

## DISUGUAGLIANZE E DISEQUAZIONI

### Indice

Premessa.....	3
Regole generali .....	3
1. Significato dei termini “maggiore” e “ minore” .....	3
2. Proprietà transitiva delle disuguaglianze .....	3
3. Regola del trasporto .....	4
4. Regola del prodotto .....	4
5. Regole generali immediate .....	4
Operazioni sulle disuguaglianze .....	5
1. Passaggio al reciproco.....	5
2. Elevamento a potenza .....	6
Disuguaglianze tra radicali.....	8
1. Radici di indice pari .....	8
2. Radici di indice dispari .....	9
3. Potenze e radici n-esime di numeri positivi .....	9
4. Potenze con esponente razionale.....	9
5. Reciproci di potenze.....	10
Altri metodi .....	10
1. Scomposizione in fattori .....	10
2. Funzioni monotone .....	11
Disuguaglianze notevoli.....	12
1. Disuguaglianze numeriche, inidentità e disequazioni.....	12
2. Disuguaglianze numeriche .....	13
3. Media aritmetica di due numeri reali .....	13
4. Media geometrica di due numeri reali .....	14
5. Confronto tra media aritmetica e media geometrica di due numeri reali positivi.....	14
6. Media armonica.....	14
7. Media aritmetica di n numeri reali .....	15
8. Media geometrica di n numeri reali positivi .....	15
9. Media armonica di n numeri reali positivi .....	16
Valori assoluti .....	16
1. Proprietà fondamentali .....	16
2. Confronto tra modulo della somma e somma dei moduli di due numeri reali.....	17
3. Disuguaglianza fondamentale .....	17
Altre disuguaglianze notevoli .....	18
1. Confronto tra potenze di somme o differenze e somme o differenze di potenze.....	18
2. Radicali di somme e differenze.....	19
3. Disuguaglianza triangolare [dimostrazione algebrica] .....	20
4. Disuguaglianza $a^2 + b^2 \pm ab > 0$ .....	21
5. Disuguaglianza $\sum_{k=0}^{2n} a^{2n-k} \cdot b^k > 0$ .....	21
6. Il metodo di scomposizione in fattori .....	23
7. Discussione di disuguaglianze algebriche.....	23
8. Altre inidentità notevoli con numeri naturali .....	24
Segno dei polinomi dipendenti da una sola variabile reale.....	25

1. Polinomi di primo grado .....	25
2. Polinomi di secondo grado.....	26
3. Polinomi di grado superiore al secondo .....	27
Alcuni tipi notevoli di disequazioni .....	27
1. Disequazioni binomie .....	28
2. Disequazioni con radicali quadratici.....	28
3. Disequazioni di vario tipo con radicali quadratici .....	29
Disequazioni con valori assoluti .....	30
1. Disequazioni elementari con valore assoluto.....	31
2. Disequazione $ x - c  < \delta$ .....	33
3. Altri metodi .....	33
4. Passaggio al reciproco.....	34
5. Metodo della discussione del segno.....	34
6. Disequazioni e intervalli numerici .....	35
Disuguaglianze con vettori.....	35
1. Il modulo del prodotto scalare .....	35
2. Disuguaglianza triangolare .....	36
3. Disuguaglianza triangolare per i numeri complessi.....	36
Rappresentazione grafica di una disequazione in una sola variabile .....	37
1. Il metodo grafico .....	37
2. Disequazioni di secondo grado .....	39
3. Valori assoluti .....	40
4. Funzioni monotone .....	41
5. Disequazioni del tipo $f(x) > g(x)$ : considerazioni generali .....	42
6. Disequazioni con radicali quadratici.....	43
7. Disequazioni frazionarie .....	46
8. Omografica in valore assoluto .....	47
9. Condizioni generali per la risoluzione di disequazioni algebriche .....	48
10. Disequazioni trigonometriche miste .....	49
11. Una disequazione con valore assoluto .....	50
Disequazioni in due variabili .....	51
1. Caratteristiche generali .....	51
2. Disequazioni lineari in x,y .....	51
3. Disequazioni algebriche in x,y.....	52

## Premessa

Le disuguaglianze costituiscono un argomento trattato nelle scuole medie superiori soprattutto a livello operativo, e con largo ricorso a metodi grafici. Ciò implica che la loro trattazione passi attraverso numerosi esempi, ciascuno dei quali richiede proprietà particolari (le disequazioni del tipo  $\sqrt{q} < p$  si risolvono in un certo modo per questi motivi, le disequazioni frazionarie si svolgono secondo questo schema particolare ecc...) col risultato che – molto spesso – il tutto si riduce a un insieme di procedimenti particolari, e dopo un po' di tempo si ricordano al più i metodi per risolvere le disequazioni di tipo più frequente. In realtà, la dilatazione irrazionale dei programmi scolastici va a scapito di un migliore approccio all'argomento, che sarebbe invece opportuno esaminare da un punto di vista deduttivo. In effetti, disuguaglianze e disequazioni soddisfano proprietà generali deducibili dalla sola definizione di *numero reale maggiore / minore* di un altro numero reale. Tutte le proprietà delle disuguaglianze tra numeri reali discendono da questa definizione, dalle regole sui segni e dalle condizioni sul campo di esistenza delle funzioni reali di variabile reale. Si tratta quindi di evidenziare questo insieme di regole iniziali, dalle quali si possa dedurre il metodo risolutivo adatto a ogni singolo caso particolare.

## Regole generali

### 1. Significato dei termini “maggiore” e “minore”

L'insieme  $\mathfrak{R}$  dei numeri reali è un insieme ordinato; vale a dire, per ogni coppia di numeri reali distinti  $a$  e  $b$  deve essere  $a$  maggiore di  $b$  ( $a > b$ ) o (aut)  $a$  minore di  $b$  ( $a < b$ ). Si dice che  $a$  è maggiore di  $b$  se la differenza  $a - b$  è un numero reale strettamente positivo, e che  $a$  è minore di  $b$  se  $a - b$  è strettamente negativo.

Inoltre sono utili le seguenti definizioni:

due disuguaglianze contenenti indeterminate (cioè lettere) si dicono *equivalenti* se sono entrambe vere o entrambe false quando le stesse lettere sono sostituite dagli stessi numeri. Per es.,  $a^2 > b^2$  e  $|a| > |b|$  sono equivalenti, perché ogni coppia ordinata  $(a,b)$  che soddisfa la prima soddisfa anche la seconda, e viceversa. L'equivalenza coincide con la coimplicazione o implicazione reciproca, per cui potremo scrivere  $\forall a, \forall b \in \mathfrak{R} \quad a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|$ ;

due disuguaglianze si dicono *equivalse* se sono orientate nello stesso senso (per.  $A > B$  e  $C > D$ ), *controverse* se orientate in senso opposto (come  $A > B$  e  $C < D$ ).

Dalla prima definizione discendono immediatamente alcune proprietà fondamentali delle disuguaglianze, quali:

1.  $a > b \Leftrightarrow b < a$  ; infatti  $a - b \in \mathfrak{R}^+ \Leftrightarrow b - a = -(a - b) \in \mathfrak{R}^-$  ;
2. per ogni  $a$  reale si ha  $a^2 \geq 0$  ;
3.  $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$  e  $-a^2 < 0$  .

### 2. Proprietà transitiva delle disuguaglianze

Se  $a > b$  e  $b > c$  allora  $a > c$ . Infatti, per ipotesi  $a - b \in \mathfrak{R}^+$  e  $b - c \in \mathfrak{R}^+ \Rightarrow (a - b) + (b - c) \in \mathfrak{R}^+$  in quanto la somma di numeri reali positivi è ancora un numero reale positivo;  $(a - b) + (b - c) = a - c \in \mathfrak{R}^+ \Rightarrow a > c$ .

### 3. Regola del trasporto

Aggiungendo o sottraendo lo stesso termine ai due membri della stessa disuguaglianza, si ottiene una disuguaglianza equivalente a quella data; vale a dire, per ogni terna di numeri reali  $a, b, c$ , abbiamo [proprietà di *monotonia della somma*]

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$$

Dimostriamo che  $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ ; l'implicazione contraria  $a + c > b + c \Rightarrow a > b$  è una conseguenza della regola stessa, perché sarebbe dimostrata sommando  $-c$  a entrambi i membri della disuguaglianza  $a + c > b + c$ .

Abbiamo per ipotesi  $(a - b) \in \mathfrak{R}^+$ ; dato che  $(a + c) - (b + c) = a - b$ , si deduce che anche  $(a + c) - (b + c) \in \mathfrak{R}^+$  e quindi  $a + c > b + c$ .

Questa proprietà implica la **regola del trasporto** (valida anche per le uguaglianze), per la quale data una disuguaglianza si ottiene una disuguaglianza equiversa spostando uno o più termini dal primo membro al secondo, cambiandolo di segno, o viceversa. P.es. da  $a + b > c$  si può ottenere  $a > c - b$ ; formalmente, il passaggio si effettua sommando  $-b$  a entrambi i membri della disuguaglianza.

### 4. Regola del prodotto

Se  $k$  è un numero reale strettamente positivo, allora

$$a > b \Rightarrow ka > kb.$$

Questa prima **regola del prodotto** è una conseguenza delle regole sui segni. Infatti, per le ipotesi  $k(a - b)$  è un prodotto di numeri positivi e quindi positivo esso stesso;  $k(a - b) \in \mathfrak{R}^+ \Rightarrow ka - kb \in \mathfrak{R}^+ \Rightarrow ka > kb$ . Questa regola implica anche il passaggio inverso

$$ka > kb \Rightarrow a > b$$

che si ottiene applicando la stessa regola moltiplicando i termini dell'antecedente per  $\frac{1}{k}$ . Quindi la regola generale del prodotto per  $k$  strettamente positivo è

$$a > b \Leftrightarrow ka > kb$$

Viceversa, se  $k < 0$  allora  $a > b \Rightarrow ka < kb$ . Infatti se  $k \in \mathfrak{R}^- \Rightarrow k(a - b) \in \mathfrak{R}^-$  e quindi  $ka - kb \in \mathfrak{R}^- \Rightarrow ka < kb$ . In conclusione, moltiplicando entrambi i membri di una disuguaglianza per un numero positivo si ottiene una disuguaglianza equiversa a quella data, moltiplicandoli per un numero negativo si ottiene una disuguaglianza controversa.

La stessa conclusione vale se si dividono i membri di una disequazione per lo stesso numero  $k$  diverso da 0, dato che ciò equivale a moltiplicare per  $\frac{1}{k}$ .

### 5. Regole generali immediate

Come conseguenza della definizione di *maggiore / minore*, si possono dimostrare alcune regole generali di minore importanza, quali:

a) se  $a < b$  e  $c < d$  allora  $a + c < b + d$ . Infatti, per la proprietà di monotonìa della somma abbiamo  $a + c < b + c$  e  $c + b < d + b$ . Applicando la propr. transitiva otteniamo  $a + c < b + d$ .

Questa proprietà implica che, date due disuguaglianze equiverse, si ottiene una terza disuguaglianza equiversa sommando i rispettivi membri.

b) se  $a < b$  e  $c < d$  allora  $a - d < b - c$ . Si può dedurre applicando la proprietà precedente e sottraendo  $(c + d)$  da entrambi i membri di  $a + c < b + d$ :

$$a + c - c - d < b + d - c - d \Rightarrow a - d < b - c.$$

Oppure, in base alla definizione di maggiore/minore: sappiamo che  $a - b$  e  $c - d$  sono entrambi negativi; quindi  $(a - b) + (c - d) = (a - d) - (b - c)$  è negativo  $\Rightarrow a - d < b - c$ .

c) se  $a, b, c, d$  sono numeri reali positivi allora da  $a > b$  e  $c > d$  segue  $ac > bd$ . Applicando la regola del prodotto abbiamo, moltiplicando per  $c$ ,  $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$  e moltiplicando per  $b$  abbiamo  $c > d \Rightarrow b \cdot c > b \cdot d$ , e quindi  $a \cdot c > b \cdot d$  per la proprietà transitiva.

d) regola del *prodotto incrociato*: se  $b$  e  $d$  sono numeri reali concordi in segno, allora

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$$

Essendo per ipotesi  $bd > 0$ , moltiplicando entrambi i membri di  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  per  $bd$  otteniamo  $ad >$

$bc$ ; viceversa, dividendo  $ad > bc$  per  $bd$  otteniamo  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ .

Se invece  $b$  e  $d$  sono discordi, abbiamo  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$ .

e) alcune trasformazioni sono quasi immediate. Per es.  $b > a \Rightarrow a - b < 0$ ;  $b > a \Rightarrow -b < -a$  (come caso particolare del prodotto, con  $k = -1$ ); inoltre:

f) se il prodotto di due fattori è positivo, i due fattori hanno lo stesso segno:  $ab > 0 \Rightarrow (a < 0) \wedge (b < 0) \vee (a > 0) \wedge (b > 0)$ ; al contrario, se il prodotto di due fattori è negativo,  $a$  e  $b$  hanno segno diverso:  $ab < 0 \Rightarrow (a < 0) \wedge (b > 0) \vee (a > 0) \wedge (b < 0)$ .

[ **Metodi generali di dimostrazione** – In generale, per dimostrare una disuguaglianza si parte da una o più disuguaglianze già dimostrate. Quindi, per provare  $B$  possiamo dimostrare che  $A$  implica  $B$  ( $A \Rightarrow B$ ), essendo  $A$  una disuguaglianza vera. Questo è il metodo fondamentale di ogni dimostrazione. Talvolta si usa la proprietà transitiva, per cui si ottiene che  $a > b$  in base a  $a > c$  e  $c > b$ . In molti casi, tra due disuguaglianze  $P$  e  $Q$  vi è complicazione ( $P \Leftrightarrow Q$ ): in questo caso, se  $P$  è già stata dimostrata e vogliamo derivare  $Q$ , possiamo trasformare  $Q$  e verificare, attraverso una serie di disuguaglianze equivalenti, che  $Q$  è logicamente equivalente a  $P$  ].

## Operazioni sulle disuguaglianze

### 1. Passaggio al reciproco

1. Il segno di  $\frac{1}{a}$  è lo stesso di  $a$ .

2. Non esiste una *regola generale* per dedurre una disuguaglianza tra  $\frac{1}{a}$  e  $\frac{1}{b}$  a partire da  $a > b$ ; si ottengono regole diverse a seconda dei segni di  $a$  e  $b$ . Se  $a$  e  $b$  sono entrambi positivi, passando ai reciproci si ottiene una disuguaglianza controversa:  $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

Se  $a > 0 > b$  allora  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  (per la conservazione del segno); quindi, il verso della disuguaglianza si conserva passando al reciproco. Invece, se  $0 > a > b$ , si ottiene di nuovo  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ . La regola generale può quindi essere espressa nel modo seguente: *se  $a$  e  $b$  sono concordi la disuguaglianza tra i rispettivi reciproci è controversa rispetto a quella tra  $a$  e  $b$ ; se  $a$  e  $b$  sono discordi è equiversa*. In simboli:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} & \text{se } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} & \text{se } ab < 0 \end{cases}$$

E' possibile verificare queste regole utilizzando *esempi numerici*. Sebbene il singolo esempio numerico non sia in sé una dimostrazione, tuttavia procedere attraverso esempi numerici può servire per definire sotto quali condizioni le regole si possono applicare. P.es., consideriamo i seguenti esempi numerici:

$$5 > 3 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{3} \quad ; \quad 5 > -3 \Rightarrow \frac{1}{5} > -\frac{1}{3}; \quad -3 > -5 \Rightarrow -\frac{1}{3} > -\frac{1}{5}$$

che considerano tutte le possibili scelte di segno: i tre esempi suggeriscono proprio la regola del reciproco.

In particolare, nel caso in cui i due termini siano entrambi positivi, la disuguaglianza tra i reciproci è controversa. Questo risultato si può anche ottenere per via logica, osservando che il reciproco di un numero reale positivo è inversamente proporzionale al numero stesso: quindi, se  $a > b$ , dovrà essere  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  e viceversa.

*Dimostrazione generale.* Scriviamo  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ ; il segno del rapporto è positivo se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno:  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \in \mathfrak{R}^+ \Leftrightarrow (b-a) > 0 \wedge ab > 0 \vee (a-b) > 0 \wedge ab < 0$ . Quindi  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow b > a$  se  $a$  e  $b$  hanno lo stesso segno,  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow a > b$  se hanno segno opposto ( $a > 0 > b$ ).

## 2. Elevamento a potenza

Bisogna distinguere tra potenze di esponente pari e potenze di esponente dispari.

Elevando un numero diverso da zero a una potenza di esponente pari, si ottiene un risultato strettamente positivo. Quindi, per ogni  $a \neq 0$ ,  $a^2 > 0$ . *Da questa disuguaglianza non si può dedurre  $a > 0$ , ma solo  $a \neq 0$ ; perciò*

$$a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$$

e, ovviamente,

$$\forall k \in \mathbb{N}, a \neq 0 \Leftrightarrow a^{2k} > 0$$

Più in generale,  $a^2 \geq 0$  è soddisfatta da qualunque numero reale.

Quindi è errore grave risolvere la disequazione  $x^2 > 0$  con  $x > 0$ . L'insieme di tutte le soluzioni sarà tutto il campo reale escluso lo zero; in simboli,  $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , mentre  $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ .

Elevando un numero reale qualsiasi a una potenza dispari, si ottiene un risultato dello stesso segno. Quindi,  $a > b \Rightarrow a^3 > b^3$  e, più in generale,

$$a > b \Rightarrow a^{2k+1} > b^{2k+1}$$

Elevamento a potenza di disequazioni.

Cominciamo osservando che da  $a > b$  non si può dedurre, per ogni coppia  $a, b$ , che  $a^2 > b^2$ . Ciò può essere dedotto anche attraverso esempi numerici: p.es.,  $2 > -3$ , ma  $2^2 = 4 < 3^2 = 9$ . Tuttavia, se  $a$  e  $b$  sono entrambi positivi, la disuguaglianza tra i rispettivi quadrati è equiversa alla disuguaglianza tra le basi, cioè [1]

$$a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$$

Se invece  $a$  e  $b$  sono entrambi negativi, allora [2]

$$0 > a > b \Rightarrow a^2 < b^2$$

Possiamo dimostrare la [1] mediante la proprietà transitiva e la regola del prodotto. Infatti

$a > b > 0 \Rightarrow a \cdot a > b \cdot a$  e  $a \cdot b > b \cdot b \Rightarrow a^2 > a \cdot b > b^2 \Rightarrow a^2 > b^2$ . Si può giungere allo stesso risultato applicando la regola per cui, se  $a > b > 0$  e  $c > d > 0$ , allora  $ac > bd$ , nel caso particolare  $c = a$  e  $d = b$ .

La regola [2] si ricava allo stesso modo, tenendo presente che  $a$  e  $b$  sono negativi e quindi si deve invertire il verso della disuguaglianze che si ottengono nei passaggi successivi.

Il caso  $a > 0 > b$  può equivalere a  $a^2 > b^2$ ,  $a^2 = b^2$  o  $a^2 < b^2$ . Ciò può essere mostrato mediante esempi numerici.

