CALCOLO COMBINATORIO

Il calcolo combinatorio ha come scopo immediato il calcolo del numero dei sottoinsiemi di un insieme dato, che soddisfino certe proprietà. Se i sottoinsiemi in questione differiscono tra di loro per gli elementi che ne fanno parte e per l'ordine in cui sono disposti, e se ogni elemento compare al più una sola volta, si parla di *disposizioni semplici.*
Se i sottoinsiemi differiscono per gli elementi e per l'ordine, ma ogni elemento può comparire più di una volta (come nella sequenza AAB) , si parla di *disposizioni con ripetizione.*
Se l'ordinamento non ha importanza, cioè se i sottoinsiemi differiscono solo per gli elementi, e se ogni elemento può comparire una sola volta, si parla di *combinazioni semplici.*
Infine, se i sottoinsiemi si distinguono solo per gli elementi e ogni elemento può comparire più di una volta, si parla di *combinazioni con ripetizione.*

Il calcolo combinatorio ha applicazioni in algebra (coefficienti binomiali) e nel calcolo delle probabilità (distribuzione binomiale).

Indice

1. **Disposizioni semplici**. - supponiamo che I sia un insieme di N elementi distinti es. i primi N numeri naturali positivi [1 , 2 , 3 , 4 , ...]
Una *disposizione semplice di N elementi di classe K* è un sottoinsieme di K elementi, con $1 \leq K \leq N$, tale che
1. due disposizioni semplici distinte con gli stessi elementi differiscono per l'ordine;
2. ogni elemento compare una sola volta – *esempi*.

Si tratta di calcolare il numero delle disposizioni semplici costituite da K elementi presi in un insieme di N elementi, numero indicato dal simbolo $D_{N,K}$.

Se $K = 1$ questo numero è N, dato che evidentemente il numero delle sequenze costituite da un solo elemento coincide con il numero degli elementi dell'insieme I_N .

Se $K = 2$ è $D_{N,2} = N (N - 1)$. Infatti, il primo elemento della sequenza può essere scelto in modo del tutto arbitrario, e quindi le scelte possibili sono N ; dato che lo stesso elemento non può essere ripetuto in una disposizione semplice, il secondo sarà diverso dal primo e può essere scelto solo in $N - 1$ modi.

Se $K = 3$ è $N (N - 1) (N - 2)$, ecc.

Generalizzando si ha $D_{N,K} = N (N - 1) (N - 2) ....(N - K + 1)$ [formula 1]

Si può pensare a una disp. semplice come una stringa di K posti che devono essere occupati da elementi distinti presi in un insieme di N elementi.

Il primo elemento si può scegliere in N modi perché è arbitrario, il secondo in $N - 1$ modi perché gli elementi non si ripetono e quindi le scelte si riducono a $N - 1$, ecc. L'ultimo elemento si può determinare in $N - K + 1$ modi.

Formula ricorsiva per il calcolo delle disposizioni semplici.
Poiché $(N - 1) (N - 2)...(N - K + 1) = D_{N-1,K-1}$, abbiamo che $D_{N,K} = N\cdot D_{N-1, K-1}$
[form. 2]

2. **Concetto di Fattoriale**

Il fattoriale di un numero naturale $N \geq 2$ è il prodotto di N per tutti i suoi predecessori, fino a 1.
Quindi $N \geq 2 \Rightarrow N! = N (N-1) (N - 2) .... 1$ [formula 3]
Es. $2! = 2\cdot 1 = 2$; $3! = 3\cdot 2\cdot 1$; $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ ecc.
Se $N = 0$, abbiamo $0! = 1$ per definizione.
Se $N = 1$, abbiamo $1! = 1$ per definizione.
Per ogni $N \geq 2$ vale la *regola ricorsiva* $N! = N\cdot (N - 1)!$ [formula 4]
Cioè il fattoriale del numero naturale $N \geq 2$ è dato dal prodotto di N per il fattoriale del suo predecessore immediato.

