p,q} \cdot 1 + \varepsilon_{p,q,r} r$$

#946: ['1' è l'unità reale dei quaternioni]

#947: che ha struttura simile, ma non identica, al prodotto di due matrici in ordine ciclico σ_j e σ_k

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{j,k} \cdot I2 + i \cdot \varepsilon_{j,k,m} \sigma_m$$

#948: [conv. di somma per l'indice m]

#949: Partendo dalle σ si ottiene un'identità tra le due algebre per il prodotto se dati j k m e p q r nello

#950: stesso ordine (anche inverso) si effettuano le sostituzioni

$$\#951: I2 \rightarrow 1$$

$$\#952: \sigma_j \rightarrow \hat{i} \cdot p$$

$$\#953: \sigma_k \rightarrow \hat{i} \cdot q$$

$$\#954: \sigma_m \rightarrow \hat{i} \cdot r$$

#955: per avere la regola del prodotto di due unità immaginarie:

$$-p \cdot q = \delta_{p,q} \cdot 1 - \varepsilon_{p,q,r} \cdot r$$

$$p \cdot q = -\delta_{p,q} \cdot 1 + \varepsilon_{p,q,r} \cdot r$$

#956: [conv. di somma per l'indice r]

#957:

#958: Vediamo il prodotto di tre matrici di Pauli distinte secondo l'ordine senza inversione

$$\#959: \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z = \sigma_z \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y = \sigma_y \cdot \sigma_z \cdot \sigma_x = \begin{bmatrix} \hat{i} & 0 \\ 0 & \hat{i} \end{bmatrix} = \hat{i} \cdot I2$$

#960: Convertendo i tre prodotti in quaternioni abbiamo, rispettando l'ordine ciclico p q r p...,

$$ip \cdot iq \cdot ir = i^3 \cdot pqr = -i \cdot pqr = -i \cdot (-1) = i$$

#961: dove si è applicata l'identità $ijk = -1$ per il prodotto delle tre unità immaginarie; il risultato,

#962: inteso come $\hat{i} \cdot 1$, corrisponde a $\hat{i} \cdot I2$.

#963: Viceversa, si può verificare l'identità tra le algebre delle σ e dei quaternioni deducendo dall'ultima

#964: catena di uguaglianze che tale identità implica $pqr = -1$, coerentemente con l'algebra dei quaternioni.

#965: [La corrispondenza tra le due algebre è un omomorfismo iniettivo da H all'insieme delle combinazioni

#966: lineari a coefficienti reali delle σ . Infatti vi sono due trasformazioni che conservano la struttura di

#967: prodotto; oltre a quella esaminata sopra, abbiamo la sostituzione ad essa coniugata

$\sigma_j \rightarrow -i \cdot p = i \cdot (-p)$
#968: j

#969: con $j = 1, 2, 3$ e $p = i, j, k$ che conduce a

$$-p \cdot q = \delta_{p,q} \cdot 1 + \varepsilon_{p,q,r} \cdot r$$

$$(-p) \cdot (-q) = -\delta_{p,q} \cdot 1 + \varepsilon_{p,q,r} \cdot (-r)$$

#970: Le terne immaginarie $[p, q, r]$ e $[-p, -q, -r]$ conservano entrambe la struttura del prodotto di due σ ;

#971: il passaggio inverso avviene solo con una trasformazione

$p \rightarrow -i \cdot \sigma_j$
#972: j

#973: dalla quale otteniamo il corretto prodotto di due σ

$$-\sigma_j \cdot \sigma_k = -\delta_{j,k} \cdot I2 - i\varepsilon_{j,k,m} \cdot \sigma_m$$

#974: Invece la trasformazione coniugata

$p \rightarrow i \cdot \sigma_j$
#975: j

#976: implica

$$-\sigma_j \cdot \sigma_k = -\delta_{j,k} \cdot I2 + i\varepsilon_{j,k,m} \cdot \sigma_m$$

#977: che inverte il segno del termine contenente σ_m

#978:

#979: Aggiungendo all'insieme delle σ la matrice $I2$, si ottiene una biiezione tra l'insieme 'H' dei quater-

#980: nioni di norma 1 e l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti reali di base $\{I2, \sigma\}$, tale che

#981: ad ogni $q \in H$ unitario associa una e una sola matrice 2×2 con determinante 1 data dalla somma di $\alpha \cdot I2$

#982: e di una matrice anti-hermitiana definita da tre parametri reali β, γ, δ :

$$\#983: \alpha \cdot 1 + \beta \cdot i + \gamma \cdot j + \delta \cdot k \rightarrow \alpha \cdot I2 - \beta \cdot i \cdot \sigma_x - \gamma \cdot i \cdot \sigma_y - \delta \cdot i \cdot \sigma_z = \alpha \cdot I2 - i \cdot [\beta, \gamma, \delta] \cdot \sigma = \begin{bmatrix} \alpha - i \cdot \delta & -\gamma - i \cdot \beta \\ \gamma - i \cdot \beta & \alpha + i \cdot \delta \end{bmatrix}$$

#984: sotto le condizioni $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$;

$$\#985: \text{DET} \begin{bmatrix} \alpha - i \cdot \delta & -\gamma - i \cdot \beta \\ \gamma - i \cdot \beta & \alpha + i \cdot \delta \end{bmatrix} = 1$$

#986: Indicando con 'cq' il coniugato di 'q' abbiamo

#987: $cq :=$

$$\#988: |q| = \sqrt{(cq \cdot q)} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \gamma^2)}$$

#989: Se 'q' $\in H$ è unitario, il coniugato e il reciproco coincidono; quindi la matrice associata a entrambi è

#990: l'inversa di $\alpha \cdot I2 - i \cdot [\beta, \gamma, \delta] \cdot \sigma$. Data la sua struttura di numero complesso, la determiniamo mediante

#991: le regole dell'algebra dei numeri complessi, quindi la matrice cercata si ottiene con la trasformazione

$$\#992: \alpha \cdot I2 - i \cdot [\beta, \gamma, \delta] \cdot \sigma \rightarrow \alpha \cdot I2 + i \cdot [\beta, \gamma, \delta] \cdot \sigma = \begin{bmatrix} \alpha + i \cdot \delta & \gamma + i \cdot \beta \\ -\gamma + i \cdot \beta & \alpha - i \cdot \delta \end{bmatrix}$$

#993: Infatti

$$\#994: \begin{bmatrix} \alpha - i \cdot \delta & -\gamma - i \cdot \beta \\ \gamma - i \cdot \beta & \alpha + i \cdot \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha + i \cdot \delta & \gamma + i \cdot \beta \\ -\gamma + i \cdot \beta & \alpha - i \cdot \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \gamma^2 \end{bmatrix} = I2$$

#995: per la condizione $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$; inoltre,

$$\#996: cq \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + i \cdot \delta & \gamma + i \cdot \beta \\ -\gamma + i \cdot \beta & \alpha - i \cdot \delta \end{bmatrix}$$

#997: Le matrici associate ai quaternioni unitari sono quindi unitarie e il loro insieme coincide con $SU(2)$.

#998:

#999: COSTRUZIONE DI UNA BASE DI SU(2)

#1000: L'insieme delle matrici speciali unitarie (tali che l'inversa coincide con la trasposta coniugata e il

#1001: determinante è uguale a 1) ad elementi complessi e di ordine 2 costituisce un gruppo, convenzionalmente

#1002: SU(2), al quale è associata un'algebra di Lie su R della quale le matrici σ moltiplicate per l'unità

#1003: immaginaria i ne costituiscono la base.

#1004: Cerchiamo la forma generale di una matrice di SU(2); denotiamo con a, b, c, d i suoi elementi.

#1005: Cominciamo dimostrando che i quadrati dei valori assoluti degli elementi di una generica matrice di

#1006: SU(2) dipendono da un parametro reale τ .

#1007: La condizione di unitarietà

$$\#1008: \begin{bmatrix} \text{CONJ}(a) & \text{CONJ}(c) \\ \text{CONJ}(b) & \text{CONJ}(d) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#1009: implica

$$\#1010: \begin{bmatrix} |a|^2 + |c|^2 & b \cdot \text{CONJ}(a) + d \cdot \text{CONJ}(c) \\ a \cdot \text{CONJ}(b) + c \cdot \text{CONJ}(d) & |b|^2 + |d|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#1011: Per determinare a, b, c, d si deve risolvere il sistema

$$\#1012: |a|^2 + |c|^2 = 1$$

$$\#1013: b \cdot \text{CONJ}(a) + d \cdot \text{CONJ}(c) = 0$$

$$\#1014: a \cdot \text{CONJ}(b) + c \cdot \text{CONJ}(d) = 0$$

$$\#1015: |b|^2 + |d|^2 = 1$$

$$\#1016: a \cdot d - b \cdot c = 1$$

#1017: [l'ultima è la condizione sul determinante]

#1018: La terza è la coniugata della seconda, per cui può essere ignorata.

#1019: Dalla seconda deduciamo

$$\#1020: \frac{\text{CONJ}(c)}{\text{CONJ}(a)} = -\frac{b}{d} \rightarrow \text{CONJ}(c) = \lambda \cdot \text{CONJ}(a) \wedge b = -\lambda \cdot d$$

#1021: dove $\lambda \in \mathbb{C}$; ne segue che

$$\#1022: |c|^2 = |\lambda|^2 \cdot |a|^2 \wedge |b|^2 = |\lambda|^2 \cdot |d|^2$$

#1023: Sostituendo nella prima e nella quarta a $|c|^2$ e a $|b|^2$ le loro espressioni a secondo membro e ponendo

#1024: $|\lambda| = \tau$ otteniamo

$$\#1025: |a|^2 = |d|^2 = \frac{1}{1 + \tau^2}$$

#1026: e, sostituendo $|a|^2$ e $|d|^2$ ancora nella prima e nella quarta,

$$\#1027: |b|^2 = |c|^2 = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2}$$

#1028: Il determinante $a \cdot d - b \cdot c$ deve essere uguale a 1; dato che

$$\#1029: |a \cdot d| = |a| \cdot |d| = \frac{1}{1 + \tau^2} \wedge |b \cdot c| = |b| \cdot |c| = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2}$$

#1030: otteniamo

$$\#1031: |a \cdot d| + |b \cdot c| = 1$$

#1032:e, per confronto con la condizione sul determinante,

$$\#1033:a \cdot d - b \cdot c = |a \cdot d| + |b \cdot c|$$

#1034:Introduciamo i fattori di fase φ e x , risp. somma delle fasi di a e d , e di b e c ; allora

$$\#1035:a \cdot d = |a \cdot d| \cdot \hat{e}^{i \cdot \varphi} \wedge b \cdot c = |b \cdot c| \cdot \hat{e}^{i \cdot x}$$

$$\#1036:|a \cdot d| \cdot \hat{e}^{i \cdot \varphi} - |b \cdot c| \cdot \hat{e}^{i \cdot x} = |a \cdot d| + |b \cdot c|$$

#1037:che conduce alle condizioni $\varphi = 0$ e $x = \pi$.

#1038:La soluzione più semplice è che b e c abbiano fase 0 e π rispettivamente, o $\pi/2$ entrambi, per cui nel

#1039:secondo caso abbiamo

$$\#1040:b = |b| \cdot \hat{e}^{i \cdot \pi/2} = i \cdot |b| \wedge c = i \cdot |c|$$

#1041:Per a e d , $\varphi = 0$ implica che entrambi abbiano fasi nulle, per cui sono reali e positivi, od opposte;

#1042:p. es. π e $-\pi$, e in tal caso sono entrambi reali e negativi, o $\pi/2$ e $-\pi/2$ ecc.

#1043:[in alternativa, φ potrebbe essere 2π , per cui a e d avrebbero fase π , cioè $a = -|a|$ e $d = -|d|$; x po-

#1044:trebbe essere $-\pi$, $b = -i \cdot |b|$ e $c = -i \cdot |c|$. Queste varianti non sono significative, come non lo è lo

#1045:scambio tra a e d , o tra b e c .]

#1046:Il parametro τ può essere scelto in modo arbitrario, dato che qualunque suo valore soddisfa la condi-

#1047:zione sul determinante; possiamo interpretarlo come tangente di un angolo φ .

#1048:Poniamo $\varphi = 0 \rightarrow \tau = 0$; indicando con θ la fase di a , abbiamo

$$\#1049:\tau = 0 \rightarrow a = \hat{e}^{i \cdot \theta} \wedge d = \hat{e}^{-i \cdot \theta}$$

#1050:e troviamo una prima soluzione

$$\#1051:ROT1(\theta) := \begin{bmatrix} \hat{e}^{i \cdot \theta} & 0 \\ 0 & \hat{e}^{-i \cdot \theta} \end{bmatrix}$$

#1052:

#1053:Se τ non è nullo e uguale a $\tan(\varphi)$ otteniamo

$$\#1054:|a|^2 = |d|^2 = \cos^2(\varphi) \wedge |b|^2 = |c|^2 = \sin^2(\varphi)$$

#1055:Si trovano più matrici che soddisfano queste condizioni e quella sul determinante; p. es.

#1056:

$$\#1057:ROT2(\varphi) := \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

#1058:

$$\#1059:ROT3(x) := \begin{bmatrix} \cos(x) & i \cdot \sin(x) \\ i \cdot \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

#1060:

#1061:che soddisfano rispettivamente le condizioni sulla somma dei fattori di fase di b e c , uguale a π per

#1062:ROT2 e per ROT3. Per ottenere ROT2, imponiamo che le fasi di b e c siano π e 0 rispettivamente (o vi-

#1063:ceversa, ma è inessenziale); per ottenere ROT3, che siano entrambe uguali a $\pi/2$, in accordo con quanto

#1064:già stabilito in precedenza.

#1065:Otteniamo rispettivamente, nel primo caso, che b e c abbiano segni opposti (non importa quale sia il

#1066:segno di uno dei due); nel secondo, che entrambi siano immaginari puri uguali ai moduli moltiplicati

#1067:per $\pm i$, non importa se il segno sia '+' o '-'.