Se p.es.  $5 > -3$ , avremo  $5^2 = 25 > 3^2 = 9$ . Se  $3 > -5$ , avremo  $9 < 25$ , con inversione della disuguaglianza. Se infine consideriamo  $3 > -3$ , avremo  $9 = 9$ . Gli esempi numerici mostrano come la regola dell'elevamento a quadrato riguardi i valori assoluti dei termini. Infatti, la regola fondamentale è

$$|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

La dimostrazione di questa **regola dell'elevamento a quadrato** si basa sul significato di coimplicazione, per cui  $A \Leftrightarrow B$  equivale a  $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$ , dove  $A$  e  $B$  sono espressioni logiche, cioè formule o proposizioni.

Per dimostrare che  $|a| > |b| \Rightarrow a^2 > b^2$  si può ragionare in base alla regola  $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$ , sostituendo  $a$  con  $|a|$  e  $b$  con  $|b|$ . Per dimostrare l'implicazione opposta  $a^2 > b^2 \Rightarrow |a| > |b|$ , si può considerare che  $a^2 = |a|^2$  e  $b^2 = |b|^2$ , per cui  $|a|^2 - |b|^2 = (|a| - |b|) \cdot (|a| + |b|)$ . Dato che una somma di moduli di numeri reali è positiva, il segno di  $|a|^2 - |b|^2$  è lo stesso di  $|a| - |b|$  per cui essendo  $|a|^2 - |b|^2$  positivo anche  $|a| - |b|$  dovrà essere positivo, e quindi si ottiene  $|a| > |b|$ .

Si può anche ragionare per assurdo: se  $a^2 > b^2$  implicasse la negazione di  $|a| > |b|$  cioè

$|b| \geq |a|$ , elevando al quadrato i termini di quest'ultima otterremo  $b^2 \geq a^2$ .

Si deve notare, a questo proposito, che l'implicazione senza moduli  $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$  non equivale a  $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b > 0$  e neppure a  $a > b$ , in base agli esempi numerici visti prima.

La regola dell'elevamento a quadrato si estende a qualsiasi *potenza di esponente pari*. In particolare, abbiamo l'implicazione

$$a > b > 0 \Rightarrow a^{2k} > b^{2k}$$

e

$$|a| > |b| \Leftrightarrow a^{2k} > b^{2k}$$

Per le *potenze ad esponente dispari*, si dimostra che la disuguaglianza tra potenze di esponente dispari è equiversa a quella tra le rispettive basi, qualunque sia il segno. Per es.,

$$a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$$

Una dimostrazione è la seguente. Cominciamo col dimostrare che  $a > b \Rightarrow a^3 > b^3$ .

Se  $a > 0 > b$ , sarà anche  $a^3 > 0 > b^3$ , e viceversa, dato che la potenza di esponente dispari ha lo stesso segno della base. Se  $a$  e  $b$  sono entrambi positivi, allora si ha, per le regole del prodotto e la proprietà transitiva:

$a^2 > b^2 \Rightarrow a^3 = a \cdot a^2 > a \cdot b^2$  (perché  $a > 0$ ) e  $a > b \Rightarrow a \cdot b^2 > b \cdot b^2 = b^3 \Rightarrow a^3 > a \cdot b^2 > b^3 \Rightarrow a^3 > b^3$ ; se sono entrambi negativi abbiamo

$a^2 < b^2 \Rightarrow a^3 > a \cdot b^2$  (si deve invertire la disuguaglianza perché  $a$  e  $b$  sono entrambi negativi) e  $a > b \Rightarrow a \cdot b^2 > b \cdot b^2 = b^3$ ; componendo le varie disuguaglianze abbiamo  $a^3 > a \cdot b^2 > b^3$  e quindi  $a^3 > b^3$ .

Per dimostrare che  $a^3 > b^3 \Rightarrow a > b$ , possiamo per assurdo negare  $a > b$  e dimostrare, in base all'implicazione già dimostrata  $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$  e all'uguaglianza  $a = b$ , che si ottiene  $a^3 \leq b^3$ , contrariamente all'antecedente. Perciò, se  $a^3 > b^3$  allora deve essere anche  $a > b$ .

La regola si estende a tutte le potenze di esponente dispari, per cui, per ogni  $a$  e  $b$  reali,

$$a > b \Leftrightarrow a^{2k+1} > b^{2k+1}$$

## Disuguaglianze tra radicali

Anche in questo caso dobbiamo distinguere tra radici di indice pari e radici di indice dispari.

### 1. Radici di indice pari

Se  $a$  e  $b$  sono numeri reali positivi, allora

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

che si può dimostrare in più di un modo. Ponendo  $a = A^2$  e  $b = B^2$ , e considerando che la radice quadrata ha segno positivo, l'implicazione data si riduce a  $A^2 > B^2 \Leftrightarrow A > B$ , già dimostrata.



Si può dimostrare che  $\sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow a > b$  elevando al quadrato i termini dell'antecedente (le radici sono sempre prese col segno positivo):  $(\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2 \Rightarrow a > b$ . Si può ottenere  $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$  per assurdo in questo modo: se fosse  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ , elevando al quadrato i membri di questa disuguaglianza si otterrebbe  $a < b$  in contraddizione con l'antecedente. La regola si estende a radici di indice pari qualsiasi, per cui,  $\forall k / k \geq 1$ ,

$$a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt[2k]{a} > \sqrt[2k]{b}$$

infatti ci possiamo ricondurre ad una regola già dimostrata elevando a  $2k$  tutti i termini. Tenendo presente che sono tutte quantità positive si ottiene

$$a^{2k} > b^{2k} \Leftrightarrow a > b > 0$$

Più in generale, vale la coimplicazione

$$|a| > |b| \Leftrightarrow \sqrt[2k]{|a|} > \sqrt[2k]{|b|}$$

## 2. Radici di indice dispari

Dimostriamo che, per ogni coppia di numeri reali  $a$  e  $b$ , si ha

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$$

Questa regola corrisponde a  $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$ , come si prova immediatamente elevando al cubo tutti i termini. La regola si estende a qualsiasi potenza dispari, per cui, per ogni  $a$  e  $b$ , si ha

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt[2k+1]{a} > \sqrt[2k+1]{b}$$

## 3. Potenze e radici n-esime di numeri positivi

Per ogni  $a, b$  entrambi positivi, si ha

$a > b > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n$  e  $a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$  (la seconda coimplicazione è vera se lo è la prima). La prima si ottiene unificando le regole, valide per i soli numeri positivi se  $n = 2k$  e per ogni numero reale se  $n = 2k+1$ , già dimostrate per le disuguaglianze tra potenze.

## 4. Potenze con esponente razionale

Le disuguaglianze tra potenze nel senso rigoroso del termine – vale a dire con esponente naturale – si estendono alle potenze con esponente razionale positivo  $\frac{p}{q}$ . Supponiamo che  $\frac{p}{q}$  sia ridotta ai minimi termini; in tal caso  $p$  e  $q$  non possono essere entrambi numeri pari. Si dovrebbe distinguere il caso in cui  $q$  è pari da quello in cui è dispari. Se  $q$  è pari e  $p$  dispari, poiché  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ , si estrae una radice di indice pari da una potenza di esponente dispari e quindi  $a^p$  e  $b^p$  devono essere entrambi  $\geq 0 \Rightarrow a > 0$  e  $b \geq 0$ . Abbiamo quindi

$$q = 2k \wedge p = 2k+1 \Rightarrow (a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{b^p})$$

Nel caso in cui  $p$  è pari, evidentemente  $a$  e  $b$  possono essere numeri reali qualsiasi, ma da  $a > b$  non si può dedurre  $a^p > b^p$ , a meno che  $a$  e  $b$  non siano entrambi positivi. Quindi

Ezio Fornero – *Disuguaglianze e disequazioni* – 9/53

$$p = 2k \Rightarrow (a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{b^p})$$

Se infine  $p$  e  $q$  sono entrambi dispari, per ogni coppia di numeri reali  $a$  e  $b$  abbiamo

$$a > b \Leftrightarrow a^p > b^p \Leftrightarrow \sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{b^p}.$$

## 5. Reciproci di potenze

Si deve distinguere tra disuguaglianze tra i reciproci di potenze pari e quelli di potenze dispari.

Cominciamo con  $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$ , con  $a$  e  $b$  entrambi non nulli. Trattandosi di potenze pari, moltiplicando entrambi i membri per  $a^2 b^2$  otteniamo  $b^2 > a^2$ ; quindi abbiamo la coimplicazione

$$\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 > a^2$$

Più in generale, si ottiene la regola

$$\frac{1}{a^{2k}} > \frac{1}{b^{2k}} \Leftrightarrow b^{2k} > a^{2k}$$

Questa regola si estende al caso di potenze di esponenti diversi purché pari:

$$\frac{1}{a^{2n}} > \frac{1}{b^{2k}} \Leftrightarrow b^{2k} > a^{2n}$$

Nel caso di potenze dispari, i segni possono essere concordi o discordi. Nel primo caso, possiamo applicare la stessa regola del passaggio al reciproco tra termini di segno concorde: p.es.

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow \left[ \frac{1}{a^3} > \frac{1}{b^3} \Leftrightarrow b^3 > a^3 \Leftrightarrow b > a \right]$$

invece se  $a \cdot b < 0$ ,  $\frac{1}{a^3}$  e  $\frac{1}{b^3}$  hanno lo stesso segno di  $a$  e  $b$  rispettivamente in quanto potenze dispari, per cui

$$a \cdot b < 0 \Rightarrow \left[ \frac{1}{a^3} > \frac{1}{b^3} \Leftrightarrow a > b \right]$$

Lo stesso per ogni reciproco di potenza con esponente dispari.

## Altri metodi

### 1. Scomposizione in fattori

Si può dimostrare che  $a > b > 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2$  mediante scomposizione in prodotto di fattori:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  con  $(a + b) > 0$ , perciò la differenza tra le basi ha lo stesso segno della differenza tra i quadrati se le basi sono entrambe positive:  $a - b > 0 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$ . Con lo stesso metodo si dimostra, con  $0 > a > b$ , che  $a - b > 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 0$ .

Lo stesso procedimento si può applicare a  $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$  e  $a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ ; in questo caso, si deve scomporre  $a - b$  in  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$  ecc.

La regola  $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$  può essere dedotta anch'essa col metodo di decomposizione, in base alla identità  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  qualora si riesca a dimostrare che, per ogni coppia di reali  $a, b$  non entrambi nulli, si abbia  $a^2 + ab + b^2 > 0$ : condizione che effettivamente è vera, e corrisponde a una *inidentità* fondamentale, caso particolare della più generale inidentità  $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^{n-k}b^k + \dots + ab^{n-1} + b^n > 0$  valida per ogni  $n$  naturale pari.

La decomposizione in fattori si può applicare anche al caso  $a^{2^k} - b^{2^k}$ , cioè a una differenza di potenze di esponente  $2^k$  come  $a^4 - b^4, a^8 - b^8$  ecc.; infatti in tal caso si scompone in  $(a^{2^{\frac{k}{2}}} - b^{2^{\frac{k}{2}}})(a^{2^{\frac{k}{2}}} + b^{2^{\frac{k}{2}}})$ ; p.es.  $a^8 - b^8 = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4)$  e si procede nella scomposizione ottenendo, dopo  $k$  passaggi compreso il primo, un prodotto di fattori  $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \dots (a^{2^{\frac{k}{2}}} + b^{2^{\frac{k}{2}}})$ . Tutti i fattori esclusi  $a - b$  e  $a + b$  sono definiti positivi in quanto somme di quadrati;  $a + b$  è positivo se lo sono  $a$  e  $b$ , quindi  $a > b > 0 \Leftrightarrow a^{2^k} - b^{2^k} > 0$ .

Se si considera che anche  $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^{n-k}b^k + \dots + ab^{n-1} + b^n$  con  $n$  pari è strettamente positivo se  $a$  e  $b$  non sono entrambi nulli, la decomposizione si può applicare a tutte le differenze di esponente pari. P.es.  $a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$  e quindi il segno di  $a^6 - b^6$  è quello di  $a^2 - b^2$ ; più in generale, il segno di  $a^{2^k} - b^{2^k}$  è lo stesso di  $a^2 - b^2$ .

Questo metodo è più complicato di quello basato sulle regole immediate delle disuguaglianze, ma può essere utile per risolvere certe disequazioni *binomie* quali p.es.  $x^4 > 16, x^{10} < k$  ecc, senza ricorrere esplicitamente alle proprietà delle potenze, basandosi sul principio per cui i fattori definiti positivi in tutto il campo reale possono essere ignorati (di fatto, soppressi) nella risoluzione di una disequazione. In pratica, ciò consente di abbassare il grado della disequazione fino al secondo.

## 2. Funzioni monotone

Le operazioni di elevamento a potenza dispari possono essere studiate anche a partire dalle proprietà delle *funzioni monotone in senso stretto*, cioè le funzioni reali di variabile reale tali che, detti  $a$  e  $b$  due elementi distinti qualsiasi del loro dominio, con  $a > b$ , si abbia  $f(a) > f(b)$  o  $f(a) < f(b)$ . Nel primo caso la funzione  $f$  è strettamente crescente, nel secondo decrescente. Queste funzioni sono *biiettive*, vale a dire ad elementi diversi del dominio corrispondono elementi diversi del codominio, in modo che anche la relazione inversa (da elementi del codominio a elementi del dominio)  $f^{-1}$  è biettiva. Perciò, se  $f$  è *monotona strettamente crescente*, si ha, per ogni  $a, b$  appartenenti al dominio di  $f$ ,

$$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$$

oppure, per ogni  $c$  e  $d$  appartenenti al codominio di  $f$ ,

$$c > d \Leftrightarrow f^{-1}(c) > f^{-1}(d)$$

mentre per le  $f$  *monotone strettamente decrescenti* una delle due disuguaglianze deve essere invertita.

Molte funzioni elementari sono monotone crescenti o decrescenti in senso stretto. In particolare, le *potenze di esponente dispari* sono funzioni monotone strettamente crescenti in tutto il campo reale, come p.es.  $f(x) = x^3$  la cui inversa è  $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$  per cui dati  $a$  e  $b$  reali qualsiasi, abbiamo  $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$  e anche, per ogni  $c$  e  $d$  reali qualsiasi,  $c > d \Leftrightarrow \sqrt[3]{c} > \sqrt[3]{d}$ . Le potenze di esponente pari *non sono biiettive in tutto il campo reale*, e infatti l'equivalenza tra  $a > b$  e  $a^2 > b^2$  non è vera per ogni coppia di reali  $a, b$ . Tuttavia, le potenze pari sono crescenti in senso stretto in  $\mathfrak{R}^+$  e decrescenti in senso stretto in  $\mathfrak{R}^-$ . Perciò, abbiamo due regole distinte per il caso  $a > b > 0$  e per il caso  $a < b < 0$ ; nel primo caso, essendo  $x^2$  crescente in  $\mathfrak{R}^+$ , abbiamo  $a^2 > b^2$  e, più in generale,  $a^{2k} > b^{2k}$ ; nel secondo caso, essendo  $x^2$  decrescente in  $\mathfrak{R}^-$ ,  $a^2 < b^2$ .

Questo metodo può essere esteso a *funzioni composte*  $f[g(x)]$ , nel caso in cui la funzione esterna  $f$  sia monotona in senso stretto. Quindi, se  $f$  è p.es. strettamente crescente in tutto il suo dominio, si ha

$$g(b) > g(a) \Rightarrow f[g(b)] > f[g(a)]$$

Questa regola si può applicare nel caso in cui  $f$  sia un esponenziale o un logaritmo di base  $> 1$ , una potenza di esponente dispari, una radice, ecc.

E' chiaro che la regola permette di trattare agevolmente tutte le disuguaglianze che coinvolgono funzioni monotone in un certo intervallo, ma va tenuto presente che il suo valore è anzitutto *operativo*. Su un piano rigoroso, si deve prima dimostrare che una funzione data è monotona in un certo intervallo, e nel caso delle potenze e delle radici una dimostrazione è data proprio dalle regole ottenute prima con tecniche algebriche.

## Disuguaglianze notevoli

### 1. Disuguaglianze numeriche, inidentità e disequazioni

Si possono distinguere tre classi di disuguaglianze.

1. Le *disuguaglianze numeriche*, i cui termini sono solo numeri reali: es.  $3 > \sqrt{7}$ . Queste possono essere verificate utilizzando le regole fondamentali già viste, o mediante il *calcolo numerico approssimato*.

2. Le *disuguaglianze universali o inidentità*. Come le identità sono uguaglianze tra espressioni letterali vere per ogni scelta (eventualmente condizionata) delle indeterminate o variabili, così le inidentità sono disuguaglianze universalmente verificate (salvo eccezioni particolari), cioè soddisfatte per ogni scelta delle indeterminate. Generalmente si fa riferimento a variabili reali, ma alcune proprietà (in particolare, per quanto riguarda i valori assoluti) si estendono ai numeri complessi. Le inidentità possono essere, in generale, dimostrate mediante le regole fondamentali già viste, ma in certi casi può essere utile rifarsi a particolari proprietà delle equazioni, polinomi ecc.

3. Le *disequazioni*. Queste sono disuguaglianze contenenti almeno una *variabile* ed, eventualmente, uno o più parametri (costanti indeterminate), non necessariamente verificate per ogni valore della variabile. Una disequazione soddisfatta in tutto il campo reale è in realtà una inidentità. Per es.,  $x^2 + 1 > 0$  è verificata per ogni  $x \in \mathfrak{R}$  e quindi è una inidentità. Invece,  $x^2 > 3$  è una disequazione effettiva, essendo verificata solo per  $x < -\sqrt{3}$  o per  $x > \sqrt{3}$ .

## 2. Disuguaglianze numeriche

Dati due numeri reali, specie se contenenti radicali, dobbiamo stabilire quale dei due è il maggiore.

Per es. consideriamo  $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$  e  $\frac{9}{5}$ . Ipotizziamo sia  $\frac{\sqrt{7}+1}{2} > \frac{9}{5}$ ; in base alle proprietà delle disuguaglianze, moltiplichiamo entrambi i membri per il loro minimo comune multiplo: abbiamo  $5\sqrt{7}+5 > 18$ ; isoliamo il radicale trasportando 5 al secondo membro:  $5\sqrt{7} > 13$ ; infine eleviamo al quadrato trattandosi di numeri positivi:  $25 \cdot 7 > 169$ , infatti  $25 \cdot 7 = 175 > 169$ .

Un metodo alternativo elementare è il seguente. Supponiamo che un'espressione numerica contenga un numero irrazionale (p.es. un radicale) compreso tra due interi noti, e si debba confrontarla p.es.

con un numero razionale; p.es. consideriamo  $\frac{1-\sqrt{97}}{4}$  e  $-\frac{5}{2}$ . Dato che  $9 < \sqrt{97} < 10$ , avremo  $-9 > -\sqrt{97} > -10 \Rightarrow -\frac{8}{4} = -2 > \frac{1-\sqrt{97}}{4} > -\frac{9}{4} > -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$ . Quindi  $\frac{1-\sqrt{97}}{4} > -\frac{5}{2}$ .