3. **Numero delle permutazioni di un insieme**. Le permutazioni di un insieme di N elementi differiscono tra di loro per l'ordine. Per esempio, date tre lettere [*a* , *b* , *c*] , le possibili permutazioni di un insieme di tre lettere saranno
a b c acb bac bca cab cba in totale sei.
Le permutazioni corrispondono alle disposizioni semplici con K = N. Infatti si tratta di trovare quanti sono gli insiemi di N elementi distinti differenti per l'ordine che possono essere ottenuti a partire da un insieme di N elementi.

In base al calcolo generale della formula 1 , si ottiene $D_{N,N} = N (N - 1) (N - 2) (N - N + 1) = N (N - 1) (N - 2)...1$ vale a dire il fattoriale del numero N .

Quindi otteniamo $D_{N,N} = N!$ [formula 5]

Formula per il calcolo delle disposizioni semplici $D_{N,K}$, usando i fattoriali

Dalla formula 1 per cui si ha $D_{N,K} = N (N - 1) (N - 2) ...(N - K + 1)$, se moltiplichiamo $D_{N,K}$ per il fattoriale di (N – K) otteniamo

$N (N - 1) (N - 2) ...(N - K + 1) \cdot (N - K) (N - K - 1)...1$ e quindi il fattoriale di N .

Ne segue che $D_{N,K} = \dfrac{N!}{(N-K)!}$ [formula 6]

4. **Disposizioni con ripetizione**.

Le disposizioni con ripetizione possono contenere lo stesso elemento più di una volta, ma differiscono tra di loro per l'ordine dei loro elementi.
Per esempio, se l'insieme I è la terna [a , b , c] , le disposizioni con ripetizione costituite da 2 elementi – cioè le coppie con ripetizione – saranno
ab ba aa bb

Se consideriamo le disposizioni con ripetizione come stringhe di K elementi non necessariamente diversi ma distinte per l'ordine, scelti in un insieme di N elementi, possiamo calcolare il loro numero osservando che ogni posto della stringa può essere occupato in N modi, essendo la scelta dell'elemento che lo occupa del tutto arbitraria.

Il primo posto può essere occupato in N modi e così il secondo ecc., quindi se K = 1 il numero delle disposizioni con ripetizione è N , se K = 2 è $N \cdot N$ cioè N^2 , se K = 3 è N^3 , in generale è N^K . [formula 7]

5. **Combinazioni semplici**

Le combinazioni semplici di K elementi presi in un insieme di N elementi differiscono solo per gli elementi scelti e non per l'ordine. Praticamente, il numero delle combinazioni semplici coincide con il numero di sottoinsiemi aventi K elementi di un insieme che ha N elementi.
Per calcolare il numero delle combinazioni semplici, dobbiamo chiederci quante sono le disposizioni semplici che corrispondono a una sola combinazione semplice. Per esempio, una combinazione di 3 elementi *a b c* corrisponde a sei disposizioni semplici:
a b c - a c b - b a c - b c a - c a b - c b a

Evidentemente le singoli disposizioni semplici associate a una combinazione sono le permutazioni di quella combinazione, per cui *ad ogni disposizione semplice di K elementi corrispondono K! permutazioni* .
Perciò il numero delle combinazioni semplici di K elementi presi in un insieme di N elementi (indicato simbolicamente con $C_{N,K}$) è il rapporto tra il numero delle disposizioni $D_{N,K}$ diviso per il fattoriale di K .
Quindi si ottiene la formula

$$C_{N,K} = \frac{D_{N,K}}{K!} \qquad \text{[formula 8]}$$

Se si considera che per la formula [6] abbiamo $D_{N,K} = \dfrac{N!}{(N-K)!}$, passando alle combinazioni semplici dobbiamo dividere ancora per K! e quindi si ottiene

$$C_{N,K} = \frac{N!}{K!\cdot(N-K)!} \qquad \text{[formula 9]}$$

L'espressione a secondo membro è nota come ***coefficiente binomiale*** ed è indicata brevemente dal simbolo $\binom{N}{K}$, per cui $\dfrac{N!}{K!\cdot(N-K)!} = \binom{N}{K}$ che si legge " N su K "