#1068:

#1069:

#1070:FORMA GENERALE DI UNA MATRICE DI SU(2)

#1071:La forma generale di una matrice SU(2) come prodotto delle tre matrici ROT è

#1072:ROT1(θ)·ROT2(φ)·ROT3(x)

#1073:Sviluppiamo i calcoli:

#1074:

$$\#1075: \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(x) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(x) + i \cdot (\cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(x) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(x)) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(x) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(x) + i \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(x) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(x)) \\ - \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(x) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(x) + i \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(x) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(x)) \\ \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(x) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(x) + i \cdot (\sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(x) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(x)) \end{bmatrix}$$

#1076:

#1077:[le quattro righe corrispondono nell'ordine ad a, b, c e d]

#1078:Ponendo:

$$\#1079: \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(x) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(x) = \alpha$$

$$\#1080: \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(x) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(x) = \kappa$$

$$\#1081: \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(x) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(x) = \beta$$

$$\#1082: \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(x) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(x) = \lambda$$

#1083:otteniamo la generale matrice SU(2):

#1084:

$$\#1085: \begin{bmatrix} \alpha + i \cdot \kappa & \beta + i \cdot \lambda \\ -\beta + i \cdot \lambda & \alpha - i \cdot \kappa \end{bmatrix}$$

#1086:unitaria, anti-hermitiana, contenente quattro parametri reali vincolati dal determinante = 1:

$$\#1087: \alpha^2 + \kappa^2 + \beta^2 + \lambda^2 = 1$$

#1088:il che implica che ogni elemento di SU(2) è in corrispondenza biunivoca con i punti della superficie di

#1089:una ipersfera di equazione cartesiana $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 1$ e con l'insieme dei quaternioni unitari

$$\#1090: \left[\begin{matrix} q / q = \alpha \cdot 1 + \kappa \cdot i + \beta \cdot j + \lambda \cdot k \end{matrix} \right].$$

#1091:L'inversa è la trasposta coniugata (unitarietà)

$$\#1092: \begin{bmatrix} \alpha - i \cdot \kappa & -\beta - i \cdot \lambda \\ \beta - i \cdot \lambda & \alpha + i \cdot \kappa \end{bmatrix}$$

$$\#1093: \begin{bmatrix} \alpha + i \cdot \kappa & \beta + i \cdot \lambda \\ -\beta + i \cdot \lambda & \alpha - i \cdot \kappa \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha - i \cdot \kappa & -\beta - i \cdot \lambda \\ \beta - i \cdot \lambda & \alpha + i \cdot \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 + \kappa^2 + \lambda^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 + \kappa^2 + \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#1094:per la condizione sul determinante.

#1095:

#1096:SU(2) ha la struttura di gruppo rispetto al prodotto. Moltiplicando due matrici di SU(2) si ottiene an-

#1097:cora una matrice di SU(2):

$$\#1098: \begin{bmatrix} \alpha + i \cdot \kappa & \beta + i \cdot \lambda \\ -\beta + i \cdot \lambda & \alpha - i \cdot \kappa \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma + i \cdot \mu & \delta + i \cdot \nu \\ -\delta + i \cdot \nu & \gamma - i \cdot \mu \end{bmatrix}$$

$$\#1099: \begin{bmatrix} \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta - \kappa \cdot \mu - \lambda \cdot \nu + i \cdot (\alpha \cdot \mu + \beta \cdot \nu - \delta \cdot \lambda + \gamma \cdot \kappa) & \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma - \kappa \cdot \nu + \lambda \cdot \mu + i \cdot (\alpha \cdot \nu - \beta \cdot \mu + \delta \cdot \kappa + \gamma \cdot \lambda) \\ -\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma + \kappa \cdot \nu - \lambda \cdot \mu + i \cdot (\alpha \cdot \nu - \beta \cdot \mu + \delta \cdot \kappa + \gamma \cdot \lambda) & \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta - \kappa \cdot \mu - \lambda \cdot \nu - i \cdot (\alpha \cdot \mu + \beta \cdot \nu - \delta \cdot \lambda + \gamma \cdot \kappa) \end{bmatrix}$$

#1100:

#1101:La dimensione di una matrice di SU(2) è tre, ma il numero delle equazioni indipendenti del sistema le

#1102:cui soluzioni elementari sono le tre matrici ROT è quattro. Indaghiamo l'origine di questa apparente

#1103:contraddizione.

#1104:Tutte le matrici di SU(2) sono soluzioni del sistema col quale calcolare le matrici ROT, che sono le

#1105:basi; dalle tre equazioni indipendenti esclusa la condizione del determinante si deducono tre vincoli

#1106:sui valori assoluti:

$$\#1107: |a| = |d| \wedge |b| = |c| \wedge |a \cdot d| + |b \cdot c| = 1$$

#1108:che riducono a uno il numero dei moduli di valore arbitrario - p. es., quello di 'a'.

#1109:Due angoli di fase (quelli di 'd' e 'c') dipendono rispettivamente da quelli di 'a' e 'b' per derivare

$$\#1110: a \cdot d - b \cdot c = |a \cdot d| + |b \cdot c| = 1$$

#1111:per cui le equazioni indipendenti si riducono a tre se due delle fasi sono vincolate e due sono varia-

#1112:bili arbitrarie; perciò abbiamo tre parametri liberi (un valore assoluto e due angoli) per determinare

#1113:una matrice di SU(2), in accordo con la dimensione di una matrice di SU(n) che è $n^2 - 1$.

#1114:Ogni matrice di SU(2) si può scrivere anche nella forma

$$\#1115: \begin{bmatrix} |a| \cdot \hat{e}^{i \cdot \theta} & \sqrt{(1 - |a|^2)} \cdot \hat{e}^{i \cdot \varphi} \\ \sqrt{(1 - |a|^2)} \cdot \hat{e}^{i \cdot (\pi - \varphi)} & |a| \cdot \hat{e}^{-i \cdot \theta} \end{bmatrix}$$

$$\#1116: \text{DET} \begin{bmatrix} |a| \cdot \hat{e}^{i \cdot \theta} & \sqrt{(1 - |a|^2)} \cdot \hat{e}^{i \cdot \varphi} \\ \sqrt{(1 - |a|^2)} \cdot \hat{e}^{i \cdot (\pi - \varphi)} & |a| \cdot \hat{e}^{-i \cdot \theta} \end{bmatrix}$$

$$\#1117: \quad \quad \quad 1$$

#1118:GENERATORI DI SU(2) E MATRICI DI PAULI (1)

#1119:Per ottenere i generatori del gruppo SU(2), dobbiamo costruirne lo SPAZIO TANGENTE, cioè l'insieme di

#1120:tutte le matrici 2x2 hermitiane e a traccia nulla tali che, detta H una qualsiasi di queste, la matrice

#1121:K di SU(2) da essa generata sia data da

$$K = e^{iH}$$

#1122:Ogni elemento 'S' di SU(2) è dato da

$$S = e^{i \sum_{j=1}^3 \alpha_j H_j}$$

#1123:dove le α_j sono costanti reali e le H_j i generatori, con $j \in [1, 2, 3]$.

#1124:

#1125:I generatori del gruppo SU(2) si ottengono calcolando nel punto 0 le derivate delle matrici base, che

#1126:nel nostro caso sono le ROT:

#1127:

$$\#1128: \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \cos(x) & i \cdot \sin(x) \\ i \cdot \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x) & i \cdot \cos(x) \\ i \cdot \cos(x) & -\sin(x) \end{bmatrix}$$

#1129:

$$\#1130: \frac{d}{d\varphi} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

#1131:

$$\#1132: \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} i \cdot \theta & 0 \\ 0 & -i \cdot \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \cdot (2 \cdot \theta + \pi) / 2 & 0 \\ 0 & -i \cdot (2 \cdot \theta + \pi) / 2 \end{bmatrix}$$

#1133:

#1134:Annullando gli angoli x , φ , θ otteniamo tre matrici anti-hermitiane a traccia nulla e determinante = 1

#1135:

$$\#1136: u1 := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\#1137: u2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\#1138: u3 := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

#1139:

#1140: Dividendo i tre generatori ottenuti per l'unità immaginaria i , otteniamo le tre matrici σ , hermitiane e

#1141: con determinante $= -1$.

#1142:

$$\#1143: \frac{\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}}{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

$$\#1144: \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}{i} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

$$\#1145: \frac{\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}}{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

#1146: [Questo passaggio non è matematicamente necessario, ma le matrici di Pauli svolgono una parte essenzia-

#1147: le in Fisica]

#1148: Tra le matrici σ , la generatrice della rotazione nel piano in senso proprio, cioè ROT2, è σ_y .

$$\#1149: \begin{bmatrix} \sigma_z & \text{ROT1} \\ \sigma_y & \text{ROT2} \\ \sigma_x & \text{ROT3} \end{bmatrix}$$

#1150:

#1151: GENERATORI DI SU(2) E MATRICI DI PAULI (2)

#1152: ROT(x) :=

#1153: [ROT(θ) denota una delle matrici ROT1(θ), ROT2(ϕ), ROT3(x)]

#1154: Osup(x) :=

#1155: [per denotare la somma di termini di ordine superiore all'infinitesimo 'x']

#1156: E' possibile dimostrare che le σ sono le generatrici di SU(2) direttamente, grazie alla relazione che

#1157: hanno con le trasformazioni ROT infinitesime. Inoltre, sappiamo che

$$\#1158: \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z = e$$

#1159: Supponiamo di operare in una delle ROT la sostituzione

$$\#1160: \theta \rightarrow \frac{\theta}{n}$$

#1161: con 'n' grande a piacere, per cui

$$\#1162: \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \text{Osup}\left(\frac{\theta}{n}\right) \wedge \sin\left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + \text{Osup}\left(\frac{\theta}{n}\right)$$

#1163: Al tendere di n a $+\infty$, $\cos(\theta/n) \rightarrow 1$ e $\sin(\theta/n)$ può essere approssimato da $\delta = \theta/n$; per cui le tre matri-

#1164: ci ROT, trascurando i termini di ordine superiore a θ/n , tendono asintoticamente a

$$\#1165: \begin{bmatrix} 1 + i\delta & 0 \\ 0 & 1 - i\delta \end{bmatrix} = I2 + \frac{i\theta}{n} \cdot \sigma_z$$

$$\#1166: \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} = I2 + \frac{i\theta}{n} \cdot \sigma_y$$

$$\#1167: \begin{bmatrix} 1 & i\delta \\ i\delta & 1 \end{bmatrix} = I2 + \frac{i\theta}{n} \cdot \sigma_x$$

#1168: La forma generale delle tre trasformazioni infinitesime è

$$\#1169: I2 + \frac{i\theta}{n} \cdot \sigma_j$$

#1170: Poiché le matrici ROT soddisfano la condizione

$$\#1171: \text{ROT}(\theta + \varphi) = \text{ROT}(\theta) \cdot \text{ROT}(\varphi) \rightarrow \text{ROT}(\theta) = \text{ROT}\left(\frac{\theta}{n}\right)^n$$

#1172: ognuna di esse è approssimabile - trascurando termini di ordine superiore a θ/n - da

$$\#1173: \left(I2 + \frac{i\sigma \cdot \theta}{n} \right)^n$$

#1174: ed è esattamente equivalente al

$$\#1175: \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I2 + \frac{i\sigma \cdot \theta}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(I2 + \frac{i\sigma \cdot \theta}{n} \right)^{n/(i\theta \cdot \sigma)} \right)^{i\theta \cdot \sigma}$$

#1176: Invertendo l'ordine delle operazioni di potenza e di limite abbiamo

$$\#1177: \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I2 + \frac{i\sigma \cdot \theta}{n} \right)^{n/(i\theta \cdot \sigma)} \right)^{i\theta \cdot \sigma}$$

#1178: e sostituendo

$$\#1179: \frac{n}{i\theta \cdot \sigma} \rightarrow z \wedge \frac{i\sigma \cdot \theta}{n} \rightarrow \frac{1}{z}$$

#1180: otteniamo infine

$$\#1181: \left(\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^{i\theta \cdot \sigma} = e^{i\theta \cdot \sigma}$$

#1182: Ogni matrice S di SU(2) è il prodotto delle tre ROT, per cui - sostituendo a θ i rispettivi angoli α_j -

#1183: otteniamo

#1184:

$$\#1185: S = e^{i\alpha \cdot \sigma}$$

#1186: [conv. di somma su j]

#1187:

#1188: GENERATORI DI SU(2) E MATRICI DI PAULI (3)

#1189: E' possibile derivare la connessione tra SU(2) e le σ direttamente, a partire dalle tre matrici ROT, in

#1190: base alla formula di Eulero

$$\#1191: e^{i \cdot z} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$$

$$\#1192: \cos(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot z^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!}$$

$$\#1193: i \cdot \sin(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(i \cdot z)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!}$$

#1194: Le matrici ROT si possono scomporre nella somma di due matrici

#1195: $\text{MAT}(x) :=$

$$\#1196: \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} + \text{MAT}(\sin(\theta))$$

#1197: La prima comune a tutte, la seconda variabile secondo le corrispondenze seguenti

$$\#1198: \text{ROT1}(\theta) \rightarrow \text{MAT}(\sin(\theta)) = \begin{bmatrix} i \cdot \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -i \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix} = i \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_z$$

$$\#1199: \text{ROT2}(\theta) \rightarrow \text{MAT}(\sin(\theta)) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} = i \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_y$$

$$\#1200: \text{ROT3}(\theta) \rightarrow \text{MAT}(\sin(\theta)) = \begin{bmatrix} 0 & i \cdot \sin(\theta) \\ -i \cdot \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} = i \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_x$$

#1201: Dimostriamo che, partendo dalle matrici ROT come base di SU(2), vale la relazione

$$\#1202: \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(i \cdot \sigma \cdot \theta)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!}$$

#1203: per tutte le matrici σ .

#1204: In queste dimostrazioni sono fondamentali le proprietà cicliche delle potenze delle σ :

$$\#1205: \sigma_j^2 = I_2 \rightarrow \sigma_j^{k+2} = \sigma_j^k \rightarrow \sigma_j^{2 \cdot k + 1} = \sigma_j$$

#1206:

#1207: Lo sviluppo in serie di Taylor di $\cos z$ contiene solo termini reali di segno alterno.

#1208: Il termine k -esimo dello sviluppo di $\cos(\theta)$ è

$$\#1209: \frac{(i \cdot \theta)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} = \frac{(-1)^k \cdot \theta^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!}$$

$$\#1210: \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta) \cdot I_2$$

#1211: Il termine corrispondente dello sviluppo di $\cos(\theta) \cdot I_2$ è

$$\#1212: \frac{(i \cdot \theta)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} \cdot I_2$$

#1213: Poichè il quadrato delle σ è I_2 , possiamo sostituire I_2 :

$$\#1214: I_2 \rightarrow \sigma_j^{2 \cdot k}$$

#1215: e otteniamo per il termine di posto k dello sviluppo di $\cos(\theta) \cdot I_2$:

$$\#1216: \frac{(i \cdot \theta)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} \cdot \sigma_j^{2 \cdot k} = \frac{(i \cdot \sigma \cdot \theta)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!}$$

#1217: Sommando tutti questi infiniti termini otteniamo $\cos(\theta) \cdot I_2$, c.v.d.

$$\#1218: \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \text{RE} \begin{pmatrix} \hat{e}^{\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{e}^{\mathbf{j}} \end{pmatrix}$$

#1219: corrisponde al termine $\cos z$ nello sviluppo di $\hat{e}^{\mathbf{i} \cdot \mathbf{z}}$.