Questa strategia non è sempre applicabile, infatti richiede che il numero razionale con il quale un dato reale viene confrontato *non* sia compreso tra la sua approssimazione per eccesso e quella per difetto. Non è applicabile, p.es., al

caso precedente. Infatti, sappiamo che  $2 < \sqrt{7} < 3$ ; allora sarà anche  $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{7}+1}{2} < \frac{4}{2} = 2$ .

Questa doppia disuguaglianza non permette di giungere a una decisione, perché anche  $\frac{9}{5} = 1,8$  è compreso tra  $\frac{3}{2}$  e

2; possiamo però migliorare la precisione di calcolo, tentando il calcolo della prima cifra decimale: poiché sappiamo che  $2 < \sqrt{7} < 3$ , potremmo confrontare  $\sqrt{7}$  con 2,5, ottenendo

$(\sqrt{7})^2 = 7 > (2,5)^2 = 6,25$ ; per cui  $\frac{\sqrt{7}+1}{2} > \frac{2,5+1}{2}$ . Ora confrontiamo  $\frac{2,5+1}{2} = \frac{3,5}{2}$  con  $\frac{9}{5} = 1,8$ . Se

fosse  $3,5 > 2 \cdot 1,8 = 3,6$ , la disuguaglianza numerica sarebbe soddisfatta, per la propr. transitiva; in tal caso non lo è, e si richiederebbe un calcolo più preciso di  $\sqrt{7}$ . Perciò, in generale il metodo dell'approssimazione numerica non è pratico, quando la differenza tra le espressioni numeriche da confrontare è paragonabile alla prima cifra decimale (o alle successive).

Le proprietà delle disuguaglianze possono essere utili in presenza di radicali doppi, come  $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ , da confrontare con  $\sqrt[4]{69}$ . Anche ora ipotizziamo che sia  $\sqrt{5+2\sqrt{3}} > \sqrt[4]{69}$ ; abbiamo  $5+2\sqrt{3} > \sqrt{69} \Rightarrow 25+20\sqrt{3}+12 > 69 \Rightarrow 20\sqrt{3} > 32 \Rightarrow 5\sqrt{3} > 8 \Rightarrow 75 > 64$ , che conferma l'ipotesi.

## 3. Media aritmetica di due numeri reali

La media aritmetica di due numeri reali è per definizione la loro semisomma, cioè  $\frac{a+b}{2}$ . Si dimostra facilmente che

La media aritmetica di due numeri reali distinti è compresa tra il maggiore e il minore dei due, come l'intuizione suggerisce immediatamente. Infatti, posto  $a > b$ , abbiamo

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow a > \frac{a+b}{2}; \quad \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} > b.$$

#### 4. Media geometrica di due numeri reali

Dati  $a$  e  $b$  entrambi positivi, la loro *media geometrica* è data da  $\sqrt{ab}$ . Anche la media geometrica è evidentemente compresa tra i due numeri  $a$  e  $b$ . Infatti, posto  $a > b$ , abbiamo  $\sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow a = \sqrt{a}\sqrt{a} > \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} > \sqrt{b}\sqrt{b} = b \Rightarrow a > \sqrt{ab} > b$ .

#### 5. Confronto tra media aritmetica e media geometrica di due numeri reali positivi

Dati due numeri reali positivi distinti tali che  $a > b$ , la loro media aritmetica è strettamente maggiore della media geometrica, cioè (\*)

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

Si prova dimostrando la complicazione

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \Leftrightarrow (a-b)^2 > 0$$

Moltiplichiamo i due membri di (\*) per 2 ed eleviamo al quadrato; si ottiene  $a^2 + b^2 + 2ab > 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 > 0$  che è vera se  $a \neq b$ . Questi passaggi possono essere compiuti in senso opposto, tenendo presente che, se  $a \neq b$ ,  $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab > 0 \Rightarrow (a+b)^2 > 4ab$ , dalla quale otteniamo  $a+b > 2\sqrt{ab}$  in quanto, per ipotesi,  $a$  e  $b$  sono entrambi positivi e quindi possiamo passare alla disuguaglianza tra le radici. Quindi, se  $a$  e  $b$  sono entrambi positivi e  $a \neq b$ ,

$$(a-b)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

Un metodo alternativo per confrontare la media geometrica di due numeri positivi distinti con la loro media aritmetica parte dal prodotto notevole

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

dal quale si deduce che  $(a-b)(a+b) < a^2$ ; ora,  $a$  è la media aritmetica di  $a-b$  e  $a+b$ , quindi se  $c = a-b$  e  $d = a+b$ , supponendo  $c$  e  $d$  positivi, si ottiene  $c \cdot d < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{cd} < \frac{c+d}{2}$ , confermando che la media geometrica di due reali distinti positivi è minore della loro media aritmetica.

**6. Media armonica.** Per definizione, la media armonica  $M_a$  di due numeri positivi è definita dalla formula

$$\frac{1}{M_a} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

(il concetto si estende a un numero qualsiasi di termini, come per le medie aritmetica e geometrica). Quindi, per le proprietà della media aritmetica, *il reciproco della media armonica di due numeri reali positivi distinti è compreso tra i reciproci dei due numeri*, e supponendo  $a > b > 0$  si ottiene

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ e quindi}$$

$$a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{M_a} > \frac{1}{a}$$

passando ai reciproci e invertendo il senso delle disuguaglianze, otteniamo

$$a > M_a > b$$

e quindi anche la media armonica è compresa tra  $a$  e  $b$ . La media armonica di due reali distinti positivi non può superare il doppio del termine minore, cioè  $2b$ . Infatti,  $M_a$  è inversamente proporzionale alla somma dei reciproci di  $a$  e  $b$ : supponiamo che  $b$  sia costante e  $a$  variabile tendente all'infinito. Al crescere di  $a$ , il termine  $\frac{1}{a}$  tende a zero e il numeratore  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  decresce tendendo al suo estremo inferiore  $\frac{1}{b}$ ; essendo la media armonica inversamente proporzionale al numeratore, essa tende al suo estremo superiore che è il reciproco di  $\frac{1}{2b}$ , cioè appunto  $2b$ .

### 7. Media aritmetica di $n$ numeri reali

Le conclusioni cui si perviene con le medie di vario tipo su due soli numeri reali si estendono evidentemente alle medie calcolate su  $n$  numeri reali.

*Media aritmetica di  $n$  numeri reali* – la media aritmetica di  $n$  termini è definita da  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ ; mediante una semplice *maggiorazione* è possibile verificare che, se non tutti i termini  $x_i$

sono uguali, essa è compresa tra il minimo e il massimo dei termini  $x_i$ . Detti  $m$  e  $M$  rispettivamente il minimo e il massimo delle  $x_i$  (che devono essere diversi perché non tutte le  $x_i$  sono uguali), osserviamo che la somma delle  $x_i$  è minore di  $n \cdot M$  e maggiore di  $n \cdot m$ , per cui

$n \cdot m < \sum_{i=1}^n x_i < n \cdot M$ . Dividendo tutti i termini della disuguaglianza per il numero  $n$  che è positivo si ottiene la tesi:

$$m < \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} < M$$

**8. Media geometrica di  $n$  numeri reali positivi** – Dati  $n$  numeri positivi non tutti uguali  $x_i$ , la loro media geometrica è la radice  $n$ -esima del loro prodotto,  $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$  ed è compresa tra il massimo e il minimo delle  $x_i$ . Il ragionamento è esattamente lo stesso fatto per la media aritmetica: detti  $m$  e  $M$  rispettivamente il minimo e il massimo degli  $x_i$ , abbiamo per la regola della radice  $n$ -esima:

$m^n < x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n < M^n \Rightarrow m = \sqrt[n]{m^n} < \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} < \sqrt[n]{M^n} < M$  e quindi, per la proprietà transitiva,

$$m < \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} < M$$

**9. Media armonica di  $n$  numeri reali positivi** – Dati  $n$  numeri positivi non tutti uguali  $x_i$ , la loro

media armonica è data da  $\frac{1}{M_a} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}$ , vale a dire che il reciproco della media

armonica è la media aritmetica dei reciproci. Anche la media armonica è compresa tra il massimo  $M$  e il minimo  $m$  tra tutti gli  $x_i$ ; infatti, sostituiamo ogni  $x_i$  con  $M$  e  $m$  e osserviamo che, per ogni

$x_i$ , in base alla regola del reciproco  $\frac{1}{M} < \frac{1}{x_i} < \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{n}{M} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} < \frac{n}{m}$ , quindi

dividendo per  $n$  e confrontando con  $\frac{1}{M_a}$  si ottiene  $\frac{1}{M} < \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{M_a} < \frac{1}{m}$

e infine, passando ai reciproci e invertendo il verso della disuguaglianza, otteniamo

$$M > M_a > m$$

Inoltre la media armonica di un insieme di numeri positivi non tutti uguali è minore del prodotto tra il minimo di essi  $m$  e il loro numero  $n$ , vale a dire deve essere

$$M_a < n m.$$

Questa proprietà dipende dal fatto che il reciproco di un numero positivo è ancora un numero positivo. Perciò la somma dei reciproci delle  $x_i$  è maggiore di ogni termine  $\frac{1}{x_i}$  e di  $\frac{1}{m}$  in particolare. Quindi

$$\frac{1}{M_a} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} > \frac{1}{n \cdot m} \Rightarrow M_a < n m.$$

## Valori assoluti

Il concetto di valore assoluto o modulo si applica sia ai numeri reali sia ai numeri complessi. Le proprietà 1, 2, 3, 7 si applicano anche per i numeri complessi.

### 1. Proprietà fondamentali

Valgono le seguenti identità fondamentali:

1. Per ogni  $a$  reale,  $|a| \geq 0$  immediata conseguenza della definizione di valore assoluto
2. Per ogni  $a$  diverso da 0,  $|a| > 0$
3. [reciproco della 2]  $|a| > 0 \Rightarrow a \neq 0$
4. Per ogni coppia  $a, b$  di numeri reali,  $|a| \geq -b^2$  conseguenza della prima
5. Per ogni  $a$  e  $b$  diverso da 0,  $|a| > -b^2$  conseguenza della seconda

Ezio Fornero – *Disuguaglianze e disequazioni* – 16/53

<http://www.superzeko.net> – Per espressa volontà dell'autore, questo testo è liberamente utilizzabile per fini personali o didattici.

Qualora tuttavia dovesse essere riprodotto su un sito web o in una pubblicazione, si prega di citare la fonte.



6. Per ogni numero reale  $a$ ,  $|a| \geq a$   
 Se  $a \geq 0$  si ha  $|a| = a$ , se  $a < 0$   $|a| > -a$

## 2. Confronto tra modulo della somma e somma dei moduli di due numeri reali

Vale la disuguaglianza universale

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Una dimostrazione elementare consiste nel considerare i diversi possibili segni di  $a$  e  $b$ . Se  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ , entrambi i membri sono uguali a  $a+b$  e si ha un'identità. Se sono entrambi negativi, per definizione di modulo abbiamo  $|a| = -a$ ,  $|b| = -b$  e  $|a+b| = -(a+b) = -a-b$ . Entrambi i membri sono uguali a  $-a-b$  e si ha un'identità. Se  $a$  è positivo e  $b$  negativo,  $a+b$  è equivalente alla differenza di numeri positivi  $a-(-b)$  e quindi è uguale a  $|a|-|b|$ . Se  $|a|-|b|$  è positivo o nullo, il suo modulo è uguale proprio a  $|a|-|b|$ , che evidentemente è minore di  $|a|+|b|$ . Se è negativo, il suo modulo sarà uguale a  $|b|-|a|$ , che di nuovo è minore di  $|a|+|b|$ . Si ha quindi uguaglianza quando  $a$  e  $b$  sono concordi, disuguaglianza quando sono discordi.

**3. Disuguaglianza fondamentale** – il modulo della somma di  $n$  numeri reali è minore o uguale della somma dei rispettivi moduli. Dati  $n$  numeri (reali o complessi)  $x_i$ , si ha

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

Consideriamo il caso in cui tutte le  $x_i$  sono reali. Se sono tutte positive,  $|x_i| = x_i$  e il modulo della somma delle  $x_i$  coincide con la somma stessa. In questo caso si ha un'identità. Lo stesso se le  $x_i$  sono tutte negative. Infatti si avrebbe  $x_i = -|x_i| \Rightarrow |\sum x_i| = |-\sum |x_i|| = |\sum |x_i|| = \sum |x_i|$ , perché il modulo esterno è applicato a una somma positiva e coincide con la somma stessa. Si tenga anche presente che per ogni  $z$  reale è  $|-z| = |z|$ .

Se alcune  $x_i$  sono negative, ma non tutte, il primo membro è il modulo della differenza di due termini positivi  $A$  e  $B$ , dove  $A$  è la somma di tutti i termini positivi o nulli, che coincidono con i rispettivi moduli, e  $B$  la somma di tutti i moduli dei termini negativi (un numero negativo  $x_i$  è uguale a  $-|x_i|$ ); perciò  $|A-B|$  è uguale ad  $A-B$  o a  $B-A$ . Il secondo membro è la somma dei moduli dei termini positivi  $A$  e dei moduli dei termini negativi  $B$ , cioè  $A+B$ . Ovviamente  $A+B > A-B$  o  $B-A$  e quindi il modulo della somma è strettamente minore della somma dei moduli.

La regola generale, vera per  $n$  termini, può essere dimostrata anche per *induzione aritmetica*. Infatti, è vera nel caso  $n = 2$  (v. punto precedente). Dimostriamo che, se è vera per  $n-1$  termini, allora è vera anche per  $n$  termini. Poniamo  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = |(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n|$ ; per la regola applicata a due termini, si ha  $|(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n| \leq |x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}| + |x_n|$ .

Nel caso  $n = 2$ , si può anche considerare la disuguaglianza tra  $(a+b)^2$  e  $(|a|+|b|)^2$ . Dimostriamo che  $a^2 + b^2 + 2ab \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a| \cdot |b|$ . Infatti, poiché per ogni reale  $x$  si ha  $|x|^2 = x^2$ , la disuguaglianza si riduce a  $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$  che è vera, riducendosi all'uguaglianza se  $a$  e  $b$  hanno segno concorde e alla disuguaglianza in senso stretto se hanno segno discorde.

Dalla disuguaglianza  $(a+b)^2 \leq (|a|+|b|)^2$  si deduce  $\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a|+|b|)^2}$ . Ora, per ogni  $x$  reale vale l'identità  $|x| = \sqrt{x^2}$ , quindi si ottiene  $|a+b| \leq |a|+|b|$  e, sottraendo dal secondo membro il modulo esterno, \*

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Dati due numeri reali o complessi non entrambi nulli  $a$  e  $b$ , si ha anche \*\*

$$|a+b| \geq |a|-|b|$$

Se  $|a| \leq |b|$ , il secondo membro è  $\leq 0$  e quindi la disuguaglianza è verificata. Supponiamo quindi che sia  $|a| > |b|$ . Nella disuguaglianza  $|c+d| \leq |c|+|d|$ , poniamo  $c+d = a$  e  $c = c+d-d = a+(-d)$ ; si ottiene  $|a| \leq |a+(-d)|+|-d|$ ; sostituiamo  $-d$  con  $b$  e otteniamo  $|a| \leq |a+b|+|b| \Rightarrow |a+b| \geq |a|-|b|$ .

In entrambe le disuguaglianze \* e \*\* è possibile sostituire  $a$  e  $b$  con  $-a$  e  $-b$ , trattandosi di identità universali; si ottiene quindi la *regola del modulo della somma o differenza*, per cui il valore assoluto della somma o differenza di due numeri reali (o complessi) è sempre maggiore o uguale alla differenza dei valori assoluti e minore o uguale alla loro somma. Perciò

$$|a|-|b| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$$

## Altre disuguaglianze notevoli

### 1. Confronto tra potenze di somme o differenze e somme o differenze di potenze

Se  $a$  e  $b$  sono reali distinti strettamente positivi, vale la disuguaglianza

$$(a+b)^n > a^n + b^n$$

Infatti  $(a+b)^n = a^n + b^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} > a^n + b^n$ ; estraendo la radice  $n$ -esima si ottiene

$$a+b > \sqrt[n]{a^n + b^n};$$

in particolare, se  $a$  e  $b$  sono positivi, abbiamo

$$a+b > \sqrt{a^2 + b^2}$$

e quindi, per ogni coppia  $a, b$  di reali distinti,

$$|a|+|b| > \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se  $a$  e  $b$  sono reali positivi tali che  $a > b$ , si ha

$$(a-b)^n < a^n - b^n,$$

vale a dire: se  $b > 0$  e  $a - b > 0$ , allora la potenza  $n$ -esima della differenza è minore della differenza tra le potenze. E' una conseguenza delle identità algebriche

$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$  e  $(a - b)^n = (a - b) \cdot (a - b)^{n-1}$ ; quindi si tratta di confrontare  $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$  e  $(a - b)^{n-1}$ ; essendo  $a, b$  e  $a - b$  positivi, si ottiene  $a > a - b \Leftrightarrow a^{n-1} > (a - b)^{n-1}$  e  $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} > a^{n-1}$  e quindi, per la proprietà transitiva, abbiamo  $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} > (a - b)^{n-1}$  e la disuguaglianza è dimostrata.

Questa proprietà è facilmente verificabile numericamente; consideriamo p.es.  $a = 4$  e  $b = 2$ ; abbiamo  $4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56 > 2^3$ ; oppure, con  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = \frac{1}{3}$ , elevando al quadrato

abbiamo  $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{5}{36} > (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{36}$ .

Estraendo la radice  $n$ -esima di entrambi i membri della disuguaglianza, si ottiene

$$a - b < \sqrt[n]{a^n - b^n}$$

nel caso particolare  $n = 2$ , si ricava

$$a - b < \sqrt{a^2 - b^2}$$

## 2. Radicali di somme e differenze

Se  $a$  e  $b$  sono due numeri reali strettamente positivi, vale la disuguaglianza

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

infatti, essendo  $\sqrt{a+b}$  e  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  strettamente positivi, elevando al quadrato otteniamo una disuguaglianza equivalente eversa:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$$

Si possono dedurre le disuguaglianze tra radicali dalle disuguaglianze sulle potenze di binomi: se  $A$  e  $B$  sono reali strettamente positivi allora  $(A + B)^2 > A^2 + B^2$  da cui, sostituendo  $A$  e  $B$  con  $\sqrt{a}$  e  $\sqrt{b}$  rispettivamente, ed estraendo le radici quadrate di entrambi i membri, otteniamo  $\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$ .

Questa disuguaglianza può essere generalizzata alle radici  $n$ -esime. Dimostriamo che, per ogni naturale  $n$ , se  $a$  e  $b$  sono strettamente positivi si ha

$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Infatti, elevando alla potenza  $n$ -esima otteniamo

$[\sqrt[n]{a+b}]^n = a+b$  e  $[\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}]^n = a+b + \sum_{k=1}^n C_{n,k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} \cdot \sqrt[n]{b^k} > a+b$  nella quale i  $C_{n,k}$

sono coefficienti positivi, in quanto la somma contiene solo termini positivi; quindi  $[\sqrt[n]{a+b}]^n < [\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}]^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  in quanto le disuguaglianze tra potenze  $n$ -esime sono equivalenti a quelle tra le rispettive basi se queste sono positive.