I coefficienti binomiali hanno alcune proprietà; p.es. vale la formula

$$\binom{N}{K} = \binom{N}{N-K}$$

che si dimostra sostituendo N – K al posto di K nella formula [9]
Inoltre vale la proprietà

$$\binom{N}{K} = \binom{N-1}{K} + \binom{N-1}{K-1}$$

Altre proprietà

$$\binom{N}{0} = \frac{N!}{0!\cdot(N-0)!} = \frac{1}{0!} = 1 \text{ in quanto } 0! = 1$$

$$\binom{N}{N} = \frac{N!}{N!\cdot(N-N)!} = \frac{N!}{N!\cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1\ .$$

$$\binom{N}{1} = \frac{N!}{1!\cdot(N-1)!} = \frac{N\cdot(N-1)!}{(N-1)!} = \mathrm{N} = \binom{N}{N-1}$$

* Dimostrazione della formula $\begin{pmatrix} N \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N-1 \\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N-1 \\ K-1 \end{pmatrix}$

supponiamo che l'insieme I contenga N – 1 elementi; quindi il numero delle combinazioni composte di K elementi presi in I sarà $\begin{pmatrix} N-1 \\ K \end{pmatrix}$. Ci chiediamo quante combinazioni in più, sempre costituite da K elementi , si ottengono se si aggiunge un nuovo elemento x all'insieme I .
Le combinazioni aggiunte differiscono dalle precedenti perché contengono l'elemento x al posto di un qualche elemento appartenente alle precedenti. Perciò il loro numero è quello dei possibili sottoinsiemi costituiti da K-1 elementi (oltre a x ogni combinazione deve avere K – 1 elementi) scelti nell'insieme I , che aveva solo N – 1 elementi , sarà $\begin{pmatrix} N-1 \\ K-1 \end{pmatrix}$. Perciò il numero totale delle combinazioni costituite da K elementi presi da un insieme di N è dato da
$\begin{pmatrix} N-1 \\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N-1 \\ K-1 \end{pmatrix}$ come si voleva dimostrare.

6. **Formula del binomio di Newton**

Questa formula permette di calcolare i coefficienti dello sviluppo di una qualsiasi potenza del binomio $a + b$, cioè di $(a + b)^n$. Sviluppando $(a + b)^n$ si ottiene una somma di $n + 1$ monomi la cui espressione generale è $a^{n-k} \cdot b^k$, con k variabile tra 0 e n , ciascuno dei quali è moltiplicato per un coefficiente $B_{n,k}$ dipendente dall'esponente n e dall'indice k. Perciò

$$(a + b)^n \quad = \quad \sum_0^n B_{n,k} \cdot a^{n-k} b^k$$

La formula del binomio serve appunto per calcolare i coefficienti $B_{n,k}$.
Questi possono essere calcolati facilmente nel caso $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$; infatti abbiamo
$(a + b)^2 \;=\; a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^3 \;=\; a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a + b)^4 \;=\; a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
………
E' chiaro, da questi sviluppi, che i coefficienti sono simmetrici rispetto al valore centrale, in quanto $B_{n,k} = B_{n,n-k}$.
Per calcolare i termini $B_{n,k}$ si procede nel modo seguente. Supponiamo di scrivere $(a + b)^n$ come $(a + b) (a + b) (a + b) \ldots (a + b)$ n volte; ogni singolo termine viene calcolato scegliendo in ogni singolo binomio la lettera a o la lettera b . Se b viene scelto k volte su un insieme di n possibili scelte, il coefficiente del monomio $a^{n-k} b^k$ equivale al numero di sequenze di n elementi costituite dalle lettere a e b nelle quali b compare k volte ; questo procedimento equivale a costruire, a partire da un insieme di n elementi, tutti i suoi sottoinsiemi di k elementi , tali che l'ordine in cui sono considerati non ha importanza perché sono indicati dalla stessa lettera e quindi sono equivalenti (se si scambiano tra loro i termini b in una sequenza come $a\ b\ b\ a\ b\ a\ a\ a\ b \ldots$ si riottene la stessa sequenza). Le sequenze sono quindi *combinazioni semplici di n elementi di classe k*. Perciò otteniamo $B_{n,k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. La formula di Newton quindi è