#1220:

#1221: Cerchiamo la forma esponenziale di ROT1

$$\#1222: \text{ROT1}(\theta) = \cos(\theta) \cdot \mathbf{I}_2 + \mathbf{i} \cdot \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{\sigma}_z$$

#1223: Il termine generale dello sviluppo di $\mathbf{i} \cdot \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{\sigma}_z$ è

$$\#1224: \frac{(\mathbf{i} \cdot \theta)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z$$

#1225: Dato che

$$\#1226: \boldsymbol{\sigma}_z^{2 \cdot k + 1} = \boldsymbol{\sigma}_z$$

#1227: possiamo scriverlo come

$$\#1228: \frac{(\mathbf{i} \cdot \theta)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z = \frac{(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \cdot \theta)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!}$$

#1229: Sommando i termini reali e immaginari dello sviluppo di $\text{ROT1}(\theta)$ abbiamo

$$\#1230: \sum_{k=0}^n \left(\frac{(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \cdot \theta)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} + \frac{(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \cdot \theta)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \cdot \theta)^k}{k!}$$

$$\#1231: \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \cdot \theta)^k}{k!} = \hat{e}^{\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \cdot \theta}$$

#1232:

#1233: Esaminiamo ora $\text{ROT2}(\theta)$; scomponiamola nella somma

$$\#1234: \cos(\theta) \cdot \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{i} \cdot \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{\sigma}_y$$

#1235: Il termine generale di $\mathbf{i} \cdot \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{\sigma}_y$ è

$$\#1236: \frac{(\mathbf{i} \cdot \theta)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!} \cdot \boldsymbol{\sigma}_y = \frac{(\mathbf{i} \cdot \theta)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!} \cdot \boldsymbol{\sigma}_y = \frac{(\mathbf{i} \cdot \theta \cdot \boldsymbol{\sigma}_y)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!}$$

#1237: Il termine generale di $\text{ROT2}(\theta)$ è

$$\#1238: \frac{(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}_y \cdot \theta)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} + \frac{(\mathbf{i} \cdot \theta \cdot \boldsymbol{\sigma}_y)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!}$$

$$\#1239: \sum_{k=0}^n \left(\frac{(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\sigma}_y \cdot \theta)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} + \frac{(\mathbf{i} \cdot \theta \cdot \boldsymbol{\sigma}_y)^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(\mathbf{i} \cdot \theta \cdot \boldsymbol{\sigma}_y)^k}{k!} = \hat{e}^{\mathbf{i} \cdot \theta \cdot \boldsymbol{\sigma}_y}$$

#1240: ecc. Si procede allo stesso modo per ROT3 .

#1241:

#1242: CALCOLO DI MATRICI DI $\text{SU}(2)$ A PARTIRE DALLE MATRICI $\boldsymbol{\sigma}$

#1243: Possiamo ora invertire il procedimento che ha condotto a identificare nelle $\boldsymbol{\sigma}$ le generatrici di $\text{SU}(2)$

#1244: per calcolare queste ultime a partire dalle $\boldsymbol{\sigma}$.

#1245: E' possibile verificare che le matrici ROT sono calcolabili mediante sviluppi in serie di $\hat{e}^{\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_j}$

#1246: per confronto con quelli di seno e coseno:

$$\#1247: \hat{e}^j = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\hat{i} \cdot \theta \cdot \sigma)^k}{k!}$$

#1248: che possiamo porre nella forma

$$\#1249: \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot \theta^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} \cdot I_2 \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot \theta^{2 \cdot k + 1}}{(2 \cdot k + 1)!} \cdot \hat{i} \cdot \sigma_j$$

#1250: il limite è

$$\#1251: \cos(\theta) \cdot I_2 + \hat{i} \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_j$$

$$\#1252: \cos(\theta) \cdot I_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\#1253: \hat{i} \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_z = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\hat{i} \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\#1254: \hat{i} \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\#1255: \hat{i} \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & \hat{i} \cdot \sin(\theta) \\ \hat{i} \cdot \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

#1256: Sommando la parte comune $\cos(\theta) \cdot I_2$ e le parti contenenti le σ otteniamo nell'ordine:

$$\#1257: \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \hat{i} \cdot \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) - \hat{i} \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix} = \text{ROT1}(\theta)$$

$$\#1258: \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \text{ROT2}(\theta)$$

$$\#1259: \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \hat{i} \cdot \sin(\theta) \\ \hat{i} \cdot \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \text{ROT3}(\theta)$$

#1260:

#1261: COMBINAZIONI LINEARI DI MATRICI DI PAULI

#1262: Le tre matrici σ costituiscono un vettore σ

#1263: σ

$$\#1264: \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\hat{i} \\ \hat{i} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right]$$

#1265:

#1266: Possiamo calcolare la forma della generica combinazione lineare a coefficienti reali delle matrici σ co-

#1267: me prodotto del vettore $[\beta, \gamma, \alpha]$ per il vettore $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$ in modo che α moltiplichi σ_z , β σ_x e

#1268: γ σ_y . Il risultato va diviso per il modulo di $[\beta, \gamma, \alpha]$ in modo che il determinante sia -1.

$$\#1269: \text{on}(\alpha, \beta, \gamma) := \frac{[\beta, \gamma, \alpha] \cdot \sigma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

#1270: Svolti i calcoli, otteniamo

$$\#1271: \text{on}(\alpha, \beta, \gamma) := \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta - \hat{i} \cdot \gamma \\ \beta + \hat{i} \cdot \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$$

#1272: $\text{DET}(\text{on}(\alpha, \beta, \gamma))$

$$\#1273: -1$$

#1274: Le matrici on sono hermitiane, unitarie, a traccia nulla e inverse di se stesse:

$$\#1275: \text{on}(\alpha, \beta, \gamma)^2$$

#1276:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#1277: Vale l'identità

#1278: $\sigma_n(-\alpha, -\beta, -\gamma) = -\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)$

#1279:

#1280: Le matrici σ_n come generatrici di SU(2)

#1281: Ogni matrice 'S' di SU(2) è generata da una combinazione lineare di matrici σ a coefficienti reali

#1282: $s = \hat{e} \quad \hat{i} \cdot (\alpha \cdot \sigma_z + \beta \cdot \sigma_x + \gamma \cdot \sigma_y)$

#1283: e si può scrivere come

#1284: $s = \hat{e} \quad \hat{i} \cdot \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \hat{i} \cdot |\mathbf{u}| \cdot \sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)$

#1285: dove 'u' è un vettore $[\alpha, \beta, \gamma]$ non necessariamente unitario.

#1286:

#1287: Le σ_n non formano gruppo rispetto al prodotto:

#1288: $\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \sigma_n(\kappa, \lambda, \mu)$

#1289:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \mu}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} + \frac{\hat{i} \cdot (\beta \cdot \mu - \gamma \cdot \lambda)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} \\ \frac{\beta \cdot \kappa - \alpha \cdot \lambda}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} + \frac{\hat{i} \cdot (\gamma \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} \\ \frac{\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} + \frac{\hat{i} \cdot (\gamma \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} \\ \frac{\alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \mu}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} + \frac{\hat{i} \cdot (\gamma \cdot \lambda - \beta \cdot \mu)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} \end{array} \right]$$

#1290: in generale non è elemento di $\{\sigma_n\}$; sarebbe sufficiente il calcolo del determinante per verificarlo:

#1291: $\text{DET}(\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \sigma_n(\kappa, \lambda, \mu))$

#1292: 1

#1293:

#1294: Le tre σ nella successione z, x, y si ottengono nell'ordine con α, β, γ positivi annullando due dei pa-

#1295: rametri:

#1296: $\sigma_n(\alpha, 0, 0)$

#1297:

$$\begin{bmatrix} \text{SIGN}(\alpha) & 0 \\ 0 & -\text{SIGN}(\alpha) \end{bmatrix}$$

#1298: $\sigma_n(0, \beta, 0)$

#1299:

$$\begin{bmatrix} 0 & \text{SIGN}(\beta) \\ \text{SIGN}(\beta) & 0 \end{bmatrix}$$

#1300: $\sigma_n(0, 0, \gamma)$

#1301:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\hat{i} \cdot \text{SIGN}(\gamma) \\ \hat{i} \cdot \text{SIGN}(\gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

#1302: In questo formalismo, $[1, 0, 0]$ rappresenta 'up', $[0, 1, 0]$ 'rt' e $[0, 0, 1]$ 'in'.

#1303:

#1304: Le σ_n rappresentano la proiezione del vettore σ lungo la direzione definita dal versore $|\mathbf{n}\rangle$; possiamo

#1305: assegnare ad ogni matrice σ_n - comprese le basi σ_x, σ_y e σ_z - un orientamento nello spazio ordinario,

#1306:in modo che gli autovalori e autostati ad essa associati rappresentino le proiezioni dello spin nella
 #1307:direzione $|n\rangle$. L'insieme di tutte le σ_n è uno spazio vettoriale con operazioni di somma e prodotto.
 #1308:Gli autovalori di σ_n sono 1 e -1, non dipendendo dai parametri $\alpha \beta \gamma$; ciò è consistente con l'arbitra-
 #1309:rietà della scelta della direzione rispetto alla quale effettuare la misure di spin:

#1310:SOLVE(DET($\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma) - x \cdot I_2$) = 0, x)

#1311: $x = -1 \vee x = 1$

#1312:

#1313:Dal punto di vista fisico gli autostati di un'osservabile rappresentano stati nei quali i relativi au-
 #1314:tovalori sono i valori misurati dell'osservabile; matematicamente però l'equazione operatoriale

#1315: $O|x\rangle = \lambda|x\rangle$

#1316:non modifica l'orientamento del vettore $|x\rangle$, per cui gli autovettori appartenenti all'autovalore 1 e
 #1317:tali che $\langle x|x\rangle = 1$ sono elementi uniti della trasformazione indotta dall'operatore 'O'. Possiamo quindi
 #1318:associare alle σ_n l'orientamento degli autostati appartenenti all'autovalore 1.

#1319:Inoltre il loro determinante è uguale a -1, per cui sono definite solo da due parametri reali; esiste
 #1320:una biiezione tra $\{\sigma_n\}$ e la 2-sfera.

#1321:

#1322:Calcoliamo gli autovettori relativi all'autovalore 1:

#1323: $\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma) \cdot [u, v] = [u, v]$

#1324:

$$\#1325: \begin{cases} \frac{\alpha \cdot u + \beta \cdot v}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} - \frac{\hat{i} \cdot \gamma \cdot v}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = u \\ \frac{\beta \cdot u - \alpha \cdot v}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} + \frac{\hat{i} \cdot \gamma \cdot u}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = v \end{cases}$$

#1326:

#1327:Poiché il prodotto di un numero complesso per un autovettore genera ancora un autovettore dello stesso
 #1328:operatore, le equazioni che calcolano gli autovettori non sono linearmente indipendenti; le incognite
 #1329:'u' e 'v' sono vincolate da una sola delle due equazioni e sono definite a meno di una costante com-
 #1330:plessa arbitraria, vale a dire a sua volta definita da due parametri reali (modulo e fattore di fase).
 #1331:Imponendo che la norma sia = 1, il modulo della costante è fissato e le componenti 'u' e 'v' sono defi-
 #1332:nite a meno del fattore di fase, per cui questo va opportunamente stabilito per rispettare le conven-
 #1333:zioni usualmente adottate nella rappresentazione degli autostati delle σ . Ma dal punto di vista matema-
 #1334:tico è indeterminato, per cui gli stati significativi sul piano fisico sono definibili come rappresen-
 #1335:tanti classi di equivalenza costituite da vettori differenti per un fattore di fase.

#1336:

#1337:Ricaviamo 'u' in funzione di 'v' dalla prima equazione:

$$\#1338: \frac{\alpha \cdot u + \beta \cdot v}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} - \frac{\hat{i} \cdot \gamma \cdot v}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = u \rightarrow u = \frac{\beta \cdot v}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \alpha} + \frac{\hat{i} \cdot \gamma \cdot v}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

#1339:sostituendo nella seconda, abbiamo l'identità

#1340: $[v = v]$

#1341:La soluzione generale $[u, v]$ è definita a meno di una costante moltiplicativa arbitraria complessa.

#1342:Possiamo assegnare a 'v' un valore arbitrario rispetto al quale calcolare 'u', e poi normalizzare il
 #1343:risultato provvisorio ottenuto imponendo che il suo valore assoluto sia uguale a 1.

#1344:Dato che convenzionalmente la componente rispetto allo spin 'dn' degli autostati relativi all'autovalo-

#1345:re 1 è positiva, poniamo $v = 1$ e quindi

$$\#1346: \quad u = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha}} + \frac{i \cdot \gamma}{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

#1347:Normalizziamo il vettore $[u, v]$

$$\#1348: \quad \left| \left[\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha}} + \frac{i \cdot \gamma}{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, 1 \right] \right| = \frac{\sqrt{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4}}}{\sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha})}}$$

#1349:Dividendo il risultato per il suo valore assoluto otteniamo la soluzione

$$\#1350: \quad \left[\frac{\sqrt{2} \cdot \beta}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4} \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha})}} - \frac{\sqrt{2} \cdot i \cdot \gamma}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4} \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha})}}, \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha})}}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4}} \right]$$

#1351:sotto la condizione $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

#1352:E' escluso dall'insieme soluzione l'autostato di σ_z relativo all'autovalore 1, cioè $[1, 0]$.

#1353:

#1354:Ponendo $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = 1$ nella prima soluzione otteniamo

$$\#1355: \quad u = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge v = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

#1356:cioè lo stato 'rt', associato all'autovalore 1 di σ_x , la matrice individuata dalla terna $[0, 1, 0]$.

#1357:Se $\alpha = \beta = 0$ e $\gamma = 1$, otteniamo dalla prima soluzione il vettore 'in':

$$\#1358: \quad u = -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \wedge v = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

#1359:Tenendo presente che gli spinori sono definiti a meno di un fattore di fase, moltiplicando entrambe le

#1360:componenti per l'unità immaginaria i otteniamo $[\sqrt{2}/2, i\sqrt{2}/2]$ che è la rappresentazione convenzionale

#1361:del vettore 'in'.

#1362:

#1363:Come esempio, consideriamo il caso in cui i parametri α , β e γ siano tutti uguali a 1.