Si può ottenere lo stesso risultato partendo dalla disuguaglianza  $a+b > \sqrt[n]{a^n + b^n}$  dimostrata prima, sostituendo  $a$  con  $\sqrt[n]{a}$  e  $b$  con  $\sqrt[n]{b}$ .

Si può dimostrare anche la disuguaglianza, valida per  $a$  e  $b$  entrambi positivi e  $a > b$ :

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{a-b}$$

che si può ottenere da  $a-b < \sqrt[n]{a^n - b^n}$  precedentemente dimostrata, sostituendo  $a$  con  $\sqrt[n]{a}$  e  $b$  con  $\sqrt[n]{b}$ . In particolare, se  $n=2$  si ottiene

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$$

Le disuguaglianze sui radicali derivano da quelle sulle potenze, partendo da  $(a+b)^n > a^n + b^n$  o da  $(a-b)^n < a^n - b^n$  con  $a$  e  $b$  positivi e  $a > b$  applicando la radice  $n$ -esima a entrambi i membri e sostituendo  $a \rightarrow \sqrt[n]{a}$  e  $b \rightarrow \sqrt[n]{b}$ .

### 3. Disuguaglianza triangolare [dimostrazione algebrica]

Se  $a$  è reale positivo,  $b \neq 0$  e  $a > c$  vale la disuguaglianza

$$a - c + \sqrt{c^2 + b^2} > \sqrt{a^2 + b^2}$$

*Dimostrazione:* trasformiamo la disuguaglianza che dobbiamo provare in una disuguaglianza equivalente già dimostrata. Essendo  $a - c > 0$  possiamo elevare al quadrato entrambi i membri ottenendo una disuguaglianza equivalente equiversa:

$$a^2 - 2ac + 2c^2 + b^2 + 2(a-c) \cdot \sqrt{c^2 + b^2} > a^2 + b^2 \Leftrightarrow -2ac + 2c^2 > 2(c-a) \cdot \sqrt{c^2 + b^2};$$

scriviamo il primo membro come  $2(c-a)c$ ; dividendo primo e secondo membro per  $2(c-a)$  (che è negativo) otteniamo  $c < \sqrt{c^2 + b^2}$ , vera qualunque siano  $b$  e  $c$ , che è logicamente equivalente alla disuguaglianza che si doveva dimostrare.

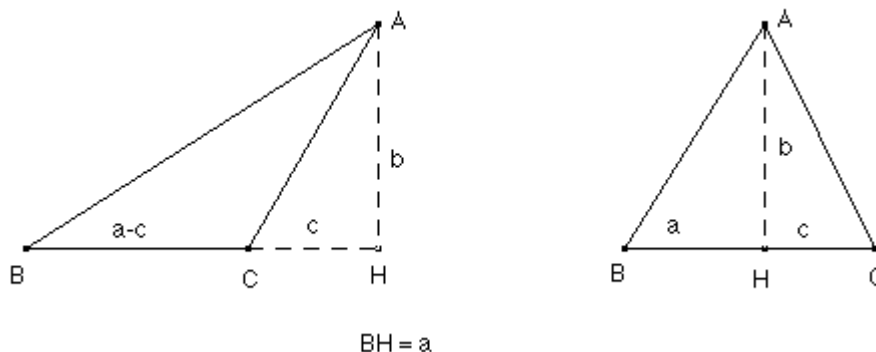
La disuguaglianza si applica anche al caso  $c < 0$ ; in questo caso, si potrebbe scriverla nella forma

$$a + c + \sqrt{c^2 + b^2} > \sqrt{a^2 + b^2}$$

ottenibile sostituendo formalmente  $-c$  al posto di  $c$ . Unifichiamo le due disuguaglianze in un'unica identità, e si ha

$$a \pm c + \sqrt{c^2 + b^2} > \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se  $a, b$  e  $c$  sono tutti positivi e  $a > c$ , questa disuguaglianza è verificata dai tre lati  $a \pm c$ ,  $b$  e  $\sqrt{a^2 + b^2}$  di un triangolo:



Nel caso del triangolo ottusangolo abbiamo  $BC + AC = a - c + \sqrt{c^2 + b^2} > AB = \sqrt{a^2 + b^2}$  ;  
 per il triangolo acutangolo abbiamo  $BC + AC = a + c + \sqrt{c^2 + b^2} > AB = \sqrt{a^2 + b^2}$  .

#### 4. Disuguaglianza $a^2 + b^2 \pm ab > 0$

Dimostriamo che per ogni  $a, b$  non entrambi nulli, si ha

$$a^2 + ab + b^2 > 0$$

e

$$a^2 - ab + b^2 > 0$$

Questa inidentità equivale all'implicazione  $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$  . Infatti, si ha

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

e quindi  $a^2 + ab + b^2$  ha lo stesso segno di  $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$  : perciò è definito positivo dato che  $a^3 - b^3$  e  $a - b$  sono concordi in segno. La disuguaglianza  $a^2 - ab + b^2 > 0$  può essere dedotta immediatamente con la sostituzione  $b \rightarrow -b$  .

E' possibile comunque verificare questa disuguaglianza fondamentale anche in modo indipendente.

Partiamo da  $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab > 0$  . Supponiamo  $a \cdot b > 0$  ; allora abbiamo

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab > ab > -ab \Rightarrow a^2 + b^2 \pm ab > 0$  . Se invece  $a \cdot b < 0$  , abbiamo  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > -2ab > -ab > ab$  con la stessa conclusione. Oppure:

$$a^2 \pm ab + b^2 = \frac{1}{2}(2a^2 \pm 2ab + 2b^2) = \frac{1}{2}(a^2 \pm 2ab + b^2 + a^2 + b^2) = \frac{1}{2}[(a^2 \pm 2ab + b^2) + a^2 + b^2] = \frac{1}{2}[(a \pm b)^2 + a^2 + b^2]$$

che è strettamente positivo se  $a$  e  $b$  non sono entrambi nulli, perché somma di termini positivi.

#### 5. Disuguaglianza $\sum_{k=0}^{2n} a^{2n-k} \cdot b^k > 0$

L'inidentità appena dimostrata è un caso particolare della disuguaglianza, vera per ogni  $a, b$  non entrambi nulli,

$$a^{2n} + a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \dots + a^2b^{2n-2} + ab^{2n-1} + b^{2n} > 0$$

o, più brevemente,

$$\sum_{k=0}^{2n} a^{2n-k} \cdot b^k > 0.$$

Come nel caso particolare precedente, questa identità è equivalente all'implicazione, valida per potenze dispari,

$$a^{2n+1} - b^{2n+1} > 0 \Leftrightarrow a > b$$

e all'identità, valida per ogni potenza,

$$a^p - b^p = (a - b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \dots + a^2b^{p-3} + ab^{p-2} + b^{p-1})$$
 applicata al caso  $p = 2n + 1$ .

Prima di ricavare la regola generale, consideriamo il caso  $2n = 4$ .

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ . Detta  $P_n$  la somma di monomi  $a^{n-k}b^k$  con  $k$  compreso tra 0 e  $n$ , abbiamo  $P_4 = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 =$

$$\frac{a^4}{2} + \left(\frac{1}{2}a^4 + a^3b + \frac{1}{2}a^2b^2\right) + \left(\frac{1}{2}a^2b^2 + ab^3 + \frac{1}{2}b^4\right) + \frac{b^4}{2} = \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{a^2}{2}(a^2 + 2ab + b^2) + \frac{b^2}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)(a + b)^2$$
, che contiene solo potenze con esponente pari.

In alternativa, si poteva anche scomporre nel modo seguente

$$P_4 = a^2(a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2) + b^2(\frac{1}{2}a^2 + ab + b^2) = \frac{1}{2}[(a^2 + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) + a^2 + b^2] = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)[(a + b)^2 + 1]$$
, che è generalmente positivo.

Consideriamo ora  $P_6 =$

$$\frac{a^6 + b^6}{2} + \frac{1}{2}a^4(a^2 + 2ab + b^2) + \frac{1}{2}a^2b^2(a^2 + 2ab + b^2) + \frac{1}{2}b^4(a^2 + 2ab + b^2) = \frac{a^6 + b^6}{2} + \frac{1}{2}(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a + b)^2$$
, che contiene solo termini positivi.

Il metodo generale consiste nello scomporre i termini  $a^{2p}b^{2q}$ ,  $p$  e  $q$  compresi tra 0 e  $n$ , in  $\frac{1}{2}a^{2p}b^{2q} + \frac{1}{2}a^{2p}b^{2q}$ ; i termini di  $P_{2n}$  sono  $2n + 1$  di cui  $n + 1$  del tipo  $a^{2p}b^{2q}$ ; decomponendoli nella somma di due termini uguali,  $P_{2n}$  è dato dalla somma di  $2n + 2 + n$  termini. Se non consideriamo i due estremi  $\frac{a^{2n}}{2}$  e  $\frac{b^{2n}}{2}$ , abbiamo una somma di  $3n$  termini. Possiamo quindi raggruppare a tre a tre questi termini, considerati in ordine decrescente rispetto ad  $a$ , a partire da  $\frac{a^{2n}}{2}$ ; ognuna di queste  $n$  terne è del tipo  $\frac{a^{2n-2k} \cdot b^{2k}}{2} + a^{2n-2k-1} \cdot b^{2k+1} + \frac{a^{2n-2k-2} \cdot b^{2k+2}}{2} =$

$\frac{1}{2}a^{2n-2k-2} \cdot b^{2k} \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = \frac{1}{2}a^{2n-2k-2} \cdot b^{2k} \cdot (a + b)^2$ , dove  $0 \leq k \leq n - 1$ . Perciò

$$P_{2n} = \frac{a^{2n} + b^{2n}}{2} + \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} a^{2n-2k-2} \cdot b^{2k} \right] \cdot (a + b)^2.$$

Si può completare osservando che  $a^{2n-2k-2} \cdot b^{2k} = (a^2)^{n-k-1} \cdot (b^2)^k$  e quindi la somma è un polinomio del tipo  $P_{n-1}$  dipendente da  $a^2$  e  $b^2$ . Quindi

$$P_{2n}(a, b) = \frac{a^{2n} + b^{2n}}{2} + \frac{1}{2}[P_{n-1}(a^2, b^2)] \cdot (a+b)^2.$$

Essendo una somma di termini positivi, per ogni  $a$  e  $b$  non entrambi nulli,  $P_{2n}(a, b) > 0$ .

Ovviamente, l'identità universale  $a^{2n} + a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \dots + a^2b^{2n-2} + ab^{2n-1} + b^{2n} > 0$  vale anche operando la sostituzione di  $a$  con  $-a$  o di  $b$  con  $-b$ . In tal caso cambiano di segno i termini contenenti le potenze dispari di  $a$  e  $b$ , quindi otteniamo l'identità equivalente

$$a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n} > 0$$

## 6. Il metodo di scomposizione in fattori

La discussione precedente evidenzia il ruolo della *scomposizione in fattori* di un polinomio per stabilire se una disuguaglianza è una identità, e in generale per discutere e risolvere disequazioni. Infatti, se un polinomio è scomponibile in un prodotto di fattori tutti positivi in tutto il campo reale, il segno del polinomio sarà positivo e avremo una identità. In ogni caso, il segno del polinomio è funzione del segno dei suoi fattori.

Si può anche adottare il criterio per il quale, se un polinomio  $P(x)$  non ha zeri reali (cioè se l'equazione  $f(x) = 0$  non ammette soluzioni reali) allora esso ha segno costante in tutto il campo reale (infatti un polinomio è una funzione continua in tutto  $\mathfrak{R}$  e, se assumesse valori di segno diverso in due punti  $a$  e  $b$ , per il *teorema di esistenza degli zeri di una funzione reale* esisterebbe uno zero del polinomio compreso tra  $a$  e  $b$ ; se tale zero non esiste per un dato polinomio, allora esso non può assumere valori di segno opposto). Tuttavia, questo criterio del segno costante è applicabile solo in alcuni casi, in particolare per polinomi di secondo grado, poiché è facile stabilire se un polinomio di secondo grado ammette o no soluzioni reali. Per es., supponiamo si voglia stabilire se  $a^2 + ab + b^2 > 0$  è una identità. Consideriamo  $a$  un parametro fisso non nullo e  $b$  variabile; poniamo quindi  $b = x$  e cerchiamo di stabilire se l'equazione  $x^2 + ax + a^2 = 0$  ammette o no soluzioni reali. Poiché  $\Delta = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$  non vi sono zeri del polinomio e il suo segno è costante, per cui è quello che assume quando  $x = 0$ , cioè positivo essendo  $a^2 > 0$ . Ne segue che, se  $a \neq 0$  e per ogni  $x = b$  reale, si ha  $a^2 + ab + b^2 > 0$ , e lo stesso se  $b \neq 0$  per ogni  $a$  reale.

## 7. Discussione di disuguaglianze algebriche

Questo metodo di discussione si può applicare per *discutere* disuguaglianze letterali algebriche di secondo grado dipendenti da uno o più parametri. Il caso più interessante è quello di disuguaglianze del tipo  $P(a, b, k) > 0$  dove  $P$  è un polinomio di secondo grado,  $a$  e  $b$  sono indeterminate variabili in tutto  $\mathfrak{R}$  e  $k$  è un parametro di discussione, anch'esso variabile in tutto  $\mathfrak{R}$ . Un esempio potrebbe essere la disuguaglianza

$$a^2 + ab + kb^2 > 0;$$

si tratta di stabilire per quali valori del parametro  $k$  è una identità, supponendo  $a$  e  $b$  non entrambi nulli. Il segno del discriminante fornisce subito la soluzione: la disuguaglianza è un'identità se  $\Delta < 0$ , cioè se il polinomio  $x^2 + bx + kb^2$  (o  $kx^2 + ax + a^2$ ) non ammette zeri

reali. Quindi  $\Delta = b^2 - 4kb^2 < 0 \Rightarrow (1 - 4k) \cdot b^2 < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{4}$ . Perciò, otteniamo una identità valida per ogni coppia  $a, b$  di numeri reali se  $k > \frac{1}{4}$ .

### 8. Altre identità notevoli con numeri naturali

1. Per ogni naturale  $n > 0$ , si ha  $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$  (es:  $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ )

Si può dimostrare in più modi. P.es.,  $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ ;  $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ ;

$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n < n+1$  che è ovvia; oppure, col

metodo dei prodotti incrociati, per cui se il prodotto  $bd > 0$  si ha  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$ ; nel nostro caso abbiamo  $(n-1)(n+1) < n^2 \Leftrightarrow n^2 - 1 < n^2$ , che è ovvia.

2. Per ogni naturale  $n > 2$ , si ha  $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ . Eleviamo entrambi i membri a  $n \cdot (n+1)$ ; abbiamo  $n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow n \cdot n^n > (n+1)^n$ ; dividiamo entrambi i membri per  $n^n$  e otteniamo  $n > (1 + \frac{1}{n})^n$ . Dimostriamo quindi che, per ogni naturale  $n > 2$ , deve essere

$$n > (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Un primo metodo, che sfrutta il *principio di induzione matematica* e le regole fondamentali sui numeri reali positivi, consiste nel dimostrare che questa disuguaglianza è vera se  $n = 3$  e che, se è vera per un certo naturale  $n$ , deve essere vera anche per  $n + 1$ . Indicando con  $F(n)$  la disuguaglianza  $n > (1 + \frac{1}{n})^n$ , dimostriamo  $F(3)$ . Abbiamo  $(1 + \frac{1}{3})^3 = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27} < \frac{81}{27} = 3$ ; quindi  $F(3)$  è vera.

Consideriamo ora l'implicazione  $F(n) \Rightarrow F(n+1)$ ; dimostriamo che

$$n > (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow n + 1 > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}.$$

Cominciamo osservando che  $n + 1 > n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow (1 + \frac{1}{n+1}) < (1 + \frac{1}{n})$ . Quindi

$n > (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow n > (1 + \frac{1}{n+1})^n \Leftrightarrow \frac{n}{n} = 1 > (1 + \frac{1}{n+1})^n \cdot \frac{1}{n}$ ; moltiplicando per  $n + 1$  si ha

$$n + 1 > (1 + \frac{1}{n+1})^n \cdot (\frac{n+1}{n}) = (1 + \frac{1}{n+1})^n \cdot (1 + \frac{1}{n}) > (1 + \frac{1}{n+1})^n \cdot (1 + \frac{1}{n+1}) = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}.$$

Perciò  $F(n)$  implica  $F(n+1)$ , e la disuguaglianza  $F(n)$  è dimostrata per ogni  $n > 2$ . Quindi anche

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$

è vera per ogni  $n > 2$ .



Per  $n = 2$ , la disuguaglianza non è verificata. Infatti  $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ ; elevando alla sesta abbiamo  $2^3 = 8 < 3^2 = 9$ . Inoltre,  $(1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2$ .

Un metodo più difficile, che non utilizza solo le regole applicabili ai naturali, si basa sullo sviluppo in serie di potenze di  $(1 + \frac{1}{n})^n$ . Si deve utilizzare la formula generale  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k}$ ; in questo caso, si ottiene

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k}$ . Lo sviluppo in serie di potenze di  $(1 + \frac{1}{n})^n$  contiene  $n + 1$  elementi; il primo è 1, il secondo ancora 1, il terzo  $\frac{n-1}{2n}$ , il  $k$ -esimo (facendo iniziare  $k$  da 3) è  $\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)}{(k-1)!n^{k-2}}$  fino a  $k = n + 1$ . Il

numeratore di tutti i termini successivi al secondo è sempre minore del denominatore essendo il prodotto di  $k - 2$  fattori tutti minori di  $n$ ; quindi la somma di tutti i termini dopo il secondo (che sono  $n - 1$ ) è strettamente minore di  $n - 1$ . Dunque la somma  $S$  di tutti i termini deve essere strettamente minore di  $2 + n - 1 = n + 1$  (i primi due valgono 1).

Tuttavia, l'ultimo termine è  $\frac{1}{n^n}$ : nel caso  $n = 3$ , esso vale solo  $\frac{1}{27}$ , e la somma  $S$  sarà minore di  $n + \frac{1}{27}$ . Il

penultimo termine è  $3 \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}$ , dunque, per  $n = 3$ , la somma sarà minore di  $n - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} < n$  e

maggiore di 2, quindi sarà compresa tra 2 e 3. Per  $n > 3$ , possiamo sempre sostituire almeno *le due ultime* unità in  $n + 1$  ( $= 1 + 1 + \dots + 1$   $n+1$  volte) con numeri strettamente minori di 1. In generale, questi sono  $\frac{1}{n^n}$  e  $\frac{n}{n^{n-1}} =$

$\frac{1}{n^{n-2}}$  la cui somma è minore di 1 se  $n > 2$  (\*), per cui  $S$  sarà sempre compresa tra 2 e  $n + 1 - 2 + 1$ , cioè tra 2 e  $n$ ,

qualunque sia  $n > 3$ .