$$(a + b)^n \quad = \quad \sum_0^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{n-k} b^k \quad .$$

E' interessante notare che questa formula corrisponde alla costruzione nota come *triangolo di Pascal*, nel quale i singoli coefficienti vengono calcolati ricorsivamente disponendoli lungo delle linee ordinate, in modo che ogni termine è calcolato come somma dei due termini adiacenti della linea precedente:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

La linea n – esima contiene i coefficienti di $(a + b)^n$ (la prima corrisponde a $n = 0$) e, indicato con $B_{n,k}$ il termine che occupa il posto k nella linea di ordine n, con k che parte da zero, si vede che – escludendo gli estremi sempre uguali a 1 – è sempre dato da

$$B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + B_{n-1,k}$$

che corrisponde alla legge ricorsiva $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ prima dimostrata.

7. **Distribuzione binomiale**

Supponiamo di effettuare una serie di *prove* o misure, ognuna delle quali può avere solo due esiti diversi e incompatibili – cioè i due risultati si escludono reciprocamente, e possiamo indicarli come SI' / NO , V / F , 0 / 1 , successo / insuccesso , ecc. Le probabilità che i due eventi si verifichino sono quindi p e $1-p$, con $0 < p < 1$. Il problema consiste nel calcolare la probabilità che, in una serie di n prove, l'evento P con probabilità p in ogni prova avvenga k volte nel corso della serie delle n prove. Osserviamo anzitutto che la probabilità totale di una particolare successione di k esiti favorevoli a P su n prove è data da $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ oppure $p^k \cdot q^{n-k}$ dove $q = 1-p$ è la probabilità dell'evento contrario nella singola prova. Si tratta quindi di calcolare in quanti modi può verificarsi che P accada k volte. Se consideriamo la serie delle prove come un insieme di n elementi, l'evento "P accade k volte" definisce un sottoinsieme di k elementi (le prove in cui si è verificato P) nel quale l'ordine non ha importanza (due prove distinte che hanno dato esito P differiscono per il tempo, ma sono logicamente equivalenti). Perciò il numero delle sequenze di n prove con k esiti favorevoli a P è uguale al numero delle combinazioni semplici di n elementi di classe k , cioè $\binom{n}{k}$, tutte equiprobabili. Perciò la probabilità che P si verifichi k volte in n prove è data da

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Si può osservare che tale formula implica l'identità $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = 1$. Infatti tale identità significa che la somma delle probabilità che l'evento P si verifichi k volte, con $0 \le k \le n$, è uguale a 1 . Questa conclusione è coerente con la formula di Newton (pag. 5)

$$(a + b)^n = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k$$

Infatti ponendo $b = p$ e $a = 1 - p$ si ottiene l'identità $1^n = 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, con $0 < p < 1$.

8. **Insieme delle parti**.

In particolare, se $p = \frac{1}{2}$, si ha l'identità

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

che rappresenta il *numero dell'insieme delle parti*, cioè di tutti i sottoinsiemi di un insieme di n elementi, compreso l'insieme vuoto ($k = 0$) e lo stesso insieme dato ($k = 0$). Infatti, $\binom{n}{k}$ è proprio il numero dei sottoinsiemi contenenti k elementi inclusi in un insieme, distinti solo per gli elementi e non per l'ordine. Il numero di tutte le parti di un insieme è quindi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.