#1364:on(1, 1, 1)

$$\#1365: \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

#1366:L'autostato relativo all'autovalore 1 calcolato dalla formula generale è

$$\#1367: \quad \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)} \right]$$

#1368:già normalizzato a 1:

$$\#1369: \quad \left| \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)} \right] \right|$$

#1370: 1

#1371:ed è proprio l'autostato di on(1, 1, 1) relativo all'autovalore 1:

$$\#1372: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)} \right]$$

$$\#1373: \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)} \right]$$

#1374:

#1375: Calcoliamo ora gli autovettori associati all'autovalore -1 , riportando i passaggi analoghi a quelli#1376: già svolti per l'autovalore 1 :

$$\#1377: \sigma(\alpha, \beta, \gamma) \cdot [u, v] = -[u, v]$$

#1378:

$$\#1379: \begin{bmatrix} \frac{\alpha \cdot u + \beta \cdot v}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} - \frac{i \cdot \gamma \cdot v}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} = -u \\ \frac{\beta \cdot u - \alpha \cdot v}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} + \frac{i \cdot \gamma \cdot u}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} = -v \end{bmatrix}$$

#1380:

#1381: ricaviamo 'u' dalla prima

$$\#1382: \frac{\alpha \cdot u + \beta \cdot v}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} - \frac{i \cdot \gamma \cdot v}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} = -u \rightarrow u = -\frac{\beta \cdot v}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha} + \frac{i \cdot \gamma \cdot v}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha}$$

#1383: Per rispettare le convenzioni poniamo ' v ' = -1 ;

$$\#1384: u = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha} - \frac{i \cdot \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha}$$

#1385: Il valore assoluto del risultato provvisorio è uguale a

$$\#1386: \left| \left[\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha} - \frac{i \cdot \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha}, -1 \right] \right| = \frac{\sqrt{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4}}}{\sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha)}}$$

#1387:

#1388: Dividiamo per il valore assoluto

$$\#1389: \left[\frac{\sqrt{2} \cdot \beta}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4} \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha)}} - \frac{\sqrt{2} \cdot i \cdot \gamma}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4} \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha)}}, -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha)}}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4}} \right]$$

#1390: [se β e γ non sono entrambi nulli]#1391: Il caso $\beta = \gamma = 0$ definisce l'autostato di σ_z relativo all'autovalore -1 , cioè $[0, 1]$

#1392:

#1393: Ricalcoliamo gli stati identificati dai parametri $[0, 1, 0]$ (σ_x) e $[0, 0, 1]$ (σ_y) associati a -1 ; otte-

#1394: niamo, rispettivamente,

$$\#1395: u = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge v = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

#1396: cioè, le componenti di 'lt', e per il secondo caso

$$\#1397: u = -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \wedge v = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

#1398: che corrispondono al vettore ou , a meno di un fattore di fase; moltiplicando per l'unità immaginaria i

#1399: otteniamo il risultato nella forma usuale:

$$\#1400: u = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge v = -\frac{i \cdot \sqrt{2}}{2}$$

#1401:

#1402: Definiamo due funzioni per il calcolo degli autostati di σ_n nel caso $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$:

#1403:

$$\#1404: \text{STATOplus}(\alpha, \beta, \gamma) := \left[\frac{\sqrt{2} \cdot \beta \cdot (\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha) \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \alpha)}}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4} \cdot (\beta^2 + \gamma^2)} - \frac{\sqrt{2} \cdot i \cdot \gamma \cdot (\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha) \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \alpha)}}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4} \cdot (\beta^2 + \gamma^2)}, \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \alpha)}}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4}} \right]$$

#1405: per gli autostati relativi all'autovalore 1 e

$$\#1406: \text{STATOminus}(\alpha, \beta, \gamma) := \left[\frac{\sqrt{2} \cdot \beta \cdot (\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \alpha) \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha)}}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4} \cdot (\beta^2 + \gamma^2)} + \frac{\sqrt{2} \cdot i \cdot \gamma \cdot (\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}) \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha)}}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4} \cdot (\beta^2 + \gamma^2)}, -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \alpha)}}{2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/4}} \right]$$

#1407: per gli autostati relativi all'autovalore -1.

#1408: Sono soddisfatte le condizioni di norma unitaria e di ortogonalità:

#1409: $|\text{STATOplus}(\alpha, \beta, \gamma)|$

#1410: 1

#1411: $|\text{STATOminus}(\alpha, \beta, \gamma)|$

#1412: 1

#1413: $\text{prscal}(\text{STATOplus}(\alpha, \beta, \gamma), \text{STATOminus}(\alpha, \beta, \gamma))$

#1414: 0

#1415: Invertendo i segni di tutti e tre i parametri $\alpha \beta \gamma$ si ottengono stati ortogonali:

#1416: $\text{prscal}(\text{STATOplus}(\alpha, \beta, \gamma), \text{STATOplus}(-\alpha, -\beta, -\gamma))$

#1417: 0

#1418: $\text{prscal}(\text{STATOminus}(\alpha, \beta, \gamma), \text{STATOminus}(-\alpha, -\beta, -\gamma))$

#1419: 0

#1420: compatibilmente con la regola generale per la quale gli angoli tra spinori nello spazio interno sono la

#1421: metà di quelli tra i corrispondenti versori nello spazio R^3 .

#1422:

#1423: PRODOTTI TRA DUE MATRICI σ_n E MATRICI DI $SU(2)$

#1424: Abbiamo visto che il prodotto di due matrici σ_n non appartiene a $\{\sigma_n\}$.

#1425: Tuttavia, i prodotti di due σ_n formano un gruppo; la forma generale non normalizzata del prodotto è

#1426: $(\alpha \cdot \sigma_z + \beta \cdot \sigma_x + \gamma \cdot \sigma_y) \cdot (\kappa \cdot \sigma_z + \lambda \cdot \sigma_x + \mu \cdot \sigma_y)$

$$\#1427: \begin{bmatrix} \alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \mu + i \cdot (\beta \cdot \mu - \gamma \cdot \lambda) & \alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa + i \cdot (\gamma \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu) \\ -\alpha \cdot \lambda + \beta \cdot \kappa + i \cdot (\gamma \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu) & \alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \mu + i \cdot (\gamma \cdot \lambda - \beta \cdot \mu) \end{bmatrix}$$

#1428:il cui determinante è 1, essendo il prodotto di matrici con determinante = -1.

#1429:In breve,

$$\#1430: \begin{bmatrix} p + i \cdot q & r + i \cdot s \\ -r + i \cdot s & p - i \cdot q \end{bmatrix}$$

#1431: $p, q, r, s \in \mathbb{R}$

#1432:con la condizione

$$\#1433: p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1$$

#1434:è anti-hermitiana unitaria di determinante = 1, quindi $\in \text{SU}(2)$; il prodotto 'p' di due on si può scri-

#1435:vere come

$$\#1436: (\alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \mu) \cdot I_2 + i \cdot ((\gamma \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu) \cdot \sigma_x + (\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa) \cdot \sigma_y + (\beta \cdot \mu - \gamma \cdot \lambda) \cdot \sigma_z)$$

$$\#1437: \begin{bmatrix} \alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \mu + i \cdot (\beta \cdot \mu - \gamma \cdot \lambda) & \alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa + i \cdot (\gamma \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu) \\ -\alpha \cdot \lambda + \beta \cdot \kappa + i \cdot (\gamma \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu) & \alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \mu + i \cdot (\gamma \cdot \lambda - \beta \cdot \mu) \end{bmatrix}$$

$$\#1438: \alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \mu = [\alpha, \beta, \gamma] \cdot [\kappa, \lambda, \mu]$$

#1439:I coefficienti di σ_x , σ_y e σ_z sono nell'ordine le componenti del prodotto vettoriale di $[\beta, \gamma, \alpha]$ per

#1440: $[\lambda, \mu, \kappa]$ lungo gli assi Ox , Oy e Oz rispettivamente.

#1441:Ogni matrice $\text{on}(\alpha, \beta, \gamma)$ è associata biunivocamente a un versore $[\alpha, \beta, \gamma]$ e una coppia di matrici ad

#1442:una di versori $[u, v]$; tuttavia il loro prodotto P non varia se si ruotano i due versori dello stesso

#1443:angolo rimanendo nello stesso piano. Indichiamo ora con 'u' e 'v' i versori orientatori di due matrici

#1444: on , e con 'w' il versore del prodotto vettoriale di 'u' per 'v', ortogonale a entrambi; allora,

$$\#1445: p = (|u| \cdot |v|) \cdot (\cos(\theta) \cdot I_2 + i \cdot \sin(\theta) \cdot w \cdot \sigma)$$

#1446:Indichiamo ora con $[\delta, v, \tau]$ il versore 'w' (nell'ordine z, x, y). Poiché $|u| = |v| = 1$ e

$$\#1447: [v, \tau, \delta] \cdot \sigma = \begin{bmatrix} \delta & v - i \cdot \tau \\ v + i \cdot \tau & -\delta \end{bmatrix} = \text{on}(\delta, v, \tau)$$

#1448:possiamo porre il prodotto di due on nella forma

$$\#1449: \text{PRon}(\theta) := \cos(\theta) \cdot I_2 + i \cdot \sin(\theta) \cdot \text{on}(\delta, v, \tau)$$

#1450:dove i parametri $[\delta, v, \tau]$ sono univocamente determinati (a meno del segno) dalle tre condizioni

$$\#1451: [\delta, v, \tau] \cdot [\alpha, \beta, \gamma] = [\delta, v, \tau] \cdot [\kappa, \lambda, \mu] = 0 \wedge |[\delta, v, \tau]| = 1$$

#1452:esplicitamente,

$$\#1453: \alpha \cdot \delta + \beta \cdot v + \gamma \cdot \tau = 0 \wedge \kappa \cdot \delta + \lambda \cdot v + \mu \cdot \tau = 0 \wedge \delta^2 + v^2 + \tau^2 = 1$$

#1454:I parametri δ, v, τ definiscono la direzione ortogonale al piano dei vettori 'u' e 'v' e quindi alle

#1455:due matrici $\text{on}(\alpha, \beta, \gamma)$ e $\text{on}(\kappa, \lambda, \mu)$. Quindi il prodotto di due on genera una terza matrice on ortogo-

#1456:nale a entrambi i fattori.

#1457:

#1458:Le tre condizioni su $[\delta, v, \tau]$ individuano una coppia di versori opposti, in relazione all'ordine dei

#1459:fattori del prodotto vettoriale che ne determina il segno. Lo scambio dei fattori equivale alla sosti-

#1460:tuzione di θ con $2\pi - \theta$ o con $-\theta$ e quindi di $\sin\theta$ con $-\sin\theta$, per cui la parte immaginaria di PRon si tra-

#1461:sforma nel suo opposto:

$$\#1462: -i \cdot \sin(\theta) \cdot \text{on}(\delta, v, \tau) = i \cdot \sin(\theta) \cdot (-\text{on}(\delta, v, \tau)) = i \cdot \sin(\theta) \cdot \text{on}(-\delta, -v, -\tau)$$

#1463:Ciò implica che i prodotti di due on a fattori invertiti siano i coniugati l'uno dell'altro, e che il

#1464:commutatore di due on sia il doppio della parte immaginaria di PRon :

$$\#1465: \text{com}(\text{on}(\beta, \gamma, \alpha), \text{on}(\lambda, \mu, \kappa)) = 2 \cdot i \cdot \sin(\theta) \cdot \text{on}(\delta, v, \tau)$$

#1466:Se i vettori $u = [\beta, \gamma, \alpha]$ e $v = [\lambda, \mu, \kappa]$ sono unitari, valgono inoltre le uguaglianze:

$$\#1467: \sigma(\beta, \gamma, \alpha) \cdot \sigma(\lambda, \mu, \kappa) = ([\beta, \gamma, \alpha] \cdot \sigma) \cdot ([\lambda, \mu, \kappa] \cdot \sigma) = \frac{1}{2} \cdot \text{com}(\sigma(\alpha, \beta, \gamma), \sigma(\lambda, \mu, \kappa)) + [\beta, \gamma,$$

$$\alpha] \cdot [\lambda, \mu, \kappa] \cdot I_2$$

#1468: in breve,

$$\#1469: (u \cdot \sigma) \cdot (v \cdot \sigma) = \frac{1}{2} \cdot \text{com}(u \cdot \sigma, v \cdot \sigma) + u \cdot v \cdot I_2$$

#1470:

#1471: $\text{PRon}(\theta)$ appartiene a $SU(2)$:

#1472: $\text{PRon}(\theta)$

$$\#1473: \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \frac{\hat{i} \cdot \delta \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} & \frac{\tau \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} + \frac{\hat{i} \cdot \nu \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} \\ -\frac{\tau \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} + \frac{\hat{i} \cdot \nu \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} & \cos(\theta) - \frac{\hat{i} \cdot \delta \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} \end{bmatrix}$$

#1474: $\text{DET}(\text{PRon}(\theta))$

#1475: 1

#1476: Qualsiasi matrice di $SU(2)$ espressa mediante i parametri $\alpha \beta \gamma \delta$ corrisponde a una matrice PRon median-

#1477: te le trasformazioni

$$\#1478: \cos(\theta) = \alpha \wedge \delta = \frac{\kappa}{\sin(\theta)} \wedge \tau = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \wedge \nu = \frac{\gamma}{\sin(\theta)}$$

#1479: Il caso singolare $\theta = 0$ corrisponde alla matrice identità I_2 .

#1480: [se $\theta \rightarrow -\theta$, $\delta \rightarrow -\delta$, $\tau \rightarrow -\tau$, $\nu \rightarrow -\nu$; quindi ad una matrice di $SU(2)$ definita da $\alpha \kappa \beta \lambda$ corrispondono

#1481: due matrici PRon . Viceversa, a $\cos(\theta)$, δ , τ , ν corrispondono i parametri α , $\pm\kappa$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$ e quindi due di-

#1482: stinti elementi di $SU(2)$]

#1483:

#1484: Come esempio, costruiamo una matrice di $SU(2)$ partendo da quattro numeri scelti a caso

#1485: $[1, \sqrt{3}, -2, 2]$

#1486: Sostituiamoli con altri quattro in modo che la somma dei quadrati sia 1:

$$\#1487: 1^2 + \sqrt{3}^2 + (-2)^2 + 2^2 = 12$$

#1488: Dividiamo per $\sqrt{12}$ e otteniamo un 4-vettore di modulo 1

$$\#1489: \left[\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\#1490: \left| \left[\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right| = 1$$

#1491: La matrice seguente ha determinante 1 e quindi appartiene a $SU(2)$:

$$\#1492: \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{\hat{i}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{\hat{i}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#1493: \text{DET} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{\hat{i}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{\hat{i}}{2} \end{bmatrix} = 1$$

$$\#1494: \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\#1495: \sin(\theta) = \sqrt{\frac{11}{12}}$$

$$\#1496: \delta = \frac{\sqrt{33}}{11}$$

$$\#1497: \tau = -\frac{2 \cdot \sqrt{11}}{11}$$

$$\#1498: \nu = \frac{2 \cdot \sqrt{11}}{11}$$

#1499: La matrice $\text{on}(\delta, \nu, \tau)$ associata è

$$\#1500: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}}{11} & \frac{2 \cdot \sqrt{11}}{11} + \frac{i \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}{11} \\ \frac{2 \cdot \sqrt{11}}{11} - \frac{i \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{33}}{11} \end{bmatrix}$$

$$\#1501: \text{DET} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}}{11} & \frac{2 \cdot \sqrt{11}}{11} + \frac{i \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}{11} \\ \frac{2 \cdot \sqrt{11}}{11} - \frac{i \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{33}}{11} \end{bmatrix}$$

$$\#1502: \quad \quad \quad -1$$

#1503: ponendo invece

$$\#1504: \sin(\theta) = -\sqrt{\frac{11}{12}}$$

#1505: avremmo ottenuto la matrice

$$\#1506: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}}{11} & -\frac{2 \cdot \sqrt{11}}{11} - \frac{i \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}{11} \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{11}}{11} + \frac{i \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{33}}{11} \end{bmatrix}$$

#1507:

#1508: Il determinante della matrice $\text{on}(\delta, \nu, \tau)$ associata a un elemento di $SU(2)$ è sempre -1 :