(\*)  $\frac{1}{n^n}$  e  $\frac{1}{n^{n-2}}$  sono funzioni decrescenti di  $n$  e per  $n = 3$  valgono  $\frac{1}{27}$  e  $\frac{1}{3}$  rispettivamente.

E' possibile dimostrare che, per ogni  $n > 2$ , deve essere  $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$ , ma la dimostrazione è piuttosto lunga.

## Segno dei polinomi dipendenti da una sola variabile reale

### 1. Polinomi di primo grado

Il generico polinomio di primo grado  $ax + b$  dipende da due parametri reali,  $a$  e  $b$ . La discussione dipende dal segno di  $a$  (tralasciando il caso  $a = 0$ , che corrisponde a un polinomio di grado zero). Applicando la proprietà del trasporto, portiamo  $b$  al secondo membro e discutiamo la disuguaglianza (disequazione)  $ax > -b$ .

Se  $a > 0$ , possiamo dividere per  $a$  entrambi i membri della disequazione ottenendo  $x > -\frac{b}{a}$ . Se

invece  $a < 0$ , dobbiamo invertire il verso della disequazione e otteniamo  $x < -\frac{b}{a}$ . In conclusione,

$$a \neq 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \\ a < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Si deve osservare che i passaggi eseguiti con le regole del trasporto e del prodotto sono reversibili (le regole in questione sono coimplicazioni) e quindi forniscono coimplicazioni, cioè equivalenze logiche.

Se estendiamo la discussione all'espressione  $ax + b$  nel caso  $a = 0$ , è evidente che il segno di  $b$  stabilisce il segno dell'espressione.

## 2. Polinomi di secondo grado

La trattazione generale dei polinomi viene effettuata, se possibile, mediante la scomposizione in fattori. Nel caso dei polinomi di secondo grado, ciò è possibile solo se il discriminante è maggiore o uguale a zero. Bisogna distinguere tre casi:

1.  $\Delta > 0$ : il polinomio ha due radici reali e distinte,  $x_2 > x_1$  ed è scomponibile nel prodotto di due fattori di primo grado. Quindi

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

Il segno del polinomio è funzione della  $x$ . Indichiamo il trinomio di secondo grado con  $T(x)$ .

Se  $x < x_1$ , allora sia  $x - x_1$  sia  $x - x_2$  sono negativi ( $x_2 > x_1 \Rightarrow x - x_2 < x - x_1$ ) e il prodotto  $(x - x_1)(x - x_2)$  è positivo; quindi, il segno di  $T(x)$  è concorde con il segno di  $a$ .

Se  $x_1 < x < x_2$ , avremo  $x - x_1 > 0$  e  $x - x_2 < 0$ ; quindi  $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ , e il trinomio è discorde da  $a$ .

Se  $x_1 < x_2 < x$ ,  $x - x_1 > 0$  e  $x - x_2 > 0$ , quindi di nuovo  $(x - x_1)(x - x_2) > 0$  e il trinomio è ancora concorde con  $a$ .

In conclusione:  $a \cdot T > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \vee x > x_2$  e  $a \cdot T < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$ .

2.  $\Delta = 0$ : il trinomio ha due radici uguali e coincidenti, per cui  $x_2 = x_1$ , quindi  $T(x) = a \cdot (x - x_1)^2 = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2$  dato che, se  $\Delta = 0$ ,  $x_1 = -\frac{b}{2a}$ . Perciò per ogni  $x \neq -\frac{b}{2a}$  il trinomio di secondo grado è concorde con  $a$ . In generale,  $T(x) \geq 0$ .

3.  $\Delta < 0$ : il trinomio non ha radici reali. In questo caso, possiamo scomporre il trinomio in una somma di termini:

$$ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[ \left( x + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] \text{ (si applica il metodo del}$$

$$\text{completamente del quadrato a } x^2 + \frac{b}{a}x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

$$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]. \text{ La somma dei termini in parentesi è strettamente positiva; infatti, il primo}$$

è un trinomio di secondo grado  $\geq 0$ , e  $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$  in quanto il numeratore  $-\Delta$  e il denominatore sono entrambi positivi. Dunque nel caso  $\Delta < 0$  il trinomio è sempre concorde con  $a$ .

In alternativa, usando i numeri complessi abbiamo  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow T(x) = a \cdot \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ .

### 3. Polinomi di grado superiore al secondo

Salvo casi particolari, come binomi della forma  $x^n - a^n$  che possono essere ricondotti a disuguaglianze fondamentali, o come polinomi somme di potenze positive come  $x^4 + 4x^2 + 3$ , o scomposti in prodotto di fattori analizzabili come  $(x^3 + 1) \cdot (x^3 - 1)$ , il metodo si basa sulla scomposizione del polinomio nel prodotto di fattori di primo e di secondo grado. Infatti, questi polinomi possono essere analizzati in base alle regole esposte prima. Questa tecnica si basa sul *teorema fondamentale dell'algebra*, per il quale un polinomio di grado  $n$  a coefficienti reali o complessi ammette  $n$  "radici" complesse, non necessariamente tutte distinte. In particolare, se  $a + ib$  è una radice del polinomio, lo è anche  $a - ib$ ; perciò il polinomio contiene il fattore  $(x - a - ib) \cdot (x - a + ib) = (x - a)^2 + b^2$  che è un trinomio con  $\Delta < 0$ . Quindi ogni coppia di radici immaginarie complesse coniugate del polinomio corrisponde a fattori di secondo grado irriducibili, di segno definito positivo. In pratica, l'analisi del segno dei polinomi di grado superiore è limitata dalla possibilità di conoscere le radici reali e in particolare quelle distinte, la cui conoscenza è indispensabile per lo studio del segno. Infatti, per le considerazioni svolte il polinomio  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  è scomponibile nel prodotto del coefficiente principale  $a_0$  per fattori di primo grado  $(x - x_r)$  dove le  $x_r$  sono le eventuali radici reali (se la radice  $x_r$  ha molteplicità  $m$  corrisponde a un fattore  $(x - x_r)^m$ ), per fattori di secondo grado non scomponibili e definiti positivi. Questi non influiscono sul segno del polinomio. Quindi il segno dipende solo dalle radici reali e in particolare da quelle di molteplicità dispari, perché quelle di molteplicità pari corrispondono a fattori positivi per ogni  $x$  diverso dalla radice.

Per es., il polinomio  $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$  è scomponibile in  $(x - 1)^3(x^2 + x + 1)$  e quindi il suo segno dipende solo da quello di  $x - 1$ .

## Alcuni tipi notevoli di disequazioni

Le disequazioni sono disuguaglianze contenenti almeno una variabile soddisfatte se e solo se alla variabile (o alle variabili) si sostituiscono numeri reali appartenenti a un insieme opportuno. Se la disequazione contiene solo una variabile  $x$ , i numeri che la soddisfano si dicono *soluzioni* della disequazione. Può essere che una disequazione sia soddisfatta in tutto il campo reale, e allora è una identità. Risolvere una disequazione significa calcolare l'insieme di tutte e sole le soluzioni della disequazione, detto anche *insieme soluzione*. Se una disequazione non ammette soluzioni, allora l'insieme soluzione è l'insieme vuoto.

Se la disequazione contiene  $n$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , allora ogni sua eventuale soluzione sarà una  $n$ -pla ordinata di numeri reali  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e l'insieme delle soluzioni un insieme di  $n$ -ple ordinate di numeri reali.

## 1. Disequazioni binomie

Sono disequazioni del tipo  $x^n - a^n > 0$ , con  $a$  numero positivo o nullo. Bisogna distinguere il caso  $n$  pari da  $n$  dispari.

1. Poniamo  $n = 2k$ . La disequazione  $x^{2k} - a^{2k} > 0$ , in base alle proprietà generali sulle disuguaglianze tra potenze di esponente pari, è equivalente a  $x^2 - a^2 > 0$ . La sua soluzione generale è  $x < -a \vee x > a$ .

2. Poniamo  $n = 2k+1$ . Sempre per le proprietà delle disuguaglianze tra potenze di esponente dispari, la disequazione  $x^{2k+1} > a^{2k+1}$  equivale a  $x > a$ .

## 2. Disequazioni con radicali quadratici

I due tipi fondamentali sono

$$P(x) > \sqrt{Q(x)}$$

e

$$\sqrt{Q(x)} > P(x),$$

dove  $P(x)$  e  $Q(x)$  sono funzioni della variabile reale  $x$ . Per discutere le disequazioni, consideriamo anzitutto le corrispondenti disuguaglianze contenenti le indeterminate  $p$  e  $q$ .

Cominciamo con  $p > \sqrt{q}$ .

Il metodo consiste nel determinare tutte le conseguenze indipendenti di questa disuguaglianza, e della disuguaglianza  $\sqrt{q} \geq 0$  (si assume che una radice di indice pari sia generalmente positiva), in modo che la congiunzione di tutte queste conseguenze sia logicamente equivalente alla disuguaglianza iniziale.

Supponiamo che  $p > \sqrt{q}$  sia vera; allora  $p > \sqrt{q} \Rightarrow q \geq 0$  (la disuguaglianza non può essere vera se la radice è immaginaria). Da  $p > \sqrt{q}$  e  $\sqrt{q} \geq 0$  si deduce che  $p > 0$ . Poiché entrambi i membri della disuguaglianza sono positivi, possiamo elevare a quadrato e ottenere ancora una disuguaglianza equiversa:  $p > \sqrt{q}$  e  $\sqrt{q} \geq 0 \Rightarrow p^2 > q$ .

$$\text{Abbiamo quindi che } p > \sqrt{q} \Rightarrow \begin{cases} q \geq 0 \\ p > 0 \\ p^2 > q \end{cases}$$

Si tratta ora di dimostrare che la congiunzione delle disuguaglianze a secondo membro implica la disuguaglianza a primo membro. Infatti,  $q \geq 0 \Rightarrow (p^2 > q \Leftrightarrow p < -\sqrt{q} \vee p > \sqrt{q})$ , dato che, se  $q$  non fosse positivo o nullo, non potremmo estrarne la radice; se consideriamo  $p > 0$ , avremo solo  $p > \sqrt{q}$ . Perciò otteniamo

$$p > \sqrt{q} \Leftrightarrow \begin{cases} q \geq 0 \\ p > 0 \\ p^2 > q \end{cases}$$

In pratica, una disequazione del tipo  $P(x) > \sqrt{Q(x)}$  equivale a un sistema di tre disequazioni.

Ovviamente, questo metodo si applica a qualsiasi disequazione del tipo  $p > \sqrt[n]{q}$ , sostituendo  $p^{2n} > q$  a  $p^2 > q$ .

Vediamo ora  $\sqrt{q} > p$ . Abbiamo di nuovo  $q \geq 0$ , ma non possiamo evidentemente dedurre  $p > 0$ . Infatti, essendo il radicale positivo o nullo,  $p$  può essere positivo, nullo o negativo. Se  $p \geq 0$  allora possiamo elevare al quadrato entrambi i membri della disuguaglianza e ottenere  $q > p^2$ .

Viceversa, se  $p \geq 0$ ,  $q > p^2 \Rightarrow \sqrt{q} > p$

$$\text{Perciò } \sqrt{q} > p \text{ e } p \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} [q \geq 0] \\ p > 0 \\ q > p^2 \end{cases};$$

la disequazione  $q \geq 0$  può essere trascurata, perché è una conseguenza di  $q > p^2$ . Consideriamo ora l'alternativa, cioè  $p < 0$ . In questo caso la disuguaglianza  $\sqrt{q} > p$  è verificata in quanto una radice (che è maggiore o uguale a 0) è sempre strettamente maggiore di un numero negativo  $p$ , purché la radice sia reale; perciò

$$\sqrt{q} > p \text{ e } p < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q \geq 0 \\ p < 0 \end{cases}.$$

Unendo le disgiunzioni abbiamo

$$\sqrt{q} > p \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ q > p^2 \end{cases} \vee \begin{cases} p < 0 \\ q \geq p^2 \end{cases}$$

In pratica, l'insieme delle soluzioni della disequazione  $\sqrt{Q(x)} > P(x)$  è l'unione degli insiemi di soluzioni del sistema  $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > [P(x)]^2 \end{cases}$  e del sistema  $\begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) \geq [P(x)]^2 \end{cases}$ .

Lo stesso metodo si applica alla disequazione  $\sqrt[n]{q} > p$ .

### 3. Disequazioni di vario tipo con radicali quadratici

Supponiamo che  $p$ ,  $q$  e  $k$  siano funzioni di una sola variabile  $x$ . Allora

1.  $\sqrt{p} + \sqrt{q} > 0 > k$  è sempre verificata, se  $p \geq 0$  e  $q \geq 0$ , purché  $k$  sia reale. Quindi la disequazione è equivalente al sistema  $\begin{cases} p \geq 0 \\ q \geq 0 \end{cases}$ , eventualmente integrato dalla condizione di realtà della terza funzione  $k$ .

2. Supponiamo ora che  $k$  sia una costante positiva. Allora

$$\frac{1}{\sqrt{p}} > k \Leftrightarrow \sqrt{p} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \begin{cases} p < \frac{1}{k^2} \\ p > 0 \end{cases}$$

3. se  $k < 0$ ,

$\sqrt{p} > k \Rightarrow p \geq 0$ ; in questo caso, *non si deve elevare al quadrato* perché i due membri della disuguaglianza hanno segno diverso; per la stessa ragione si ha

$$\frac{1}{\sqrt{p}} > k \Rightarrow p > 0$$

4.  $\sqrt{q} > \sqrt[3]{p}$  è affine a  $\sqrt{q} > p$ , dato che  $\sqrt[3]{p}$  ha lo stesso segno di  $p$ . In questo caso però – se  $p \geq 0$  – dovremo elevare entrambi i membri alla sesta. Perciò l'insieme delle soluzioni si ottiene unendo gli insiemi soluzione dei due sistemi

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ q^3 > p^2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} p < 0 \\ q \geq 0 \end{cases}$$

5.  $\sqrt[3]{p} > \sqrt{q}$  è affine a  $p > \sqrt{q}$ . Quindi equivale al sistema

$$\begin{cases} q \geq 0 \\ p > 0 \\ p^2 > q^3 \end{cases}$$

## Disequazioni con valori assoluti

Per discutere l'argomento, dobbiamo partire dalla definizione di valore assoluto. Se  $x$  è reale, il suo valore assoluto  $|x|$  è generalmente definito come

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases};$$

più in generale, abbiamo, per ogni funzione reale  $f(x)$ ,

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Una seconda definizione – valida anche per i numeri complessi – ha carattere geometrico. Si può definire il modulo o valore assoluto di un numero reale  $x$  come la *distanza dal punto ad esso associato sulla retta reale dall'origine* o, più brevemente, come *distanza tra  $x$  e 0*. Questa definizione è basata sul postulato di continuità della retta reale, per cui, fissata l'origine e l'unità di misura, ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta, e viceversa. Perciò  $x$  e  $-x$  hanno lo stesso modulo, perché i corrispondenti punti sulla retta sono simmetrici rispetto all'origine.

Infine, si può considerare l'identità, valida per ogni numero reale,

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Il modulo di un numero complesso  $z = a + ib$  è la distanza del punto di coordinate  $(a, b)$  che rappresenta  $z$  nel piano complesso. Perciò  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , identità che, nel caso in cui il numero sia reale, si riduce appunto a  $|a| = \sqrt{a^2}$ .

Vediamo ora alcuni casi notevoli con  $x$  variabile reale.

### 1. Disequazioni elementari con valore assoluto

Sono le disequazioni  $|x| > k$  e  $|x| < k$ ,  $k$  costante  $\in \mathfrak{R}$ .

Questa disequazione devono essere discusse rispetto al segno di  $k$ . Consideriamo  $|x| > k$ .

Se  $k < 0$ , la disequazione è sempre risolta, essendo, per ogni  $x$  reale,  $|x| \geq 0 > k$

Se  $k = 0$ , la disequazione è verificata per ogni numero reale  $x \neq 0$ .

Se  $k > 0$ , dobbiamo applicare le definizioni viste precedentemente.

Vediamo ora  $|x| < k$ .

Se  $k < 0$ , la disequazione non ammette soluzioni. Lo stesso se  $k = 0$ , perché  $|0| = 0$  non può essere strettamente minore di  $0$ . Perciò dobbiamo analizzare solo il caso  $k > 0$ .

Risolviamo ora le disequazioni in base ai tre metodi possibili, posto  $k > 0$

1. In base alla *definizione algebrica*, abbiamo che  $|x| > k$  con  $x \geq 0$  equivale a  $x > k$  (in questo caso  $|x| = x$ ), mentre se  $x < 0$   $|x| = -x$  e quindi equivale a  $-x > k$  o  $x < -k$ , per cui, potendo  $x$  essere positivo o negativo, abbiamo

$$|x| > k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x > k \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x < -k \end{cases}$$

o, più semplicemente,  $x < -k \vee x > k$ . Quindi possiamo concludere che, se  $k > 0$

$$|x| > k \quad \Leftrightarrow \quad x < -k \vee x > k$$

Con lo stesso metodo,  $|x| < k$  se  $x \geq 0$  equivale a  $x < k$ , se  $x < 0$  a  $-x < k$  vale a dire  $x > -k$ ; quindi

$$|x| < k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x < k \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x > -k \end{cases}$$

unendo le soluzioni parziali dei due casi abbiamo

$$|x| < k \quad \Leftrightarrow \quad -k < x < k$$

2. In base alla distanza di  $x$  dall'origine. Consideriamo il seguente disegno



I due punti  $k$  e  $-k$  hanno entrambi distanza  $k$  dall'origine, quindi la distanza di  $x$  da  $0$ , cioè il suo modulo, è maggiore di  $k$  quando  $x > k$  o quando  $x < -k$ . Perciò concludiamo immediatamente che

$$|x| > k \quad \Leftrightarrow \quad x < -k \vee x > k$$

Con lo stesso schema si può interpretare la disuguaglianza opposta, che corrisponde alle  $x$  interne all'intervallo di estremi  $-k$  e  $k$ .

3. L'identità di  $|x|$  con  $\sqrt{x^2}$  porta alle disequazioni  $\sqrt{x^2} > k$  e  $\sqrt{x^2} < k$ , che sono equivalenti a  $x^2 > k^2$  e  $x^2 < k^2$  rispettivamente. Poiché in entrambi i casi  $k > 0$ , si deduce che  $x > k$  e  $x < k$ .

In generale, questi schemi si possono applicare a tutte le disequazioni del tipo  $|f(x)| > k$  o  $|f(x)| < k$ , sempre con  $k > 0$ ; quindi in generale

$$\begin{aligned} |f(x)| > k &\Leftrightarrow f(x) < -k \vee f(x) > k \\ |f(x)| < k &\Leftrightarrow -k < f(x) < k \end{aligned}$$

*Esempi –*

1. Risolvere  $|2x-1| > 2$ . Dobbiamo calcolare l'unione delle soluzioni delle due disequazioni

$$2x-1 > 2 \quad \text{e} \quad 2x-1 < -2 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{3}{2} \quad \vee \quad x < -\frac{1}{2}$$

2. Risolvere  $|2x-1| < 2$ . La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x-1 < 2 \\ 2x-1 > -2 \end{cases} \quad \text{ed è soddisfatta se} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

3. Risolvere  $|2x^2 - x - 1| > 2$ .

La soluzione generale è l'unione delle soluzioni delle due disequazioni

$2x^2 - x - 1 > 2$  e  $2x^2 - x - 1 < -2$ , cioè  $2x^2 - x - 3 > 0$  e  $2x^2 - x + 1 < 0$ ; la prima ha soluzione generale  $x < -1 \vee x > \frac{3}{2}$ , la seconda non ammette soluzioni reali. La soluzione della

disequazione è quindi  $x < -1 \vee x > \frac{3}{2}$ .