#1509: infatti, posto $\cos(\theta) = \alpha$ e $\sin(\theta) > 0$, scriviamo $\text{on}(\delta, \nu, \tau)$ nella forma

$$\#1510: \text{on} \left(\frac{\kappa}{\sqrt{(1-\alpha)^2}}, \frac{\gamma}{\sqrt{(1-\alpha)^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha)^2}} \right)$$

$$\#1511: \text{DET} \left(\text{on} \left(\frac{\kappa}{\sqrt{(1-\alpha)^2}}, \frac{\gamma}{\sqrt{(1-\alpha)^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha)^2}} \right) \right)$$

$$\#1512: \frac{(\alpha^2 - 1) \cdot \left(\frac{\gamma}{\sqrt{(1-\alpha)^2}} - \frac{\beta \cdot \text{SIGN}(\alpha^2 - 1)}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)}} \right) \cdot \left(\frac{\beta \cdot \text{SIGN}(\alpha^2 - 1)}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)}} + \frac{\gamma}{\sqrt{(1-\alpha)^2}} \right) - \kappa^2}{\beta^2 + \gamma^2 + \kappa^2}$$

#1513: dato che

$$\#1514: \alpha^2 < 1 \rightarrow \sqrt{(\alpha^2 - 1)} = i \cdot \sqrt{(1 - \alpha^2)} \wedge \text{SIGN}(\alpha^2 - 1) = -1 \rightarrow \frac{\beta \cdot \text{SIGN}(\alpha^2 - 1)}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)}} = -\frac{\beta}{i \cdot \sqrt{(1 - \alpha^2)}} = \frac{i \cdot \beta}{\sqrt{(1 - \alpha^2)}}$$

#1515:il determinante è uguale a

$$\frac{(\alpha^2 - 1) \cdot \frac{\gamma - i\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2)}} \cdot \frac{\gamma + i\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2)}} - \kappa^2}{\beta^2 + \gamma^2 + \kappa^2}$$

$$\frac{- (\gamma^2 + \beta^2) - \kappa^2}{\beta^2 + \gamma^2 + \kappa^2} = -1$$

#1518:

#1519:Poiché $\{ \sigma_n \sigma_m \} = SU(2)$, esiste una relazione molti \rightarrow uno tra l'insieme delle coppie ordinate di versori

#1520:su R^3 e $SU(2)$. Poniamo

$$\vec{u} = [\beta, \gamma, \alpha]; \quad \vec{v} = [\lambda, \mu, \kappa]$$

#1521:Ogni matrice di $SU(2)$ è quindi esprimibile come

$$S = (\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot I_2 + i \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma}$$

#1522:

#1523:Se 'u' e 'v' sono ortogonali, il loro prodotto scalare è nullo, e il prodotto vettoriale è orientato

#1524:nel verso positivo dell'asse ortogonale a entrambi; se 'u' e 'v' corrispondono rispettivamente agli as-

#1525:si O_x e O_y , il prodotto vettoriale sarà orientato lungo il verso positivo dell'asse O_z e l'equazione

#1526:che definisce 'S' si riduce a $\sigma_x \sigma_y = i \cdot \sigma_z$.

#1527:In generale, il prodotto di due σ_n associate a versori tra di loro ortogonali è

#1528: $i \cdot \sigma_n(\delta, \nu, \tau)$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{i \cdot \delta}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} & \frac{\tau}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} + \frac{i \cdot \nu}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} \\ - \frac{\tau}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} + \frac{i \cdot \nu}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} & - \frac{i \cdot \delta}{\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 + \tau^2)}} \end{array} \right]$$

#1530:Vale l'identità

$$\frac{1}{\sqrt{(\kappa^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \cdot \begin{bmatrix} i \cdot \kappa & \beta + i \cdot \gamma \\ -\beta + i \cdot \gamma & -i \cdot \kappa \end{bmatrix} = i \cdot \sigma_n(\kappa, \gamma, \beta)$$

#1532:

#1533:L'algebra del prodotto di due matrici σ_n ha la stessa struttura di quella del prodotto di due quater-

#1534:nioni con parte reale nulla, estendendo al caso generale la relazione già discussa tra i prodotti delle

#1535: σ e delle unità immaginarie i, j, k .

#1536:Posto infatti

$$\#1537: p = \beta \cdot i + \gamma \cdot j + \alpha \cdot k$$

$$\#1538: q = \lambda \cdot i + \mu \cdot j + \kappa \cdot k$$

#1539:il loro prodotto è

$$\#1540: p \cdot q = -\beta \cdot \lambda - \gamma \cdot \mu - \alpha \cdot \kappa + (\gamma \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu) \cdot i + (\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa) \cdot j + (\beta \cdot \mu - \gamma \cdot \lambda) \cdot k$$

#1541:Poniamo

$$\#1542: u = [\beta, \gamma, \alpha]$$

$$\#1543: v = [\lambda, \mu, \kappa]$$

$$\#1544: t = i + j + k$$

#1545:Consideriamo solo numeri unitari:

#1546: $|p| = |q| = 1 \rightarrow |u| = |v| = 1$

#1547: $|p \cdot q| = 1 \wedge |u \cdot v| = 1$

#1548: Il prodotto di 'p' per 'q' è dato da

$$p \cdot q = -\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{t}$$

#1549: la cui struttura – come nel caso delle σ e delle unità immaginarie – richiama quella del prodotto di

#1550: due matrici σ_n , qui sotto indicate come σ + indice; il vettore σ è $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$.

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \vec{u} \cdot \vec{v} + i \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma}$$

#1551: Il metodo per evidenziare l'identità di struttura è lo stesso già applicato per le matrici di Pauli e

#1552: le unità immaginarie; si applicano le trasformazioni

$$\sigma_i \rightarrow \hat{i} \cdot p \wedge \sigma_j \rightarrow \hat{i} \cdot q \wedge \sigma \rightarrow \hat{i} \cdot t$$

#1553: i

$$p \rightarrow -\hat{i} \cdot \sigma_j$$

#1554:

#1555: e così via.

#1556:

#1557: ORIENTAMENTO DEGLI SPINORI IN S2 E DEI VETTORI IN R3

#1558: Per calcolare gli angoli tra vettori possiamo impiegare la seguente identità conseguenza della disugua-

#1559: glianza di SCHWARZ:

$$\#1560: |\text{prscal}(x, y)| = \cos(\theta) \cdot |x| \cdot |y| \rightarrow \cos(\theta) = \frac{|\text{prscal}(x, y)|}{|x| \cdot |y|}$$

#1561: se $|x\rangle$ e $|y\rangle$ hanno valore assoluto 1, otteniamo

$$\#1562: \cos(\theta) = |\text{prscal}(x, y)|$$

#1563: A titolo di esempio, calcoliamo il coseno dell'angolo tra STATOplus (1, 1, 1) e up:

$$\#1564: \left| \frac{(\text{STATOplus}(1, 1, 1))}{1} \right|$$

$$\#1565: \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right)}$$

#1566: corrispondente in $[0, \pi]$ all'angolo

$$\#1567: \text{ACOS} \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right)} \right)$$

$$\#1568: \frac{\pi}{4} - \frac{\text{ATAN} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{2}$$

#1569: [in rad; approssimato a 0.477658309 rad. corrisponde a ca. 27° 22' 4'']

#1570: Nello spazio fisico, il versore equivalente è

$$\#1571: \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

#1572: [nell'ordine usuale x, y, z] e l'angolo con l'asse Oz è dato da

$$\#1573: \text{ACOS} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\#1574: \frac{\pi}{2} - \text{ATAN} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

#1575: cioè il doppio del valore prima calcolato.

#1576:

#1577: Per calcolare l'angolo formato da due spinori nello spazio interno è opportuno modificare la funzione

#1578:STATOplus in modo da poterla impiegare anche nel caso $\beta = \gamma = 0$; introduciamo una nuova funzione per

#1579:definire uno spin orientato lungo qualsiasi versore $[\alpha, \beta, \gamma]$ dello spazio ordinario:

```
SPIN1( $\alpha, \beta, \gamma$ ) :=
  If  $\neg \text{ABS}(\beta)^2 + \text{ABS}(\gamma)^2 = 0$ 
    STATOplus( $\alpha, \beta, \gamma$ )
#1580:   If  $\alpha > 0$ 
        [1, 0]
        [0, 1]
```

#1581:SPIN1 accetta come input i tre parametri direzionali $\alpha \beta \gamma$ e restituisce, se β e γ non sono entrambi

#1582:nulli la funzione STATOplus già definita, se $\beta = \gamma = 0$ e $\alpha > 0$ il vettore $[1, 0]$, se $\beta = \gamma = 0$ e $\alpha < 0$

#1583:il vettore $[0, 1]$.

#1584:Dati due spin di parametri $[\alpha \beta \gamma]$ e $[\kappa \lambda \mu]$ possiamo calcolare l'angolo da essi definito in S2:

#1585: $\text{COS_ANG}(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu) := |\text{prscal}(\text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma), \text{SPIN1}(\kappa, \lambda, \mu))|$

#1586:Per es., calcoliamo l'angolo in $[0, \pi]$ tra i due spin di parametri $[1, -1, 2]$ e $[2, -\sqrt{3}, 1]$:

#1587: $\text{COS_ANG}(1, -1, 2, 2, -\sqrt{3}, 1)$

#1588:
$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{5}{8}\right)}$$

#1589: $\text{ACOS}\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{5}{8}\right)}\right)$

#1590:
$$\text{ATAN}\left(\sqrt{\left(\frac{61}{59} - \frac{32 \cdot \sqrt{3}}{59}\right)}\right)$$

#1591:che approssimato alla decima cifra decimale corrisponde a 0.2982113108 rad.

#1592:Il coseno dell'angolo tra i versori di parametri $[1, 1, -2]$ e $[2, -\sqrt{3}, 1]$ nello spazio fisico è dato da

#1593: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot [1, -1, 2]\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} \cdot [2, -\sqrt{3}, 1]\right)$

#1594:
$$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}$$

#1595: $\text{ACOS}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}\right)$

#1596:
$$\text{ATAN}\left(\sqrt{\left(\frac{743}{169} - \frac{384 \cdot \sqrt{3}}{169}\right)}\right)$$

#1597:Il secondo angolo è il doppio del primo:

#1598: $2 \cdot \text{ATAN}\left(\sqrt{\left(\frac{61}{59} - \frac{32 \cdot \sqrt{3}}{59}\right)}\right) - \text{ATAN}\left(\sqrt{\left(\frac{743}{169} - \frac{384 \cdot \sqrt{3}}{169}\right)}\right)$

#1599: 0

#1600:[N.B. Lo spinore $[u, v]$ è univocamente definito nello spazio interno come $u \cdot \text{up} + v \cdot \text{dn}$, e SPIN1 ha compo-

#1601:nenti β, γ, α rispetto agli assi Ox, Oy, Oz. Il versore associato a SPIN1 è quindi $[\beta, \gamma, \alpha]$. Tuttavia

#1602:l'angolo tra $[\beta, \gamma, \alpha]$ e $[\lambda, \mu, \kappa]$ non dipende dall'ordine in cui sono scritte le rispettive componen-

#1603:ti, ma dal prodotto $\beta\lambda + \gamma\mu + \alpha\kappa$. Quindi, per ogni terna di assi cartesiani nello spazio fisico tre

#1604:coppie di versori distinti formano angoli di ampiezza doppia rispetto all'angolo di due spinori]

#1605:

#1606:Dal prodotto scalare tra due spinori di parametri assegnati è possibile costruire la matrice di tra-

#1607:sformazione che fa ruotare l'asse di uno dei due fino a coincidere con l'altro. Ciò corrisponde alla

#1608:trasformazione da una base $[u, v]$ ad un'altra $[u', v']$; serve una funzione SPIN2 per gli autostati

#1609:relativi a -1 analoga a SPIN1:

```

SPIN2( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) :=
  If  $\neg \text{ABS}(\gamma)^2 + \text{ABS}(\beta)^2 = 0$ 
    STATOminus( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )
#1610:   If  $\alpha > 0$ 
        [0, 1]
        [1, 0]

#1611:Ovviamente il loro prodotto scalare deve essere nullo; p.es.

#1612:CONJ(SPIN1(0, 2, -2))•SPIN2(0, 2, -2)

#1613:                                0

#1614:

#1615:TRASFORMAZIONI TRA AUTOSTATI DI  $\sigma_n$  E ROTAZIONI NELLO SPAZIO

#1616:Gli autostati di  $\sigma_n$  sono definiti da tre parametri che ne individuano l'orientamento rispetto allo spa-
#1617:zio fisico. Vediamo come ottenere la trasformazione da una base [u, v] coppia di autostati di una  $\sigma_n$ 
#1618:alla base [u', v'] di autostati di un'altra matrice,  $\sigma_{n'}$ .

#1619:Indichiamo con [ $\alpha$   $\beta$   $\gamma$ ] e [ $\kappa$   $\lambda$   $\mu$ ] le terne di parametri orientatori per le rispettive basi ortonormali
#1620:[SPIN1( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), SPIN2( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )] e [SPIN1( $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ), SPIN2( $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ )]
#1621:ordinatamente relativi agli assi Oz, Ox, Oy.

#1622:La matrice che manda [up, dn] in [u, v] è

#1623:
$$\begin{bmatrix} \text{prscal}(\text{up}, u) & \text{prscal}(\text{up}, v) \\ \text{prscal}(\text{dn}, u) & \text{prscal}(\text{dn}, v) \end{bmatrix}$$


#1624:

#1625:Definiamo la matrice che opera la trasformazione da [up, dn] a [SPIN1, SPIN2]:

#1626:TRZN( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) := 
$$\begin{bmatrix} \text{prscal}(\text{up}, \text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma)) & \text{prscal}(\text{up}, \text{SPIN2}(\alpha, \beta, \gamma)) \\ \text{prscal}(\text{dn}, \text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma)) & \text{prscal}(\text{dn}, \text{SPIN2}(\alpha, \beta, \gamma)) \end{bmatrix}$$


#1627:La matrice inversa è

#1628:trnz( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) := 
$$\begin{bmatrix} \text{prscal}(\text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma), \text{up}) & \text{prscal}(\text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma), \text{dn}) \\ \text{prscal}(\text{SPIN2}(\alpha, \beta, \gamma), \text{up}) & \text{prscal}(\text{SPIN2}(\alpha, \beta, \gamma), \text{dn}) \end{bmatrix}$$


#1629:evidentemente uguale alla trasposta coniugata della TRZN, in accordo con l'unitarietà delle trasforma-
#1630:zioni tra basi ortonormali.

#1631:

#1632:Valgono le seguenti identità (tener presente le corrispondenze:  $\alpha \rightarrow z$ ,  $\beta \rightarrow x$ ,  $\gamma \rightarrow y$ )

#1633:TRZN( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )•up = SPIN1( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )
#1634:TRZN( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )•dn = SPIN2( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )

#1635:TRZN(1, 0, 0) = trnz(1, 0, 0) = 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$


#1636:TRZN(0, 1, 0) = 
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \text{TRXZ}$$


#1637:TRZN(0, 0, 1) = 
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} & -\frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -i \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} & -\frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} \end{bmatrix} = -i \cdot \text{TRYZ}$$


#1638:cfr.

#1639:SPIN1(0, 0, 1) = 
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -i \cdot \text{in}$$


#1640:

```

#1641:Casi notevoli

$$\#1642: \text{TRZN}(1, 0, 0) \cdot \text{up} = [1, 0] = \text{up}$$

$$\#1643: \text{TRZN}(-1, 0, 0) \cdot \text{up} = [0, 1] = \text{dn}$$

$$\#1644: \text{TRZN}(1, 0, 0) \cdot \text{dn} = [0, 1] = \text{dn}$$

$$\#1645: \text{TRZN}(-1, 0, 0) \cdot \text{dn} = [1, 0] = \text{up}$$

$$\#1646: \text{TRZN}(0, 1, 0) \cdot \text{up} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \text{rt}$$

$$\#1647: \text{TRZN}(0, 1, 0) \cdot \text{dn} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \text{lt}$$

$$\#1648: \text{trnz}(0, 1, 0) \cdot \text{rt} = [1, 0] = \text{up}$$

$$\#1649: \text{trnz}(0, 1, 0) \cdot \text{lt} = [0, 1] = \text{dn}$$

$$\#1650: \text{TRZN}(0, 0, 1) \cdot \text{up} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -i \cdot \text{in}$$

$$\#1651: \text{TRZN}(0, 0, 1) \cdot \text{dn} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -i \cdot \text{ou}$$

#1652:[gli spinori sono definiti a meno di un fattore di fase]

$$\#1653: \text{trnz}(0, 0, 1) \cdot (-i \cdot \text{in}) = [1, 0] = \text{up}$$

$$\#1654: \text{trnz}(0, 0, 1) \cdot (-i \cdot \text{ou}) = [0, 1] = \text{dn}$$

$$\#1655: \text{TRZN}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)} & \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)} \\ \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)} & -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix}$$

$$\#1656: \text{trnz}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)} + i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)} & \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)} \\ \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)} + i \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)} & -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix}$$

$$\#1657: \text{TRZN}(1, 1, 1) \cdot \text{up} = \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)} \right]$$

$$\#1658: \text{TRZN}(1, 1, 1) \cdot \text{dn} = \left[\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)}, -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)} \right]$$

#1659:cfr. con

$$\#1660: \text{SPIN1}(1, 1, 1) = \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)} \right]$$

$$\#1661: \text{SPIN2}(1, 1, 1) = \left[\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)}, -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)} \right]$$

#1662:

#1663:TRZN generalizza TRXZ e le altre trasformazioni già analizzate, che ne sono casi particolari; vediamo

#1664:qualche esempio della loro azione sulle σ :

$$\#1665: \text{trnz}(0, 1, 0) \cdot \sigma_z \cdot \text{TRZN}(0, 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

$$\#1666: \text{trnz}(1, 0, 0) \cdot \sigma_z \cdot \text{TRZN}(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

#1667:cfr. con

$$\#1668: \text{TRXZ} \cdot \sigma_z \cdot \text{TRXZ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \text{TRXZ} \cdot \sigma_x \cdot \text{TRXZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\#1669: \text{trnz}(0, 0, 1) \cdot \sigma_z \cdot \text{TRZN}(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

$$\#1670: \text{trnz}(0, 0, 1) \cdot \sigma_x \cdot \text{TRZN}(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

#1671: cfr. con

$$\#1672: \text{TRZY} \cdot \sigma_z \cdot \text{TRYZ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x \wedge \text{TRZY} \cdot \sigma_x \cdot \text{TRYZ} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

#1673:

#1674: Possiamo ora costruire la matrice TRgen che trasforma uno spinore di parametri $\alpha \beta \gamma$ nello spinore di

#1675: parametri $\kappa \lambda \mu$:

$$\#1676: \text{TRgen}(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu) := \text{TRZN}(\kappa, \lambda, \mu) \cdot \text{trnz}(\alpha, \beta, \gamma)$$

#1677: opera la trasformazione

$$\#1678: \text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \text{SPIN1}(\kappa, \lambda, \mu)$$

#1679: L'inversa è

$$\#1680: \text{InvTRgen}(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu) := \text{TRZN}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \text{trnz}(\kappa, \lambda, \mu)$$

#1681: Come es. trasformiamo

$$\#1682: \text{SPIN1}(0, 2, 2) = \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

#1683: in

$$\#1684: \text{SPIN1}(1, 1, 1) = \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)} \right]$$

$$\#1685: \text{TRgen}(0, 2, 2, 1, 1, 1) \cdot \text{SPIN1}(0, 2, 2)$$

$$\#1686: \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)} \right]$$

#1687: Per tornare a $\text{SPIN1}(0, 2, 2)$ applichiamo l'inversa

$$\#1688: \text{InvTRgen}(0, 2, 2, 1, 1, 1) \cdot \text{SPIN1}(1, 1, 1)$$

$$\#1689: \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

#1690: E' possibile trasformare tra di loro le matrici σ_n :

$$\#1691: \text{InvTRgen}(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu) \cdot \sigma_n(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \text{TRgen}(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu)$$

#1692: opera la trasformazione $\sigma(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \sigma(\kappa, \lambda, \mu)$; p. es.

$$\#1693: \text{InvTRgen}(1, 0, 0, 0, 1, 0) \cdot \sigma_n(1, 0, 0) \cdot \text{TRgen}(1, 0, 0, 0, 1, 0)$$

#1694: genera la trasformazione

$$\#1695: \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

#1696: equivalente a

$$\#1697: \text{TRXZ} \cdot \sigma_z \cdot \text{TRXZ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

#1698:

#1699: Rotazioni in R3

#1700: Le matrici σ_n operano come rotazioni nello spazio ordinario, stante che l'angolo tra $\text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma)$ e

#1701: $\text{SPIN2}(\kappa, \lambda, \mu)$ calcolato nello spazio interno è la metà di quello formato dai versori $[\alpha, \beta, \gamma]$ e

#1702:[κ, λ, μ] nello spazio fisico.

#1703:Verifichiamolo nel caso particolare [0, 2, 2] e [1, 1, 1]; calcoliamo il coseno dell'angolo nello spazio

#1704:interno degli spin:

#1705:prscal(SPIN1(1, 1, 1), SPIN1(0, 2, 2))

#1706:
$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{2}\right)}$$

#1707:ACOS
$$\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{2}\right)}\right)$$

#1708:
$$\frac{\text{ATAN}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}$$

#1709:Il coseno dell'angolo nello spazio fisico è dato da

#1710:
$$\frac{[1, 1, 1] \cdot [0, 2, 2]}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

#1711:ACOS
$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

#1712:
$$\text{ATAN}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

#1713:

#1714:MATRICI E SPINORI IN COORDINATE SFERICHE

#1715:Un punto sulla sfera di raggio unitario è definito dalla colatitudine θ dalla longitudine φ. Possiamo

#1716:associare al punto un versore, le cui componenti sono nell'ordine z, x, y:

#1717:punto(θ, φ) := [COS(θ), SIN(θ)·COS(φ), SIN(θ)·SIN(φ)]

#1718:Possiamo anche esprimere on in coordinate sferiche, associandola al versore 'punto':

#1719:σσ(θ, φ) := on(COS(θ), SIN(θ)·SIN(φ), SIN(θ)·COS(φ))

#1720:Esplicitiamo σσ

#1721:σσ(θ, φ)

#1722:
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\hat{i} \cdot \varphi \cdot \sin(\theta) \\ \hat{i} \cdot \varphi \cdot \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

#1723:che si può scrivere come

#1724:σσ(θ, φ) :=
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) - \hat{i} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) + \hat{i} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

#1725:Ovviamente,

#1726:σσ(θ, φ)² =
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#1727:Possiamo esprimere le tre matrici σ in coordinate sferiche:

#1728:σσ(0, 0, 0) =
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

#1729:σσ
$$\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

#1730:σσ
$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{i} \\ \hat{i} & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

#1731:Si deve tener presente che le formule in coordinate sferiche si applicano sotto le condizioni

#1732: $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$

#1733: Poiché σ è una riformulazione di σ_n , i suoi autovalori sono 1 e -1; gli autostati si ottengono sostituendo $[\alpha, \beta, \gamma]$ con $[\cos(\theta), \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)]$ nelle funzioni STATOplus e STATOminus già definite, che forniscono gli autostati di σ_n associati risp. agli autovalori 1 e -1.

#1736: Il vantaggio nel passare ad una formulazione in termini di coordinate sferiche consiste nell'evitare

#1737: singolarità nelle funzioni quali la condizione $\beta^2 + \gamma^2 = 0 \rightarrow \theta = k\pi$, punto nel quale le funzioni

#1738: $\text{SPIN1}\theta\varphi$ e $\text{SPIN2}\theta\varphi$ introdotte tra poco sono regolari. Lo stesso vale per le trasformazioni tra spinori.

#1739: $\text{STATOplus}(\cos(\theta), \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi))$

#1740:

$$\left[\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{e}^{-i\varphi} \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sqrt{1 - \cos(\theta)}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\theta)}}{2} \right]$$

#1741: Applicando le formule di bisezione otteniamo

#1742: $\left[\hat{e}^{-i\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$

#1743:

#1744: Per ottenere risultati conformi alle rappresentazioni convenzionalmente adottate per gli autostati del-

#1745: le σ , conviene moltiplicare entrambe le componenti per $\hat{e}^{i\varphi}$ e definire

#1746: $\text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi) := \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \hat{e}^{i\varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$

#1747: Questa funzione calcola gli autostati delle σ appartenenti all'autovalore 1. La corrispondenza tra gli

#1748: autostati e la loro rappresentazione in coordinate sferiche è data dalla seguente tabella

#1749:

#1750:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{up} & \text{SPIN1}\theta\varphi(0, \varphi) \quad [1, 0] \\ \text{rt} & \text{SPIN1}\theta\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \text{in} & \text{SPIN1}\theta\varphi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{i\sqrt{2}}{2}\right] \end{array} \right]$$

#1751:

#1752: Per ottenere gli autostati appartenenti a -1, cerchiamo tra i vettori ortogonali a $\text{SPIN1}\theta\varphi$ quelli che

#1753: implicano il segno meno per la componente rispetto a 'dn'; proviamo con

#1754: $\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), -\hat{e}^{i\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$

#1755: che è ortogonale a $\text{SPIN1}\theta\varphi$:

#1756: $\text{prscal}\left(\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \hat{e}^{i\varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right], \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), -\hat{e}^{i\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right)$

#1757: 0

#1758: $\text{SPIN2}\theta\varphi(\theta, \varphi) := \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), -\hat{e}^{i\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$

#1759:

#1760: Tutti gli autostati delle σ possono essere calcolati dalla sola funzione $\text{SPIN1}\theta\varphi$, per via dell'identità

#1761: $\text{SPIN1}\theta\varphi(\pi - \theta, \varphi \pm \pi) = \text{SPIN2}\theta\varphi(\theta, \varphi)$

#1762: Verifichiamola termine a termine in generale:

#1763:

$$\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), -\hat{e}^{i\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\hat{e}^{i\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

#1764:e singolarmente per gli stati 'dn', 'lt' e 'ou'; nell'ordine:

$$\#1765: \text{SPIN}2\theta\varphi(0, \varphi) = \text{SPIN}1\theta\varphi(\pi, \varphi + \pi)$$

$$\#1766: \left[0 = 0, -\hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} = -\hat{e}^{\hat{i} \cdot \varphi} \right]$$

$$\#1767: \text{SPIN}1\theta\varphi\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \text{SPIN}2\theta\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$\#1768: \left[\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\#1769: \text{SPIN}1\theta\varphi\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \text{SPIN}2\theta\varphi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\#1770: \left[\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} = -\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{i}}{2} \right]$$

#1771:

#1772:La seguente tabella contiene le corrispondenze tra gli autostati delle σ e gli angoli ad essi associati.
 #1773:ti. Gli angoli θ e φ sono definiti nello spazio fisico 3D.

#1774:

	stato	angoli θ, φ	componenti
#1775:	rt	$\left[\frac{\pi}{2}, 0 \right]$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
	lt	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
	in	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\hat{i} \cdot \sqrt{2}}{2} \right]$
	ou	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2} \right]$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\hat{i} \cdot \sqrt{2}}{2} \right]$
	up	$[0, 0]$	$[1, 0]$
	dn	$[\pi, 0]$	$[0, 1]$

#1776:

#1777:E' possibile passare dalla rappresentazione nei parametri $[\alpha, \beta, \gamma]$ a quella in coordinate sferiche attraverso le funzioni goniometriche inverse, per ottenere la forma originale degli autostati di $\sigma(\theta, \varphi)$

$$\#1779: \hat{e}^{-\hat{i} \cdot \varphi} \cdot \text{SPIN}1\theta\varphi(\theta, \varphi)$$

#1780:La colatitudine θ è

$$\#1781: \theta = \text{ACOS} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right)$$

#1782:L'angolo φ dipende da β e γ , e anche dal quadrante, essendo i valori di ARTAN limitati all'intervallo

#1783:] $-\pi/2, \pi/2$ [, per cui va calcolato considerando i segni di β e γ ;

$$\#1784: \beta > 0 \wedge \gamma > 0 \rightarrow \varphi = \text{ATAN} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)$$

$$\#1785: \beta < 0 \wedge \gamma > 0 \rightarrow \varphi = \pi - \text{ATAN} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)$$

$$\#1786: \beta < 0 \wedge \gamma < 0 \rightarrow \varphi = \text{ATAN} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) + \pi$$

$$\#1787: \beta > 0 \wedge \gamma < 0 \rightarrow \varphi = 2 \cdot \pi - \text{ATAN} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)$$

#1788:

#1789:Nel caso in cui β e γ siano entrambi positivi la trasformazione è

$$\text{\#1790: } \text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \hat{e}^{-i \cdot \text{ATAN}(\gamma/\beta)} \cdot \text{SPIN1}\theta\varphi \left(\text{ACOS} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right), \text{ATAN} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \right)$$

#1791:P.es.

$$\text{\#1792: } [1, 1, 1] \rightarrow \left[\text{ACOS} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \text{ATAN}(1) \right] = \left[\text{ACOS} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\text{\#1793: } \text{SPIN1}(1, 1, 1) = \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)} \right]$$

$$\text{\#1794: } \text{SPIN1}\theta\varphi \left(\text{ACOS} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \frac{\pi}{4} \right) = \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right)} + i \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right)} \right]$$

$$\text{\#1795: } \hat{e}^{-i \cdot \pi/4} \cdot \text{SPIN1}\theta\varphi \left(\text{ACOS} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \frac{\pi}{4} \right) = \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)} \right] = \text{SPIN1}(1, 1, 1)$$

#1796:

#1797:TRASFORMAZIONI TRA SPINORI IN COORDINATE SFERICHE

#1798:Ora possiamo discutere le rotazioni di versori in R3 nelle coordinate sferiche.