4. Risolvere  $|2x^2 - x - 1| < 2$ . In questo caso dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 > -2 \\ 2x^2 - x - 1 < 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - x + 1 > 0 \\ 2x^2 - x - 3 < 0 \end{cases}$$

la prima disequazione è soddisfatta in tutto il campo reale, la seconda per  $-1 < x < \frac{3}{2}$ . La

soluzione generale quindi è  $-1 < x < \frac{3}{2}$ .



**2. Disequazione**  $|x - c| < \delta$  dove  $c$  è un reale qualsiasi e  $\delta$  è un numero reale positivo arbitrario (“fissato a piacere”). Questa disequazione è soddisfatta da tutti e soli numeri reali tali che la loro distanza dal punto  $c$  è minore di  $\delta$ . Tali numeri (o punti) sono quindi compresi tra  $c - \delta$  e  $c + \delta$  e definiscono quindi un intervallo aperto di estremi  $c - \delta$  e  $c + \delta$ . Allo stesso modo, per la disequazione

$$|f(x) - K| < \varepsilon$$

con  $K$  reale qualsiasi ed  $\varepsilon$  numero reale positivo fissato a piacere, otteniamo l'equivalenza

$$|f(x) - K| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad K - \varepsilon < f(x) < K + \varepsilon$$

Analogamente, se  $\delta > 0$

$$|x - c| > \delta \quad \Leftrightarrow \quad x < c - \delta \vee x > c + \delta$$

e quindi,

$$|f(x) - K| > \delta \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < K - \delta \vee f(x) > K + \delta$$

### 3. Altri metodi

Le proprietà dei moduli consentono metodi alternativi in certi casi. Per es., la proprietà per cui il modulo di un rapporto è uguale al rapporto tra i moduli:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

può essere impiegata per impostare disequazioni frazionarie, nelle quali  $a$  e  $b$  sono entrambe funzioni dipendenti esplicitamente dalla  $x$ , come nel caso  $\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| > 2$ . Lo schema risolutivo può

essere  $\left| \frac{a}{b} \right| > k \Leftrightarrow |a| > k|b| \Leftrightarrow a^2 > k^2 \cdot b^2$  trattandosi di termini strettamente positivi.

Consideriamo, a questo proposito, tre possibili metodi per risolvere  $\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| > 2$ . Quello fondamentale consiste

nell'impostare la disgiunzione  $\frac{2x+1}{x-1} > 2 \vee \frac{2x+1}{x-1} < -2$ . Si tratta quindi di risolvere due disequazioni frazionarie, e di unire le rispettive soluzioni così trovate.

Un secondo metodo consiste nell'elevare al quadrato entrambi i membri di  $|2x+1| > 2|x-1|$ . Si ottiene  $4x^2 + 4x + 1 > 0 \Rightarrow 12x > 3 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$ , con passaggi molto più rapidi e semplici.

Possiamo anche passare alla discussione dei segni di  $2x+1 - 2|x-1|$ . I segni delle quantità sotto modulo sono positivi se  $x > -\frac{1}{2}$  e  $x > 1$  rispettivamente. Quindi abbiamo il seguente schema:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2x-1 > -2x+2 \Rightarrow -1 > 2 \quad x \in \emptyset \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 2x+1 > -2x+2 \Rightarrow 4x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{4} \\ x > 1 \Rightarrow 2x+1 > 2x-2 \Rightarrow 1 > -2 \end{cases}$$

Soltanto il secondo e il terzo caso forniscono soluzioni; perciò otteniamo la disgiunzione tra il sistema  $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$

e  $x > 1$  ( il caso  $x > 1$  conduce a una inidentità numerica, e il sistema tra una disequazione e una disuguaglianza numerica sempre verificata si riduce alla sola disequazione). L'insieme delle soluzioni è quindi l'unione della soluzione generale del primo sistema, cioè

$$\frac{1}{4} < x \leq 1, \text{ e } x > 1, \text{ quindi } x > \frac{1}{4}.$$

#### 4. Passaggio al reciproco

Questo metodo si applica alle disequazioni  $\frac{1}{|x|} > k$  e  $\frac{1}{|x|} < k$  con  $k > 0$ , che si possono trasformare rispettivamente in

$$|x| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad |x| > \frac{1}{k}$$

Inoltre, nel caso in cui  $f(x) = \frac{a}{g(x)}$  con  $a$  costante la disequazione  $\left| \frac{a}{g(x)} \right| > k > 0$  equivale a  $\left| \frac{g(x)}{a} \right| < \frac{1}{k}$  oppure  $|g(x)| < \frac{|a|}{k}$ ; si applica lo stesso metodo a  $\left| \frac{a}{g(x)} \right| < k \Leftrightarrow |g(x)| > \frac{|a|}{k}$ .

#### 5. Metodo della discussione del segno

Se nella disequazione compaiono disuguaglianze tra moduli o somme o differenze di moduli, conviene discutere il segno dei termini in modulo..

1. *disequazioni del tipo*  $|a| > |b|$ . Sono equivalenti alle disequazioni  $a^2 > b^2$ , ma questo metodo non è sempre praticabile. Il metodo generale consiste nel separare i quattro casi  $a < 0 \vee b < 0$ ;  $a > 0 \vee b < 0$ ;  $a < 0 \vee b > 0$ ;  $a > 0 \vee b > 0$  e di unire le soluzioni parziali relative ai singoli casi.

2. *disequazioni del tipo*  $|a| + |b| > f$  e  $|a| + |b| < f$ , dove  $f$  è una funzione di  $x$ . Stesso metodo, salvo casi particolari.

*Esempio*: risolvere  $|x-1| + |2-3x| > 2x$ .

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$2-3x > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

La disequazione corrisponde a

$$\begin{cases} x-1+3x-2 > 2x & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x+3x-2 > 2x & \text{se } \frac{2}{3} < x < 1 \\ 1-x+2-3x > 2x & \text{se } x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 1 \\ -1 > 0 & \text{se } \frac{2}{3} < x < 1 \\ x < \frac{1}{2} & \text{se } x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

la cui soluzione generale è  $x \geq 1 \vee x < \frac{1}{2}$

## 6. Disequazioni e intervalli numerici

Come è noto, tra punti della retta reale e numeri reali si può stabilire una corrispondenza biunivoca, stabilita l'origine e l'unità di misura. Allo stesso modo, si corrispondono intervalli e segmenti della retta reale. Un *intervallo numerico [proprio]*  $I$  di estremi  $a$  e  $b$  è, per definizione, l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra  $a$  e  $b$ ; se gli estremi non appartengono a  $I$  si parla di intervallo aperto. Quindi un intervallo aperto di estremi  $a$  e  $b$  è l'insieme di tutti i reali  $x$  tali che  $a < x < b$ . In particolare, un intervallo numerico di centro  $c$  e raggio (distanza di  $c$  da ciascuno degli estremi)  $\varepsilon$  è definito da  $c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$ , ovvero  $|x - c| < \varepsilon$ . Un *intorno di più infinito* è definibile con la disequazione  $x > M$ , dove  $M$  è un numero reale arbitrario. Un *intorno di meno infinito* è definibile con la disequazione  $x < M$ . Un *intorno di più e meno infinito* è l'unione di due intorni di più infinito e di meno infinito, quindi è rappresentabile con la disgiunzione  $x < N \vee x > M$  oppure  $|x| > M$ .

## Disuguaglianze con vettori

Le disuguaglianze vettoriali più importanti sono due:

**1. Il modulo del prodotto scalare** di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  è minore o uguale al prodotto dei rispettivi moduli

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Questa disuguaglianza è un caso particolare della più generale *disuguaglianza di Schwarz*

Questa proprietà è una conseguenza immediata della definizione di prodotto scalare; in particolare, se adottiamo la definizione trigonometrica per cui  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$  dove  $\gamma$  è l'angolo

definito dai due vettori, essa consegue da  $|\cos \gamma| \leq 1$ . L'uguaglianza vale quindi se l'angolo formato dai due vettori è nullo o piatto. In particolare, vale se  $\vec{a} = \vec{b}$ .

## 2. Disuguaglianza triangolare

Dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , vale la disuguaglianza

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

detta *triangolare* in quanto i tre lati di un triangolo  $ABC$ , considerati come valori assoluti di distanze orientate, possono essere identificati nei tre vettori  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  e  $\vec{AC}$  tali che  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .

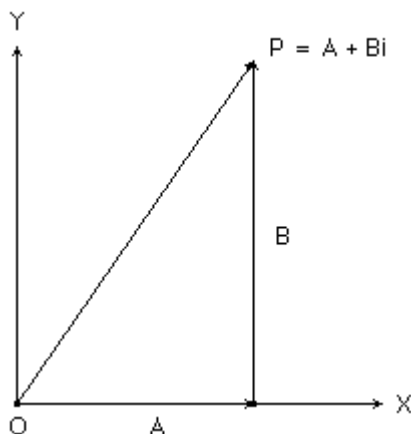
Questa disuguaglianza può essere facilmente dimostrata osservando che il modulo di un vettore è la radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso, per cui

$$|\vec{C}| = \sqrt{\vec{C} \cdot \vec{C}}$$

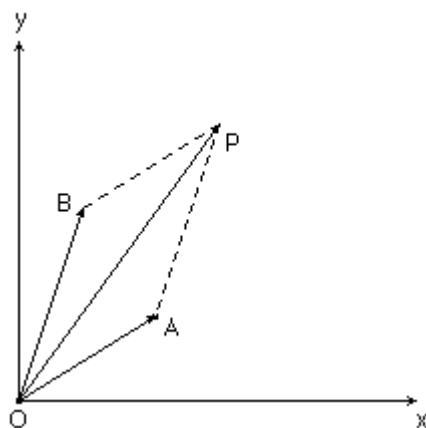
Infatti  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$ , dove  $a$  e  $b$  rappresentano i valori assoluti di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . La dimostrazione si basa sulla commutatività del prodotto scalare e sulla disuguaglianza precedente.

## 3. Disuguaglianza triangolare per i numeri complessi

La disuguaglianza triangolare è formalmente identica per i numeri reali e per i vettori. Tale identità può essere ricondotta al fatto che è valida per i numeri complessi, e i numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca con i vettori. Infatti, dato un sistema di riferimento cartesiano, il numero complesso  $A + Bi$  corrisponde alla somma vettoriale di un vettore di modulo  $A$  orientato lungo l'asse  $X$  e di un vettore ad esso ortogonale di modulo  $B$ .



La somma di numeri complessi in generale corrisponde alla somma dei vettori associati:



I punti A, B e P della figura possono essere interpretati come estremi dei vettori  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OP}$  o come punti associati rispettivamente ai numeri complessi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tali che  $z = x + y$ . La disuguaglianza triangolare applicata ai numeri complessi implica che in generale

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

La definizione algebrica di modulo di un numero complesso  $R + Ii$  è  $\sqrt{R^2 + I^2}$ . Supponiamo che  $R + Ii = (a + bi) + (c + di)$ . Allora la disuguaglianza triangolare diventa

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Questa può essere dedotta anche per altra via. Elevando al quadrato si ha (semplificando i termini  $a^2$  e  $b^2$  ecc. che compaiono in entrambi i membri dell'equazione)  $2ac + 2bd \leq 2\sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$  e quindi, di nuovo elevando al quadrato e dividendo per 4,  $a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$  da cui  $2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2$  e infine  $(ad)^2 + (bc)^2 - 2(ad) \cdot (bc) \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$ .

## Rappresentazione grafica di una disequazione in una sola variabile

### 1. Il metodo grafico

Questo metodo è molto utilizzato per la risoluzione di disequazioni nella sola variabile  $x$ ; in alcuni casi, la rappresentazione grafica permette di giungere molto rapidamente alla soluzione, evitando di eseguire molti calcoli.

Rappresentare graficamente una disuguaglianza contenente una variabile significa interpretare quella variabile come una coordinata in un sistema di assi cartesiani. La disequazione

$$y > k$$

dove  $k$  è un numero reale qualsiasi è rappresentata da tutti i punti del piano la cui ordinata è maggiore di  $k$ , cioè dal semipiano avente  $y = k$  come *margin*e inferiore; viceversa,  $y < k$  corrisponde al semipiano inferiore rispetto alla retta  $y = k$ . Analogamente, la disequazione

$$x > k$$

definisce un semipiano i cui punti hanno ascissa maggiore di  $k$ , cioè situato “a destra” della retta verticale  $x = k$ .

In linea di principio è possibile risolvere graficamente tutte le disequazioni di primo, secondo e terzo grado in una sola variabile. In quest’ultimo caso è talvolta necessario ricorrere al calcolo differenziale. Ovviamente, non sempre è possibile risolvere esattamente disequazioni algebriche di grado superiore al secondo.

La logica generale della soluzione è la seguente. Supponiamo che la disequazione abbia la forma

$$F(x) > k$$

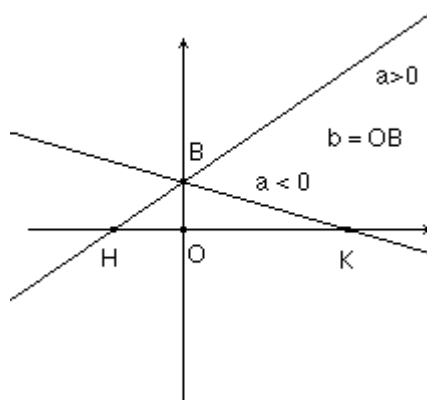
dove  $k$  è un numero reale qualsiasi, e  $F(x)$  una funzione di cui si conosce il grafico (in particolare, è possibile calcolare le soluzioni dell’equazione associata  $F(x) = k$ ). Allora essa è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y = F(x) \\ y > k \end{cases}$$

che definisce la parte (ramo) della curva di equazione cartesiana  $y = F(x)$  contenente punti di ordinata maggiore di  $k$ . Le soluzioni della disequazione sono tutte e sole le  $x$  dei punti  $P(x,y)$  appartenenti alla curva di equazione  $y = F(x)$  aventi ordinata  $y > k$ . Dal punto di vista grafico, tutte le  $y$  della curva  $y = F(x)$  maggiori di  $k$  costituiscono un intervallo proprio o improprio (cioè illimitato) sull’asse verticale, mentre le  $x$  corrispondenti definiscono un altro intervallo, anch’esso proprio o improprio, appartenente all’asse delle ascisse. Perciò la soluzione generale di una disequazione con metodi grafici equivale a una relazione tra intorni  $I_x$  e  $H_x$  rispettivamente sull’asse delle ordinate e delle ascisse tale che, per ogni  $x \in H_x$ , si abbia  $y \in I_y$ .

In particolare, se  $k = 0$ , la disequazione  $F(x) > 0$  è rappresentata dalla parte del grafico di ordinata positiva.

Il metodo grafico illustra alcune proprietà delle disuguaglianze. Per es., la disequazione  $ax + b > 0$  equivale a  $x > -\frac{b}{a}$  se  $a > 0$ , a  $x < -\frac{b}{a}$  se  $a < 0$ . Nel primo caso, la retta  $y = ax + b$  è ascendente, nel secondo discendente:



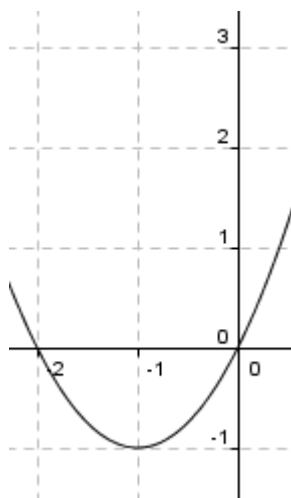
Le ascisse dei punti  $H$  e  $K$  sono  $-\frac{b}{a}$ . Nel primo caso, i punti sulla retta  $y = ax + b$  di ordinata positiva corrispondono ad ascisse maggiori di quella del punto  $H$ , che vale  $-\frac{b}{a}$  e quindi

$x > -\frac{b}{a}$  ; nel secondo caso, la retta ha ordinata positiva se  $x < -\frac{b}{a}$  .

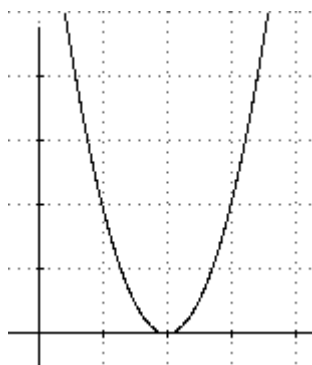
## 2. Disequazioni di secondo grado

Le disequazioni di secondo grado si possono risolvere confrontando la parabola  $y = ax^2 + bx + c$  e l'asse delle ascisse. Se  $a > 0$  , la parabola rivolge la concavità verso l'alto, e abbiamo tre possibilità, a seconda che il discriminante  $\Delta$  sia positivo, nullo o negativo:

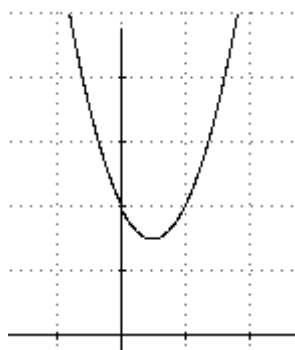
nel caso  $\Delta > 0$  , la parabola attraversa l'asse delle ascisse in due punti distinti e quindi la disequazione  $ax^2 + bx + c > 0$  è risolta se  $x$  è esterna all'intervallo avente per estremi le soluzioni dell'equazione associata, che corrispondono alle intersezioni con l'asse  $x$  , mentre la disequazione opposta  $ax^2 + bx + c < 0$  è soddisfatta per  $x$  compresa tra le soluzioni dell'equazione associata:



Nel caso  $\Delta = 0$  , le soluzioni coincidono e la parabola ha il vertice sull'asse delle ascisse. Quindi la disequazione  $ax^2 + bx + c > 0$  è verificata per ogni  $x \neq -\frac{b}{2a}$  , cioè per ogni  $x$  diversa dall'ascissa del vertice, mentre la disequazione opposta  $ax^2 + bx + c < 0$  non è mai verificata (la curva non ha punti di ordinata negativa).