#1799:Ogni rotazione in R3 che trasformi un versore iniziale in un altro versore è la composizione di due ro-

#1800:tazioni in piani la cui intersezione è l'asse Oz, la prima per sovrapporre il versore iniziale all'asse

#1801:Oz, la seconda per ruotarlo dall'asse Oz alla posizione finale. I due piani sono quelli definiti dallo

#1802:stesso asse Oz e da ciascuno dei due versori assegnati.

#1803:Costruiamo la trasformazione dalla base [up, dn] allo spinore $\text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi)$ in coordinate sferiche:

$$\text{\#1804: } \begin{bmatrix} \text{up} \cdot \text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi) & \text{up} \cdot \text{SPIN2}\theta\varphi(\theta, \varphi) \\ \text{dn} \cdot \text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi) & \text{dn} \cdot \text{SPIN2}\theta\varphi(\theta, \varphi) \end{bmatrix}$$

#1805:che fornisce

$$\text{\#1806: } \text{TR}\theta\varphi(\theta, \varphi) := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \hat{e}^{i \cdot \varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\hat{e}^{i \cdot \varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

#1807:L'inversa è

#1808:

$$\text{\#1809: } \begin{bmatrix} \text{CONJ}(\text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi)) \cdot \text{up} & \text{CONJ}(\text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi)) \cdot \text{dn} \\ \text{CONJ}(\text{SPIN2}\theta\varphi(\theta, \varphi)) \cdot \text{up} & \text{CONJ}(\text{SPIN2}\theta\varphi(\theta, \varphi)) \cdot \text{dn} \end{bmatrix}$$

#1810:che fornisce

$$\text{\#1811: } \text{invtr}\theta\varphi(\theta, \varphi) := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\hat{e}^{i \cdot \varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\hat{e}^{i \cdot \varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

#1812:

#1813:La trasformazione da $\text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi)$ a $\text{SPIN1}\theta\varphi(x, \omega)$ è#1814: $\text{TRspin}(x, \omega, \theta, \varphi) := \text{TR}\theta\varphi(x, \omega) \cdot \text{invtr}\theta\varphi(\theta, \varphi)$ #1815:che, applicata a $\text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi)$, fornisce

$$\text{\#1816: } \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right), \cos(\omega) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + i \cdot \sin(\omega) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] = \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right), \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \hat{e}^{i \cdot \varphi} \right] = \text{SPIN1}\theta\varphi(x, \omega)$$

#1817:risultato scontato, perchè $\text{invtr}\theta\varphi$ applicata ad uno spinore restituisce up:

#1818: $\text{invtr}\theta\varphi(\theta, \varphi) \cdot \text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi)$

#1819: $[1, 0]$

#1820: mentre $\text{TR}\theta\varphi(x, \omega) \cdot \text{up}$ genera $\text{SPIN1}\theta\varphi(x, \omega)$:

#1821: $\text{TR}\theta\varphi(x, \omega) \cdot \text{up}$

#1822:
$$\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right), e^{i\omega} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]$$

#1823: La $\text{TRspin}(x, \omega, \theta, \varphi)$ corrisponde alla matrice

#1824:
$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\theta}{2}\right) & -i\varphi \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ e^{i\omega} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\theta}{2}\right) & e^{i(\omega - \varphi)} \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

#1825:

#1826: E' possibile trasformare una matrice $\sigma\sigma(\theta, \varphi)$ in un'altra $\sigma\sigma(x, \omega)$:

#1827: $\text{TR}\theta\varphi(x, \omega) \cdot \text{invtr}\theta\varphi(\theta, \varphi) \cdot \sigma\sigma(\theta, \varphi) \cdot \text{TR}\theta\varphi(\theta, \varphi) \cdot \text{invtr}\theta\varphi(x, \omega)$

#1828: Trasformiamo $\sigma\sigma(\pi/3, -\pi/2)$ in $\sigma\sigma(\pi/4, \pi/4)$

#1829: La matrice iniziale è

#1830:
$$\sigma\sigma\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \\ -\frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

#1831: Il risultato previsto è

#1832:
$$\sigma\sigma\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#1833: Dobbiamo calcolare

#1834:
$$\text{TR}\theta\varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{invtr}\theta\varphi\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\sigma\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{TR}\theta\varphi\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{invtr}\theta\varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

#1835:
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#1836:

#1837: RELAZIONE CON $\text{SO}(3)$

#1838: Ogni spinore rappresentato dal versore $[\alpha \ \beta \ \gamma]$ può essere generato applicando $\sigma\sigma$ allo stato 'up':

#1839: $\sigma\sigma(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \text{up}$

#1840:
$$\left[\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} + \frac{i\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \right]$$

#1841: [I versori $[\alpha, \beta, \gamma]$ di R^3 sono rappresentati nella forma spinoriale $[\alpha, \beta + i\gamma]$ di S^2 per poter operare

#1842: con le matrici $\sigma\sigma$; l'ordine delle componenti è sempre z, x, y

#1843: Perciò ad ogni $\sigma\sigma$ corrisponde una rotazione che al versore $[1, 0, 0]$ associa il versore $[\alpha, \beta, \gamma]$; il

#1844: prodotto (da sin. a dx) di $\sigma\sigma(\kappa, \lambda, \mu)$ per l'inversa di $\sigma\sigma(\alpha, \beta, \gamma)$ trasforma $[\alpha, \beta, \gamma]$ in $[\kappa, \lambda, \mu]$.

#1845: L'inversa di una matrice $\sigma\sigma$ è la stessa $\sigma\sigma$:

#1846: $\sigma(\alpha, \beta, \gamma)^2$

#1847:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#1848: Ogni trasformazione di un vettore su R^3 in un altro vettore su R^3 è una rotazione intorno ad un asse
 #1849: ortogonale alla giacitura dei due vettori di un angolo univocamente dato dal loro prodotto scalare nel-
 #1850: l'intervallo $[0, \pi]$; le due matrici σ che operano i due passaggi $[\alpha, \beta + i\gamma] \rightarrow \mu \rightarrow [\kappa, \lambda + i\mu]$ possono
 #1851: essere sostituite rispettivamente da altre due con tutti i parametri opposti, il che lascia invariato
 #1852: il loro prodotto.

#1853: E' evidente che tale corrispondenza è una biiezione tra $\{\sigma\}$ e $SO(3)$.

#1854: Poiché ad un prodotto σ si possono associare due matrici di $SU(2)$, esiste una funzione due \rightarrow uno da
 #1855: $SU(2)$ in $SO(3)$.

#1856: Se $[\alpha, \beta, \gamma]$ non è unitario, si dividono le sue componenti per il suo valore assoluto; la composizione
 #1857: delle due σ applicata a un versore genera ancora un versore:

#1858:
$$\sigma(\kappa, \lambda, \mu) \cdot \sigma(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \left[\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} + \frac{i \cdot \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \right]$$

#1859:
$$\left[\frac{\kappa}{\sqrt{(\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}}, \frac{\lambda}{\sqrt{(\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} + \frac{i \cdot \mu}{\sqrt{(\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)}} \right]$$

#1860: La trasformazione che manda il vettore $[\alpha, \beta, \gamma]$, in generale non unitario, nel vettore $[\kappa, \lambda, \mu]$

#1861: normalizzato all'unità è

#1862:
$$TR\sigma(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu) := \frac{\sigma(\kappa, \lambda, \mu) \cdot \sigma(\alpha, \beta, \gamma)}{|[\alpha, \beta, \gamma]|}$$

#1863: Applicata a $[2, -\sqrt{3}, \sqrt{2}] = [2, -\sqrt{3} + i\sqrt{2}]$ fornisce $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} + i/\sqrt{3}] = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$:

#1864: $TR\sigma(2, -\sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 1, 1)$

#1865:
$$\left[\begin{array}{cc} \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{9} + i \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{1}{9} \right) & - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{27} - \frac{1}{9} + i \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{6}}{27} \right) \\ \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{27} + \frac{1}{9} + i \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{6}}{27} \right) & - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{9} - i \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{1}{9} \right) \end{array} \right]$$

#1866: $TR\sigma(2, -\sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 1, 1) \cdot [2, -\sqrt{3} + i\sqrt{2}]$

#1867:
$$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{3} \right]$$

#1868:

#1869: Abbiamo visto che l'insieme $\{\sigma\}$ coincide con $SU(2)$; ogni σ è l'inversa di se stessa, per cui

#1870: $\{\sigma\}$ coincide con l'insieme $\{TR\sigma\}$ che genera la totalità delle rotazioni in R^3 .

#1871:

#1872: ISOMORFISMO TRA LE ALGEBRE DI LIE ASSOCIATE A $SU(2)$ E A $SO(3)$

#1873: L'algebra di Lie associata a $SO(3)$ è costituita dalle tre matrici di ordine 3

#1874:
$$L_x := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

#1875:
$$L_y := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\#1876: L_z := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#1877:

#1878: Le regole di commutazione hanno la stessa struttura di quelle delle σ :

$$\#1879: \text{com}(L_x, L_y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L_z$$

$$\#1880: \text{com}(L_y, L_z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = L_x$$

$$\#1881: \text{com}(L_z, L_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L_y$$

#1882:

#1883: Valgono le proprietà di bilinearità, che verifichiamo termine a termine:

$$\#1884: \text{COM}(\alpha \cdot L_x + \beta \cdot L_y, L_z) = \alpha \cdot \text{COM}(L_x, L_z) + \beta \cdot \text{COM}(L_y, L_z)$$

$$\#1885: \begin{bmatrix} 0 = 0 & 0 = 0 & -\alpha = -\alpha \\ 0 = 0 & 0 = 0 & -\beta = -\beta \\ \alpha = \alpha & \beta = \beta & 0 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\#1886: \text{COM}(L_z, \alpha \cdot L_x + \beta \cdot L_y) = \alpha \cdot \text{COM}(L_z, L_x) + \beta \cdot \text{COM}(L_z, L_y)$$

$$\#1887: \begin{bmatrix} 0 = 0 & 0 = 0 & \alpha = \alpha \\ 0 = 0 & 0 = 0 & \beta = \beta \\ -\alpha = -\alpha & -\beta = -\beta & 0 = 0 \end{bmatrix}$$

#1888: e l'identità di Jacobi

$$\#1889: \text{com}(L_x, \text{com}(L_y, L_z)) + \text{com}(L_y, \text{com}(L_z, L_x)) + \text{com}(L_z, \text{com}(L_x, L_y))$$

$$\#1890: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#1891:

#1892: Le matrici quadrate che otteniamo dalle L_i eliminando la riga e la colonna nulle sono il prodotto di

#1893: i o $-i$ per σ_y ; infatti σ_y è connessa alle rotazioni infinitesime nel piano

$$\#1894: \text{ROT2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\#1895: \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

#1896: che in $\theta = 0$ diventa

$$\#1897: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i \cdot \sigma_y$$

#1898: oppure, sostituendo a θ l'angolo infinitesimo δ , da $\text{ROT2}(\theta)$ otteniamo

$$\#1899: \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} = I_2 + i \cdot \delta \cdot \sigma_y$$

#1900:

#1901:

#1902:RAPPRESENTAZIONI SPINORIALE E VETTORIALE DELLE ROTAZIONI

#1903:La corrispondenza fra le trasformazioni interne allo spazio degli spinori e le rotazioni in R^3 può essere meglio esplorata analizzando le matrici $TR\theta\varphi$, che già sono espresse in funzione degli angoli θ , φ e che sono in corrispondenza biunivoca con le σ e gli $SPIN1\theta\varphi$.

#1906:Inoltre, è preferibile lavorare su versori $[x, y, z]$ nei quali l'ordine delle componenti corrisponde all'ordinamento usuale per le componenti dei vettori e le coordinate dei punti di R^3 .

#1908:

#1909:La $TR\theta\varphi$ definisce una rotazione in un piano (u, v) dove v è il numero complesso $\beta + i\gamma$; in termini di coordinate cartesiane, $[u, \beta + i\gamma]$ è trasformato in $[x, y, z]$ da una biiezione $R^3 \rightarrow R^3$.

#1911:Passando dalla rappresentazione R^3 a R^4 , si aggiunge una dimensione spaziale, ma l'informazione - il numero di parametri che definiscono l'oggetto 'spin' - è sempre 3. Perciò l'aggiunta di una dimensione definisce un ologramma virtuale, che trasforma lo spazio interno S^2 in uno spazio vettoriale sullo spazio fisico sostituendo alla fase una terza dimensione.

$$\#1915: TR\theta\varphi(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

#1916: $0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq \varphi \leq 2\cdot\pi$

#1917:

#1918:Vi sono infinite matrici che generano $SPIN1\theta\varphi$ a partire da 'up', perché dipendono dai fattori di fase, che sono arbitrari; allo scopo di ottenere calcoli semplici conviene utilizzare la variante

$$\#1920: \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

#1921:nella quale tutte le componenti di $SPIN2\theta\varphi$ (la colonna destra) sono moltiplicate per $\hat{e}^{i\cdot\pi} = -1$

#1922:[solo la colonna a sin. di $TR\theta\varphi$ opera su 'up'; la colonna destra dipende dalla rappresentazione di

#1923: $SPIN2\theta\varphi$. Nella variante che ora utilizziamo, $-SPIN2\theta\varphi$ sostituisce $SPIN2\theta\varphi$]

#1924:Verifichiamo che la variante ora introdotta è equivalente a $TR\theta\varphi$:

$$\#1925: \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot up$$

$$\#1926: \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

#1927:

#1928:Cerchiamo ora due matrici, $A(\theta)$ e $B(\varphi)$, il cui prodotto sia questa variante di $TR\theta\varphi$, in modo da comporre una rotazione nel piano (z, x) con una nel piano (x, y) ; quest'ultima deve contenere elementi complessi.

#1931:Una utile decomposizione in prodotto è

$$\#1932: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{e}^{i\cdot\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \hat{e}^{i\cdot\varphi} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

#1933:La matrice funzione di θ è una rotazione oraria in (z, x) assumendo che l'asse Oz sostituisca Oy nella

#1934:usuale rappresentazione grafica degli assi cartesiani; up è Oz. Infatti

$$\#1935: \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \text{up} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

#1936:Poiché $\theta \in [0, \pi]$ entrambe le componenti del risultato sono positive.

#1937:La matrice complessa funzione di ϕ opera su vettori 2-dim. a coefficienti complessi; ma possiamo appli-

#1938:carla a qualsiasi sottospazio di $C \times C$, come $R \times C$, e analizzare la trasformazione indotta sullo spin

#1939: $[u, x + iy]$, essendo $\text{SPIN}(\theta)$ dipendente da ϕ solo per la componente 'dn'.

#1940:Poiché la componente 'up' cioè $\cos(\theta/2)$ non è interessata dalla trasformazione, questa si limita a mol-

#1941:tiplicare la componente 'dn' per un fattore di fase:

$$\#1942: \hat{e}^{i\phi} \cdot (x + i \cdot y) = x \cdot \cos(\phi) - y \cdot \sin(\phi) + i \cdot (y \cdot \cos(\phi) + x \cdot \sin(\phi))$$

#1943:equivale ad una rotazione antioraria se $\phi > 0$ del vettore $[x, y]$ associato a $x + iy$.

$$\#1944: \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot [x, y] = [x \cdot \cos(\phi) - y \cdot \sin(\phi), y \cdot \cos(\phi) + x \cdot \sin(\phi)]$$

#1945:

#1946:A questo punto la corrispondenza tra la rappresentazione spinoriale e quella vettoriale per le rotazio-

#1947:ni è completa; al prodotto di due matrici $A(\theta)$ e $B(\phi)$ che generano una variante di $\text{TR}\theta\phi$

$$\#1948: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{e}^{i\phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\hat{e}^{i \cdot x} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \hat{e}^{i \cdot x} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

#1949:corrisponde il prodotto delle rotazioni nello spazio R^3 , rispetto agli assi Oy e Oz nell'ordine:

$$\#1950: \text{rotzx}(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\#1951: \text{rotxy}(\phi) := \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#1952:che dà il risultato

$$\#1953: \text{ROTx}(\theta, \phi) := \begin{bmatrix} \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

#1954:che applicata al vettore origine 'up' = $[0, 0, 1]$ genera qualsiasi stato di spin normalizzato a 1 in

#1955:componenti cartesiane, tale che $[x, y, z]$ corrisponda biunivocamente a $[u, \beta + i\gamma]$.

#1956:

#1957:Il passaggio da $[x, y, z]$ a $[u, \beta, \gamma]$ è immediato se si lavora in coordinate sferiche; p. es. il verso-

#1958:re 3D definito da $\theta = \pi/3$, $\phi = \pi/4$,

$$\#1959: \left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$\#1960: \left[\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2} \right]$$

#1961:corrisponde a

$$\#1962: \text{SPIN1}\theta\phi \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\#1963: \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} \cdot i}{4} \right]$$

#1964: Otteniamo una identità numerica tra le due rappresentazioni se applichiamo SPIN1 $\theta\phi$ alla coppia $(2\theta, \phi)$:

$$\#1965: \text{SPIN1}\theta\phi \left(\frac{2 \cdot \pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\#1966: \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6} \cdot i}{4} \right]$$

#1967: In generale, valgono le seguenti identità numeriche tra rappresentazione vettoriale e spinoriale:

$$\#1968: \begin{bmatrix} u(2\theta, \phi) = z(\theta) \\ v(2\theta, \phi) = x(\theta, \phi) + i y(\theta, \phi) \end{bmatrix}$$

#1969:

#1970: Gli autostati delle σ corrispondono biunivocamente a versori secondo lo schema

$$\#1971: \begin{bmatrix} \text{up} & [1, 0] & [0, 0, 1] \\ \text{dn} & [0, 1] & [0, 0, -1] \\ \text{rt} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] & [1, 0, 0] \\ \text{lt} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] & [-1, 0, 0] \\ \text{in} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \right] & [0, 1, 0] \\ \text{ou} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{i \cdot \sqrt{2}}{2} \right] & [0, -1, 0] \end{bmatrix}$$

#1972:

#1973: Ogni versore $[x, y, z]$ può ottenersi applicando il prodotto delle matrici ad $\text{up} = [0, 0, 1]$:

$$\#1974: \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot [0, 0, 1]$$

#1975: in coordinate sferiche si ottiene

$$\#1976: [\cos(\phi) \cdot \sin(\theta), \sin(\phi) \cdot \sin(\theta), \cos(\theta)]$$

#1977:

#1978: Nello spazio fisico, le rotazioni generatrici di 'rt' e 'lt' sono rispettivamente di $\pi/2$ nel piano

#1979: $[z, x]$ applicata a $[0, 0, 1] = \text{'up'}$ e π nel piano $[x, y]$ applicata a $[1, 0, 0] = \text{'rt'}$:

$$\#1980: \text{rotzx} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cdot [0, 0, 1] = [1, 0, 0]$$

$$\#1981: \text{rotxy}(\pi) \cdot [1, 0, 0] = [-1, 0, 0]$$

#1982: Per ottenere 'in' e 'ou' dobbiamo ruotare 'rt' di $\pm\pi/2$ direttamente nel piano (x, y) dello spazio

#1983: fisico:

$$\#1984: \text{rotxy} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cdot [1, 0, 0] = [0, 1, 0]$$

$$\#1985: \text{rotxy} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot [1, 0, 0] = [0, -1, 0]$$

#1986:

#1987:CONVERSIONE TRA RAPPRESENTAZIONE SPINORIALE E VETTORIALE DEGLI SPIN

#1988:z :=

#1989:Il passaggio dalla rappresentazione degli spin nella notazione spinoriale utilizzata in Fisica a quella

#1990:vettoriale nello spazio fisico e viceversa può realizzarsi via coordinate sferiche.

#1991:Indichiamo con [u, v] le componenti dello spinore e con [x, y, z] quelle del versore associato; in quel

#1992:quel che segue tutti i vettori o spinori devono avere modulo = 1.

#1993:Lo spin sia descritto dalla funzione SPIN1θφ uguale a

$$\#1994: \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), e^{i\cdot\phi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

#1995:Dato che

$$\#1996: \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = |u| \wedge e^{i\cdot\phi} = \frac{v}{|v|} \wedge \cos(\phi) = \frac{\text{RE}(v)}{|v|} \wedge \sin(\phi) = \frac{\text{IM}(v)}{|v|}$$

#1997:abbiamo le trasformazioni

$$\#1998: z = \cos(\theta) = 2 \cdot |u|^2 - 1$$

$$\#1999: \sin(\theta) = \sqrt{(-4 \cdot |u|^4 + 4 \cdot |u|^2)} = 2 \cdot \sqrt{(|u|^2 - |u|^4)}$$

$$\#2000: x = \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) = \frac{2 \cdot \sqrt{(|u|^2 - |u|^4)} \cdot \text{RE}(v)}{|v|}$$

$$\#2001: y = \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) = \frac{2 \cdot \sqrt{(|u|^2 - |u|^4)} \cdot \text{IM}(v)}{|v|}$$

#2002:La conversione da S2 a R3 si può quindi ottenere con la funzione:

$$\#2003: \text{SPIN3dim}(u, v) := \left[\frac{2 \cdot \sqrt{(|u|^2 - |u|^4)} \cdot \text{RE}(v)}{|v|}, \frac{2 \cdot \sqrt{(|u|^2 - |u|^4)} \cdot \text{IM}(v)}{|v|}, 2 \cdot |u|^2 - 1 \right]$$

#2004:sotto la condizione $|u|^2 + |v|^2 = 1$.

#2005:Il passaggio attraverso coordinate sferiche implica che il risultato della trasformazione abbia norma

#2006:unitaria: il quadrato del suo valore assoluto vale 1.

$$\#2007: 4 \cdot |u|^2 \cdot (1 - |u|^2) + (2 \cdot |u|^2 - 1)^2$$

$$\#2008: 1$$

#2009:Esempi:

$$\#2010: \text{SPIN3dim}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\#2011: [-1, 0, 0]$$

$$\#2012: \text{SPIN3dim}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\#2013: [1, 0, 0]$$

$$\#2014: \text{SPIN3dim}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{i \cdot \sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\#2015: [0, 1, 0]$$

$$\#2016: \text{SPIN3dim}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{i \cdot \sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\#2017: [0, -1, 0]$$

#2018:Le formule sono singolari in $v = 0$, cioè per lo stato 'up'; per 'dn' abbiamo

#2019:SPIN3dim(0, 1)

#2020: $[0, 0, -1]$

#2021:Trasformiamo

#2022: $\left[1, \frac{\hat{1}}{\sqrt{2}}\right]$

#2023:per eseguire la trasformazione, dividiamo prima per il valore assoluto

#2024: $\left|\left[1, \frac{\hat{1}}{\sqrt{2}}\right]\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

#2025: $\frac{\left[1, \frac{\hat{1}}{\sqrt{2}}\right]}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3} \cdot \hat{1}}{3}\right]$

#2026:SPIN3dim $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\hat{1} \cdot \sqrt{3}}{3}\right)$

#2027: $\left[0, \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right]$

#2028:

#2029:Cerchiamo ora la funzione che realizza il passaggio inverso, $[x, y, z] \rightarrow [u, v]$

#2030:A prescindere da un fattore di fase arbitrario, in coordinate sferiche

#2031: $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}$

#2032: $\cos(\theta) = z$

#2033: $u = \sqrt{\frac{1 + z}{2}}$

#2034:v è il prodotto del suo modulo per il fattore di fase; rispettivamente,

#2035: $|v| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$

#2036: $|v| = \sqrt{\frac{1 - z}{2}}$

#2037: $\hat{e}^{\hat{1} \cdot \varphi} = \frac{x + \hat{1} \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

#2038: $v = \frac{\sqrt{\frac{1 - z}{2}} \cdot (x + \hat{1} \cdot y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

#2039:che è singolare in $x = y = 0$, cioè per 'up' e 'dn'.

#2040:'up' corrisponde a $z = 1 \rightarrow v = 0$; 'dn' a $z = -1 \rightarrow v = \hat{e}^{\hat{1}\varphi}$ dove ' φ ' non è definito in $x = y = 0$.

#2041:Questo non è un problema, se si considera che φ è fisicamente inessenziale; ed è coerente con l'espres-

#2042:sione $\hat{e}^{i\varphi} \sin(\theta/2)$ per la componente 'v' di SPIN1 φ .

#2043:Possiamo ora scrivere la funzione che trasforma $[x \ y \ z]$ in $[u, v]$:

#2044:SPINuv(x, y, z) := $\left[\sqrt{\frac{1 + z}{2}}, \frac{\sqrt{\frac{1 - z}{2}} \cdot (x + \hat{1} \cdot y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]$

#2045:Esempi:

#2046:SPINuv(1, 0, 0)

$$\#2047: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#2048:SPINuv(0, 1, 0)

$$\#2049: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix}$$

#2050:SPINuv(-1, 0, 0)

$$\#2051: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#2052:SPINuv(0, -1, 0)

$$\#2053: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#2054: \text{SPINuv} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\#2055: \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)} \right]$$

$$\#2056: \text{spin3dim} \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)} \right)$$

$$\#2057: \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

#2058:FUNZIONI UTILIZZATE

#2059:

$\text{prscal}(u, v)$	prodotto scalare di 'u' per 'v'
$\text{cspin}(\alpha, \beta, \kappa, \lambda)$	combinazione lineare di due spinori
$\text{comp}(u, v, w)$	$[\text{prscal}(v, u), \text{prscal}(w, u)]$
TRXZ	trasforma [up, dn] in [rt, lt] e viceversa
TRYZ	trasforma [up, dn] in [in, ou]
TRZY	trasforma [in, ou] in [up, dn]
TRXY	trasforma [in, ou] in [rt, lt]
TRYX	trasforma [rt, lt] in [in, ou]
CBXY	trasforma [rt, lt] in [in, ou] nella base [rt, lt]
CBYX	inversa della precedente
$\delta\delta(j, k)$	delta di Kronecker
$\text{levcv}(j, k, m)$	simbolo di Levi-Civita
$\text{COM}(u, v)$	parentesi di commutazione
$\text{COM2}(j, k)$	parentesi di commutazione
$\text{ANTICOM}(j, k)$	parentesi di anticommutazione
$\text{pr}\sigma(j, k)$	prodotto di due matrici di Pauli
$\sigma\sigma2(j, k)$	prodotto di due matrici di Pauli
$\text{ROT1}(\theta)$	matrice di SU(2) generata da σ_z
$\text{ROT2}(\varphi)$	matrice di SU(2) generata da σ_y
$\text{ROT3}(x)$	matrice di SU(2) generata da σ_x
$\sigma n(\alpha, \beta, \gamma)$	proiezione del vettore σ lungo il versore n
$\text{STATOpplus}(\alpha, \beta, \gamma)$	autostato di $\sigma n(\alpha, \beta, \gamma)$ relativo all'autovalore 1
$\text{STATOminus}(\alpha, \beta, \gamma)$	autostato di $\sigma n(\alpha, \beta, \gamma)$ relativo all'autovalore -1
$\text{PR}\sigma n(\theta)$	prodotto di due matrici σn
$\text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma)$	autostato di $\sigma n(\alpha, \beta, \gamma)$ relativo all'autovalore 1
$\text{COS_ANG}(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu)$	coseno dell'angolo formato da spinori associati ai versori $[\alpha, \beta, \gamma]$ e $[\kappa, \lambda, \mu]$
$\text{SPIN2}(\alpha, \beta, \gamma)$	autostato di $\sigma n(\alpha, \beta, \gamma)$ relativo all'autovalore -1
$\text{TRZN}(\alpha, \beta, \gamma)$	trasforma [up, dn] in [SPIN1, SPIN2]
$\text{trnz}(\alpha, \beta, \gamma)$	inversa di TRZN(α, β, γ)
$\text{TRgen}(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu)$	trasforma $\text{SPIN1}(\alpha, \beta, \gamma)$ in $\text{SPIN1}(\kappa, \lambda, \mu)$
$\text{InvTRgen}(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu)$	inversa di TRgen($\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu$)
$\text{punto}(\theta, \varphi)$	versore nello spazio in coordinate sferiche
$\sigma\sigma(\theta, \varphi)$	proiezione del vettore σ lungo il versore definito dalle coordinate sferiche θ e φ
$\text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi)$	autostato di $\sigma\sigma(\theta, \varphi)$ relativo all'autovalore 1
$\text{SPIN2}\theta\varphi(\theta, \varphi)$	autostato di $\sigma\sigma(\theta, \varphi)$ relativo all'autovalore -1
$\text{TR}\theta\varphi(\theta, \varphi)$	trasforma [up, dn] in [SPIN1 $\theta\varphi$, SPIN2 $\theta\varphi$]
$\text{invtr}\theta\varphi(\theta, \varphi)$	inversa di TR $\theta\varphi(\theta, \varphi)$
$\text{TRspin}(x, \omega, \theta, \varphi)$	trasforma $\text{SPIN1}\theta\varphi(\theta, \varphi)$ in $\text{SPIN1}\theta\varphi(x, \omega)$
$\text{TR}\sigma\sigma(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu)$	trasforma il vettore $[\alpha, \beta, \gamma]$ nel versore $[\kappa, \lambda, \mu]$
$\text{rotzx}(\theta)$	rotazione di un angolo θ intorno a Oy in $R3$
$\text{rotxy}(\varphi)$	rotazione di un angolo φ intorno a Oz in $R3$
$\text{ROTxyz}(\theta, \varphi)$	composizione di $\text{rotzx}(\theta)$ e $\text{rotxy}(\varphi)$
$\text{SPIN3dim}(u, v)$	trasforma lo spinore [u,v] in un versore in $R3$
$\text{SPINuv}(x, y, z)$	trasforma un vettore $[\alpha, \beta, \gamma]$ in $R3$ nello spinore [u, v]