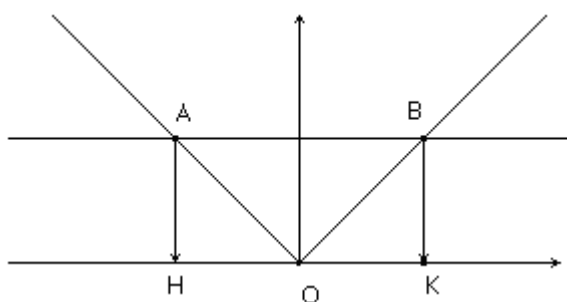


Nel caso  $\Delta < 0$  , la parabola non attraversa l'asse delle ascisse e quindi tutti i suoi punti hanno ordinata positiva, perciò la disequazione  $ax^2 + bx + c > 0$  è risolta in tutto il campo reale, mentre  $ax^2 + bx + c < 0$  non ammette soluzioni reali:



### 3. Valori assoluti

Per via grafica è anche possibile discutere la disequazione  $|x| > k$  e, più in generale,  $|x - c| > k$ , e le disequazioni opposte  $|x| < k$  e  $|x - c| < k$ :



Il grafico di  $|x|$  è l'unione delle bisettrici del primo e del secondo quadrante, e, se  $k > 0$ , interseca qualsiasi retta  $y = k$  in due punti di ascissa  $k$  e  $-k$  rispettivamente. Se  $|x| > k$ , dal grafico si deduce che  $x < -k$  oppure  $x > k$ ; se  $|x| < k$ , si ha invece  $-k < x < k$ .

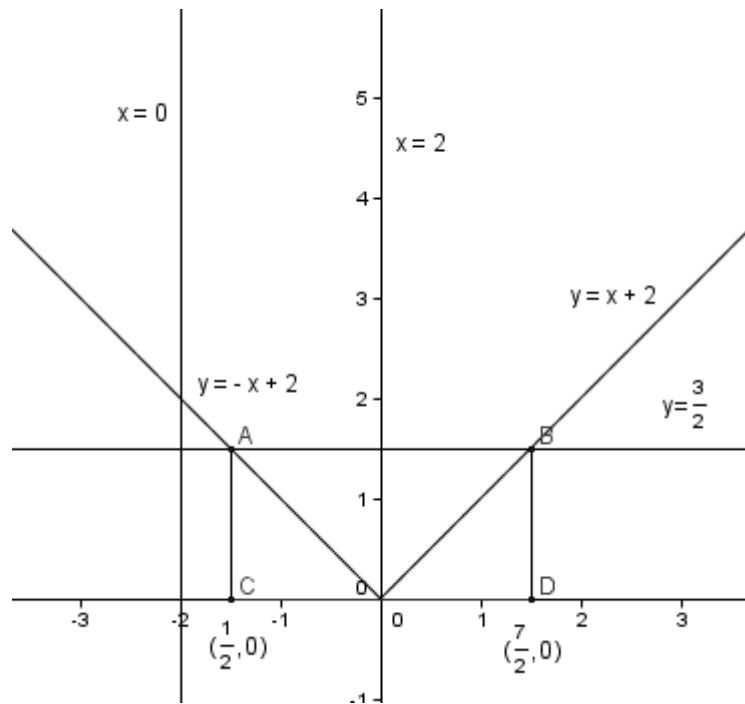
Se  $k = 0$ , il grafico di  $|x|$  tocca l'asse delle  $x$  solo nell'origine, quindi è  $|x| > 0$  per ogni  $x$  diverso da zero; evidentemente è sempre vero che, se  $k < 0$ ,  $|x| > k$ , mentre è impossibile che  $|x|$  sia minore di zero, dato che il grafico non contiene punti di ordinata positiva.

[va tuttavia notato che l'uso di un grafico per risolvere disequazioni costituisce una sorta di *inversione logica* del corretto processo deduttivo. E' vero che il grafico di una funzione data contiene tutte le informazioni su quella funzione e quindi è lecito partire dal grafico per risolvere qualsiasi problema che utilizzi tali informazioni, ma queste non possono essere dedotte dal grafico stesso. Questo infatti è solo una rappresentazione della funzione, ma le proprietà della funzione debbono essere ricavate *prima* di poter disegnare il grafico. Tali proprietà sono determinate anche risolvendo disequazioni, o a partire dalla definizione stessa della funzione: questo vale, in particolare, per lo studio del segno della funzione].

Per il grafico di  $|x - c| > k$  o  $< k$ , si può trasformare il precedente trasladando l'asse verticale di  $c$  unità nel verso negativo dell'asse delle  $x$ , o traslare l'intero grafico di  $c$  unità verso destra, a seconda che  $c$  sia positivo o negativo rispettivamente: operando in tal modo l'origine degli assi è spostata nel punto  $C(c; 0)$  e le intersezioni con la retta  $y = k$  sono trasformate in  $c - k$  e  $c + k$ . Si ottiene quindi

$$|x - c| > k \Leftrightarrow x < c - k \vee x > c + k \quad \text{e} \quad |x - c| < k \Leftrightarrow c - k < x < c + k$$

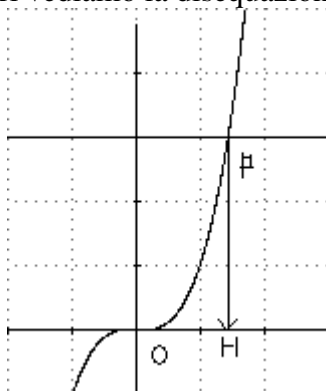




Si può giungere alla soluzione per via puramente grafica. Supponiamo di dover risolvere  $|x-2| < \frac{3}{2}$ ; si traccia il grafico di  $|x|$  e della retta  $y = \frac{3}{2}$ , che lo interseca nei punti A e B di ascisse rispettivamente  $-\frac{3}{2}$  e  $\frac{3}{2}$ . La sostituzione di  $x$  con  $x-2$  equivale alla traslazione dell'asse verticale nella retta  $x = -2$ , quindi le ascisse di tutti i punti sono aumentate di due, perciò C  $(-\frac{3}{2}, 0)$  diventa  $(\frac{1}{2}, 0)$  e D  $(\frac{3}{2}, 0)$  diventa  $(\frac{7}{2}, 0)$ . La parte di grafico di ordinata inferiore a  $\frac{3}{2}$  corrisponde all'intervallo  $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$  che è la soluzione della disequazione.

#### 4. Funzioni monotone

L'uso dei grafici aiuta ad applicare certe proprietà delle funzioni monotone in tutto il loro dominio; per es., per le potenze di grado dispari vediamo la disequazione  $x^n > k$ :

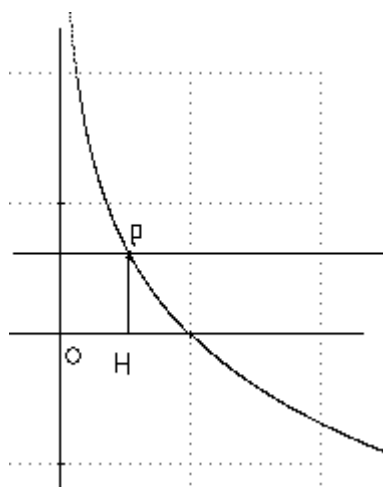


Il principio generale di tutte le disequazioni che implicano funzioni monotone si basa sul teorema per cui una funzione monotona in tutti i punti di un insieme è biiettiva in quello stesso insieme, per cui il grafico di una funzione monotona interseca la retta  $y = k$  al più in un solo punto; nel caso

$y = x^n$  con  $n$  dispari l'ascissa  $H$  di tale punto si calcola estraendo la radice  $n$ -esima di  $k$ , quindi  $x = \sqrt[n]{k}$ . La disequazione è risolta dal ramo della curva di ordinata maggiore di  $k$ , cioè se  $x > \sqrt[n]{k}$ ; viceversa,  $x < \sqrt[n]{k}$  risolve  $x^n < k$ . L'esempio proposto è quello di una generica funzione monotona strettamente crescente, per la quale

$$f(x) > k \Leftrightarrow x > f^{-1}(k)$$

Se invece la funzione è monotona strettamente decrescente, come nel caso di  $\ln \frac{1}{x}$ , l'orientamento della disequazione deve essere invertito: supponiamo di voler risolvere graficamente la disequazione  $\ln \frac{1}{x} > k$ .

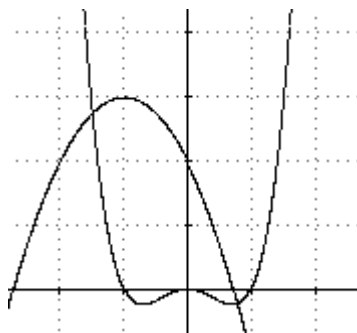


In questo caso, il punto  $H$  si trova risolvendo l'equazione  $\ln \frac{1}{x} = k$ , la cui unica soluzione è

$x = e^{-k}$ ; il grafico ci dice che  $\ln \frac{1}{x} > k$  se  $0 < x < e^{-k}$  (il limite inferiore 0 deriva dal campo di esistenza del logaritmo, e corrisponde al fatto che il grafico è interamente contenuto nel primo e nel quarto quadrante).

### 5. Disequazioni del tipo $f(x) > g(x)$ : considerazioni generali

Il metodo generale consiste nel tracciare i grafici delle due curve e calcolare, se possibile, gli eventuali punti di intersezione. La disequazione è risolta per ogni  $x$  tale che l'ordinata del punto  $P$  di ascissa  $x$  sulla curva  $y = f(x)$  è maggiore dell'ordinata del punto  $Q$  avente la stessa ascissa sulla curva  $y = g(x)$  avente la stessa ascissa. Detto altrimenti, le soluzioni della disequazione sono le ascisse dei punti della curva  $y = f(x)$  con ordinata maggiore dei punti sulla curva  $y = g(x)$  aventi la stessa ascissa. Questo metodo può essere vantaggioso in molti casi; per esempio, con *disequazioni contenenti radicali quadratici*, che richiedono una certa padronanza di calcolo e comunque possono richiedere calcoli complessi (soluzione di più sistemi), o contenenti valori assoluti, ecc.



Il grafico confronta la quartica  $y = x^4 - x^2$  (la curva passante per  $O$  e con la concavità rivolta verso l'alto) con la parabola  $y = 2 - 2x - x^2$ . Vi sono due intersezioni; si ha  $2 - 2x - x^2 > x^4 - x^2$  nella parte del grafico compresa tra le due soluzioni dell'equazione associata  $x^4 - x^2 = 2 - 2x - x^2$ ,  $x^4 - x^2 > 2 - 2x - x^2$  nella parte esterna all'intervallo avente per estremi le medesime soluzioni. E' evidente che il metodo grafico presuppone la possibilità di studiare le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  (bisogna *almeno* determinare se vi sono intersezioni tra le rispettive curve, e quante sono), e la soluzione analitica della disequazione può ottenersi solo se le ascisse dei punti di intersezione sono esattamente calcolabili. Tuttavia, un grafico può in genere essere eseguito al computer, e si può eseguire anche il calcolo approssimato delle intersezioni.

## 6. Disequazioni con radicali quadratici

Consideriamo  $f(x) > \sqrt{g(x)}$ ; possiamo impostarla tracciando il grafico di  $y = f(x)$  e il grafico di  $y = \sqrt{g(x)}$ , che generalmente va inteso come  $\begin{cases} y^2 = g(x) \\ y \geq 0 \end{cases}$ : si traccia solo la parte della curva  $y^2 = g(x)$  di ordinata positiva o nulla. Il grafico contiene implicitamente l'informazione sul dominio della  $g(x)$  e la condizione  $f(x) > 0$ , che è soddisfatta da tutte le soluzioni della disequazione. Consideriamo l'insieme delle disequazioni del tipo

$$ax + b > \sqrt{cx + d};$$

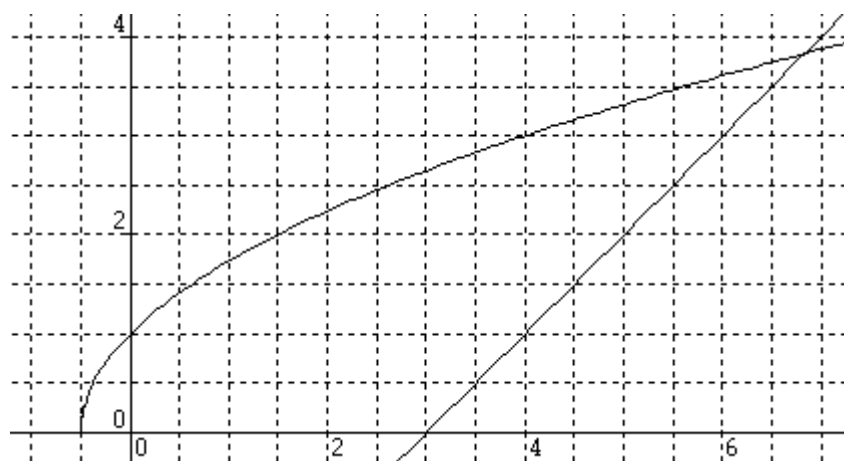
elevando al quadrato al secondo membro otteniamo la parabola  $y^2 = cx + d$ , avente per asse di simmetria l'asse delle ascisse e vertice  $V(-\frac{d}{c}; 0)$ . Si considera solo la parte di ordinata positiva e si calcolano le eventuali intersezioni con la retta  $y = ax + b$ ; le soluzioni corrispondono alle  $x$  tali che i punti sulla retta hanno ordinata maggiore dei punti sulla parabola aventi la stessa ascissa. Lo stesso metodo si applica alle soluzioni della disequazione opposta

$$ax + b < \sqrt{cx + d};$$

rispetto al metodo algebrico, abbiamo il vantaggio di non dover ricorrere a metodi diversi a seconda dell'orientamento della disuguaglianza, anche se può esservi qualche problema nell'interpretazione del grafico, che si presenta sotto forme diverse a seconda dell'esempio considerato.

Prendiamo in esame le disequazioni

$$x - 3 > \sqrt{2x + 1} \text{ e la sua opposta, } x - 3 < \sqrt{2x + 1} .$$



La parabola definisce il dominio della radice ( $x \geq -\frac{1}{2}$ ). Graficamente, questo dominio è l'insieme delle  $x$  alle quali corrisponde un punto della semiparabola; detto altrimenti, è la proiezione sull'asse delle ascisse della curva. L'unica intersezione utile con la retta è quella di ordinata positiva, cioè  $x = 2\sqrt{2} + 4$ . La prima disequazione è risolta da ogni  $x > 2\sqrt{2} + 4$ , la seconda da ogni  $x$  appartenente al dominio della radice e tale che il punto di ascissa  $x$  della semiparabola ha ordinata superiore al punto con la stessa  $x$  sulla retta: quindi la soluzione generale è  $-\frac{1}{2} \leq x < 2\sqrt{2} + 4$ . Si deve fare attenzione al fatto che *non interessa l'intersezione di ordinata negativa e in generale il ramo della parabola di ordinata negativa*; in questo modo si tiene presente che la radice ha segno positivo. In questo tipo di discussione i punti notevoli sono le intersezioni tra retta e curva di ordinata non negativa e i limiti del dominio; nel caso di una parabola con asse parallelo a quello delle  $x$ , l'ascissa del vertice è l'estremo inferiore o superiore del dominio, a seconda di come la parabola è orientata.

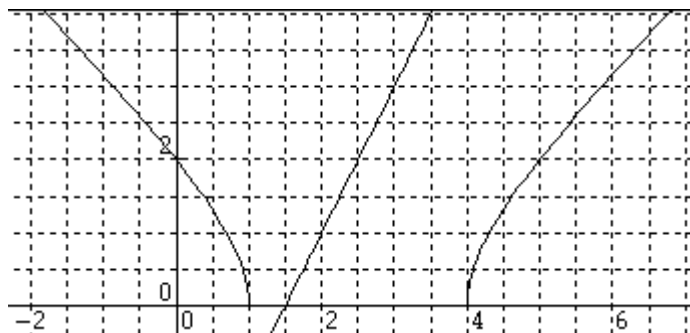
Vediamo ora disequazioni del tipo

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} < mx + q \text{ o la disequazione contraria } \sqrt{ax^2 + bx + c} > mx + q.$$

In questo caso bisogna distinguere tra  $a > 0$  e  $a < 0$ . Nel primo caso, la curva  $y^2 = ax^2 + bx + c$  con  $y \geq 0$  è la parte di ordinata positiva di un'iperbole  $y^2 - ax^2 - bx - c = 0$ , con vertici reali sull'asse delle ordinate o delle ascisse; nel secondo caso, si ha un'ellisse. Se  $a = -1$ , la discussione implica solo una circonferenza; se  $a = 1$ , un'iperbole equilatera. Per esempio, la disequazione

$$2x - 3 > \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

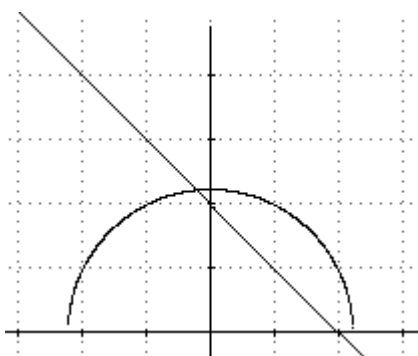
implica un confronto tra la "semiiperbole" equilatera  $y^2 - x^2 + 5x - 4 = 0$  con  $y \geq 0$  e la retta  $y = 2x - 3$ :



Dal grafico si deduce che il dominio della radice è dato da  $x \leq 1 \vee x \geq 4$ ; dato l'orientamento della disuguaglianza, la disequazione è risolta per ogni  $x \geq 4$  ( la retta ha coefficiente angolare 2 e quindi non intersecherà mai l'asintoto obliquo  $y = x$  ). Si può notare che il ricorso a un grafico eseguito a computer può evitare molto lavoro di calcolo, specie se non c'è bisogno di calcolare intersezioni. La disequazione opposta è risolta se  $x \leq 1$ .

Il caso più semplice è però quello del confronto tra semicirconferenza positiva e retta. Consideriamo la disequazione

$$2 - x > \sqrt{5 - x^2} \text{ e la sua opposta.}$$



Il diametro della semicirconferenza stabilisce il dominio della radice, che è l'intervallo chiuso di estremi  $-\sqrt{5}$  e  $+\sqrt{5}$ . La retta e la semicirconferenza si intersecano nel punto di ordinata positiva

soluzione dell'equazione  $(2 - x)^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 1 = 0$ , cioè  $x = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$  (l'altra

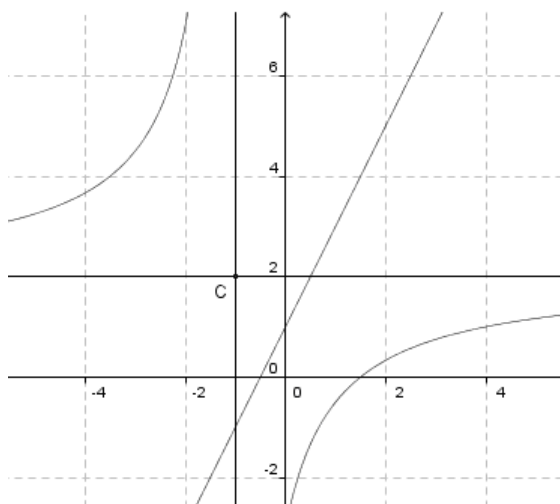
soluzione  $\frac{2 + \sqrt{6}}{2}$  che ha ascissa maggiore corrisponde all'intersezione di ordinata negativa).

L'ordinata della retta supera l'ordinata della circonferenza nell'intervallo  $-\sqrt{5} \leq x < \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ ,

che è la soluzione della disequazione  $2 - x > \sqrt{5 - x^2}$ . L'intervallo complementare

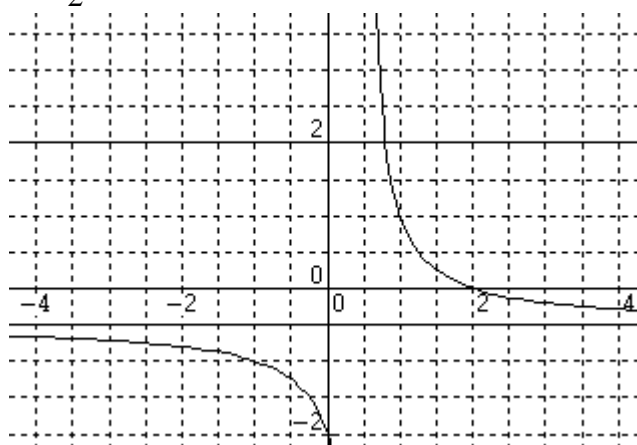
$\frac{2 - \sqrt{6}}{2} < x \leq +\sqrt{5}$  rappresenta la soluzione della disequazione  $2 - x < \sqrt{5 - x^2}$ .

7. **Disequazioni frazionarie** - una disequazione del tipo  $\frac{ax+b}{cx+d} > K$  o  $< K$  con  $c \neq 0$  e  $ad - bc \neq 0$  implica un confronto tra funzione omografica e retta orizzontale. Il metodo grafico si può estendere anche a disequazioni del tipo  $\frac{ax+b}{cx+d} </> mx + q$ .



In questo caso, stiamo confrontando  $y = 2x + 1$  e  $y = \frac{2x-3}{x+1}$ . La funzione omografica ammette un asintoto verticale di equazione  $x = -1$  e un asintoto orizzontale  $y = 2$ . Il grafico evidenzia che tutto il ramo inferiore destro della curva soddisfa la disequazione  $2x + 1 > \frac{2x-3}{x+1}$ , mentre il ramo superiore sinistro corrisponde alla disequazione opposta. Perciò  $2x + 1 > \frac{2x-3}{x+1}$  ha come soluzione  $x > -1$ , mentre la disequazione opposta  $2x + 1 < \frac{2x-3}{x+1}$  ha soluzione  $x < -1$ . In  $x = -1$  la funzione omografica non è definita.

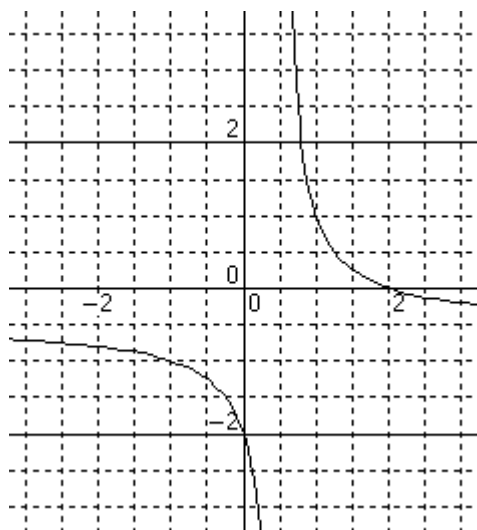
Nel caso seguente una funzione omografica è confrontata con una retta orizzontale: consideriamo la funzione omografica  $y = \frac{2-x}{2x-1}$  e la retta orizzontale  $y = 2$ . Il dominio dell'omografica è tutto il campo reale, escluso  $x = \frac{1}{2}$ , che come al solito corrisponde a un asintoto verticale.



L'asintoto orizzontale è  $y = -\frac{1}{2}$ . Si ha  $\frac{2-x}{2x-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$  (parte del grafico di ordinata maggiore di 2) e  $\frac{2-x}{2x-1} < 2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \vee x > 2$  (ramo sinistro inferiore e parte del ramo superiore di ordinata minore di 2).

### 8. Omografica in valore assoluto

I metodi grafici rivelano la loro potenza soprattutto nel caso di disequazioni con valori assoluti, in particolare del tipo  $\left| \frac{ax+b}{cx+d} \right| > / < K$ . Infatti, in questo caso, il calcolo algebrico conduce a disgiunzioni o a sistemi che implicano un certo numero di operazioni di calcolo. Consideriamo p.es.  $\left| \frac{2-x}{2x-1} \right| > 2$ . Il grafico è quello precedente, con l'aggiunta della retta  $y = -2$ .



Il dominio dell'omografica è il campo reale escluso  $x = \frac{1}{2}$ . Poiché la disequazione è risolta se

$\frac{2-x}{2x-1} > 2$  o se  $\frac{2-x}{2x-1} < -2$ , la soluzione corrisponde alla parte del grafico esterna alla striscia piana limitata dalle due rette orizzontali  $y = \pm 2$ . Il ramo sinistro inferiore della curva interseca la retta  $y = -2$  in  $x = 0$ , il ramo destro interseca  $y = 2$  se  $2-x = 4x-2$ , da cui  $x = \frac{4}{5}$ .

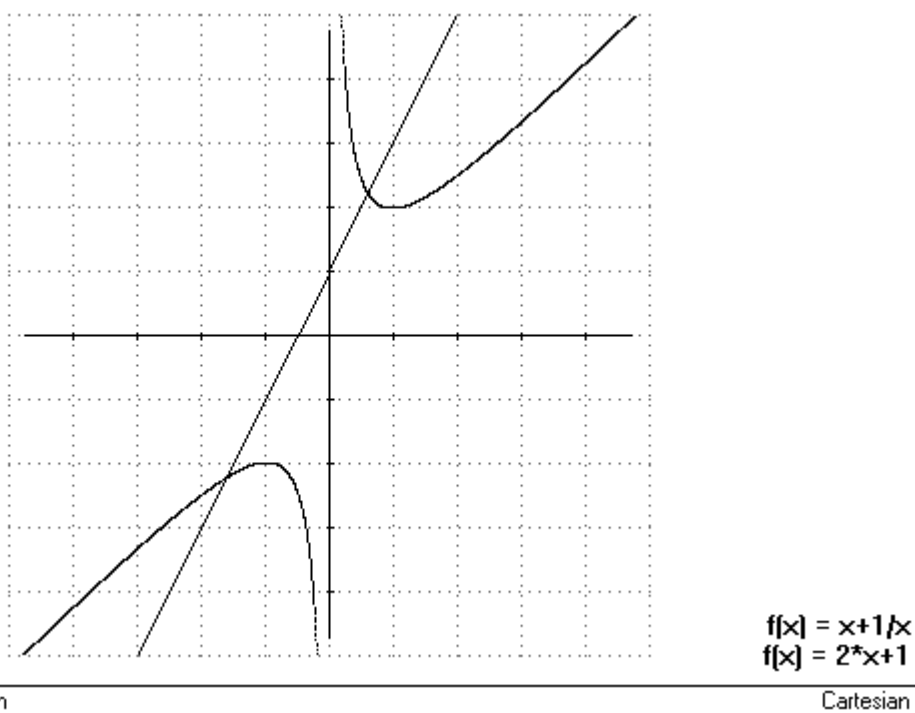
Poiché l'asintoto verticale è  $x = \frac{1}{2}$ , la disequazione è risolta nell'intervallo aperto di estremi 0 e  $\frac{4}{5}$ , escludendo  $x = \frac{1}{2}$ .

La disequazione opposta  $\left| \frac{2-x}{2x-1} \right| < 2$  corrisponde invece alla parte di grafico compresa tra le due rette, dato che equivale a  $-2 < \frac{2-x}{2x-1} < 2$ ; quindi è risolta per  $x < 0 \vee x > \frac{4}{5}$ .

### 9. Condizioni generali per la risoluzione di disequazioni algebriche

In linea di principio, è possibile risolvere *esattamente* con metodi grafici tutte le disequazioni algebriche di primo e secondo grado, o riconducibili a quelle di secondo grado. Il problema consiste nel risolvere l'equazione associata alla disequazione. Per es., la disequazione

$x + \frac{1}{x} > 2x + 1$  è di secondo grado, dato che l'equazione associata è  $\frac{1-x-x^2}{x} = 0$ , che può essere facilmente risolta essendo il numeratore di secondo grado. Graficamente dobbiamo confrontare un'iperbole con asintoto verticale e obliquo con una retta:



Il dominio della frazione è il campo reale escluso 0 ; le intersezioni con la retta sono le soluzioni dell'equazione  $1 - x - x^2 = 0$  , cioè  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  . La disequazione proposta è risolta se l'ordinata dei punti sulla curva (iperbole) è maggiore dell'ordinata dei punti sulla retta aventi la stessa  $x$  , vale a dire se  $x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee 0 < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ; la disequazione contraria è risolta se  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < 0 \vee x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Una *condizione sufficiente per stabilire se una disequazione tra funzioni algebriche è esattamente risolvibile è che la differenza tra i prodotti incrociati dei numeratori e dei denominatori sia un polinomio di secondo grado*. Infatti, supponiamo che la disequazione abbia la forma

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$$



dove  $A B C D$  sono polinomi nella variabile  $x$ . Per determinare le eventuali intersezioni tra le due curve  $y = \frac{A}{B}$  e  $y = \frac{C}{D}$ , dobbiamo risolvere l'equazione  $AD - BC = 0$ , il che è sicuramente possibile se l'espressione  $AD - BC$  è un polinomio di secondo grado. Una condizione più facilmente verificabile, ma più restrittiva, è che i singoli prodotti incrociati  $AD$  e  $BC$  siano polinomi di secondo grado.

In base a questo criterio, sono sicuramente analizzabili le disequazioni  $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$  (che però può essere risolta algebricamente moltiplicando entrambi i membri per  $x^2$ , con  $x \neq 0$ , equivalente a  $x > 1$ ) e  $\frac{x^3 - x^2 + 2x - 5}{x} > x^2 + x$ ; in questo caso però vi è la difficoltà di tracciare esattamente il grafico della frazione, mentre la soluzione analitica è agevole.

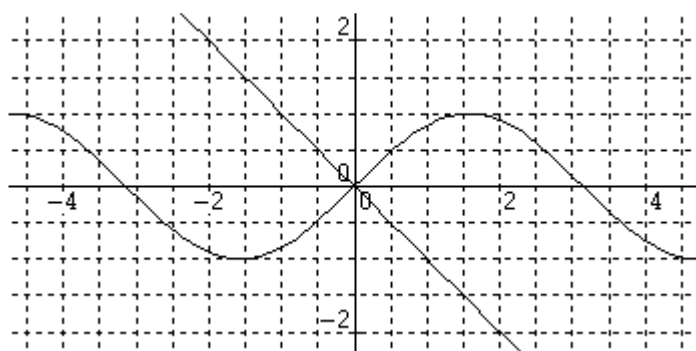
Più complesso è il confronto con metodi grafici tra un rapporto tra polinomi di secondo grado e una costante (il confronto tra questo rapporto e un polinomio di grado maggiore o uguale a 1 conduce a disequazioni di grado superiore al secondo e non è, in generale, esattamente risolvibile), o tra una frazione del tipo  $\frac{ax^2 + bx + c}{cx + d}$  e una funzione lineare  $y = mx + q$ . In quest'ultimo caso, tuttavia, il grafico della frazionaria è manualmente tracciabile in quanto il numeratore della derivata della frazionaria è un polinomio di secondo grado; se però numeratore e denominatore sono entrambi di secondo grado, il numeratore della derivata può essere di terzo grado e in tal caso non è detto che si possano individuare esattamente i punti di massimo o minimo relativo e i corrispondenti valori dei massimi o minimi relativi, che sono necessari per operare il confronto con una costante. Perciò, in alcuni casi i metodi grafici – a meno di ricorrere alla macchina – non sono più efficaci dei metodi analitici manuali.

## 10. Disequazioni trigonometriche miste

In altri casi, tuttavia, il metodo grafico si dimostra estremamente più rapido e intuitivo dei metodi analitici. Ciò può accadere, in particolare, con disequazioni contenenti funzioni goniometriche, come

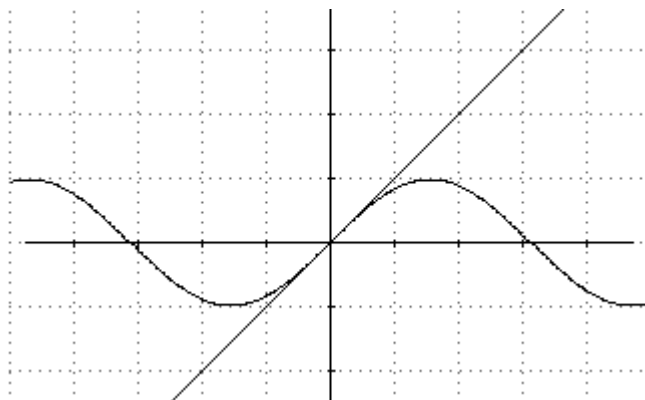
$$\sin x + x > 0.$$

Separiamo i due termini dell'equazione:  $\sin x > -x$ .



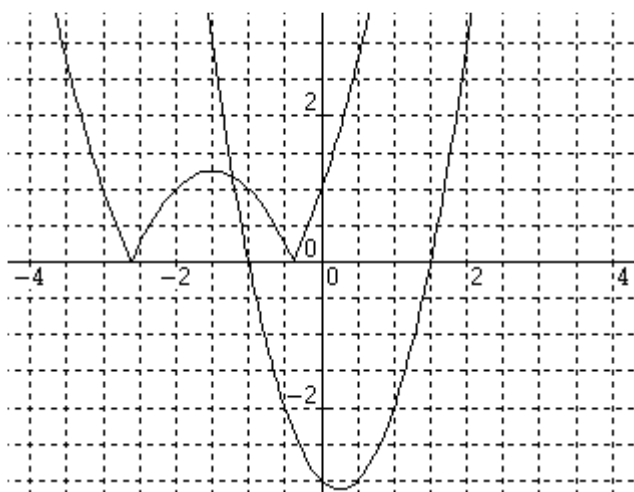
E' evidente che la disequazione è verificata per ogni  $x > 0$ .

La disequazione  $\sin x > x$ , invece è verificata per ogni  $x < 0$ :



### 11. Una disequazione con valore assoluto

Infine, analizziamo la disequazione  $|x^2 + 3x + 1| > 2x^2 - x - 3$



Il grafico del modulo si ottiene da quello della funzione sotto modulo, lasciando invariati i rami di ordinata positiva e sostituendo l'arco di ordinata negativa con il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Tuttavia, per valutare correttamente il problema dal punto di vista grafico è necessario calcolare *tutte* le intersezioni tra le due curve (il grafico ricopre una parte limitata del piano e non è possibile dedurre da questa tutte le informazioni necessarie). Quindi dobbiamo risolvere le equazioni

$$x^2 + 3x + 1 = 2x^2 - x - 3 \quad \text{e} \quad x^2 + 3x + 1 = 3 + x - 2x^2,$$

la prima per  $x^2 + 3x + 1 > 0$  cioè  $x < \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$  o  $x > \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$  (rami laterali) e la seconda per  $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$  (arco centrale).

La prima conduce a  $x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 - 2\sqrt{2}$  e  $2 + \sqrt{2}$ . La minore delle due soluzioni è compresa nell'arco centrale e non ha senso; la maggiore corrisponde a un'intersezione *non rappresentata nel grafico*. La seconda equazione conduce a  $3x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ . Una sola delle due soluzioni ci interessa, vale a dire  $\frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$  che è compresa nel ramo

centrale della curva modulo (lo si deduce dal fatto che è negativa); l'altra soluzione, positiva, corrisponde ad un punto esterno al ramo centrale e quindi non ha senso. Si deve quindi avere

$$|x^2 + 3x + 1| > 2x^2 - x - 3 \Rightarrow \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} < x < 2 + \sqrt{2} .$$

## Disequazioni in due variabili

### 1. Caratteristiche generali

Le disequazioni in due variabili possono essere interpretate nel piano cartesiano come *superfici* limitate dalla curva rappresentata dall'equazione associata.

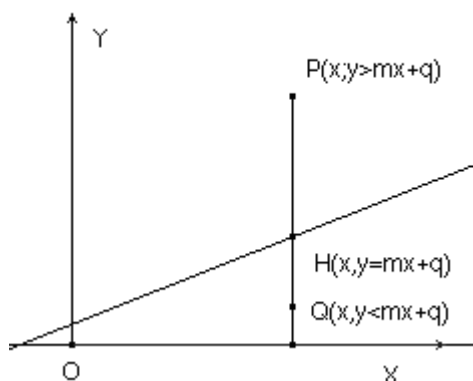
Supponiamo che una curva  $\Gamma$  abbia equazione  $F(x; y) = 0$ . Alla curva si possono associare le due disequazioni opposte  $F(x; y) > 0$  e  $F(x; y) < 0$ . Entrambe sono soddisfatte da parti del piano, il cui perimetro è la curva  $F(x; y) = 0$ .

### 2. Disequazioni lineari in $x, y$

Sono della forma  $ax + by + c > / < 0$ . Queste disequazioni sono rappresentate da un semipiano tale che il suo margine (retta limite) è la retta  $ax + by + c = 0$ . Supponiamo che  $b > 0$ ; allora, esplicitando  $y$  nella disequazione  $ax + by + c > / < 0$  abbiamo  $y > / < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ , senza cambiare

il verso della disuguaglianza. Ponendo  $-\frac{a}{b} = m$  e  $-\frac{c}{b} = q$  si ottiene  $y > / < mx + q$ .

Consideriamo il caso  $y > mx + q$ . Nel piano cartesiano,  $y = mx + q$  è l'equazione di una retta; quindi un punto  $H$  di ascissa  $x$  sulla retta ha ordinata  $mx + q$ . Un punto  $P$  di ordinata  $y > mx + q$  avente la stessa  $x$  di  $H$  appartiene alla parallela all'asse  $OY$  passante per  $H$  e si trova nel semipiano superiore rispetto al margine  $y = mx + q$ . Al contrario, un punto  $Q$  di ordinata  $y < mx + q$  si troverebbe nel semipiano inferiore. Viceversa, un punto  $P$  generico appartenente al semipiano superiore deve avere ordinata maggiore di quella del punto  $H$  avente la stessa  $x$  di  $P$ , quindi deve essere  $y_P > y_H = mx + q$ .



Il sistema misto tra una disequazione lineare e l'equazione di una curva  $F(x; y) = 0$  significa l'arco della curva (se esiste) i cui punti soddisfano la disequazione data. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y > mx + q \end{cases}$$

seleziona l'arco di circonferenza i cui punti hanno ordinata maggiore di  $mx + q$ . Se la circonferenza è contenuta interamente nel semipiano inferiore, questo arco non esiste; al contrario, se la circonferenza è tutta contenuta nel semipiano superiore, coincide con l'intera circonferenza.

### 3. Disequazioni algebriche in $x, y$

Analogamente, la disequazione

$$y >/< ax^2 + bx + c$$

rappresenta tutti i punti del piano cartesiano la cui ordinata è maggiore / minore di quella del punto appartenente alla parabola e avente la stessa ascissa. Più in generale, la disequazione

$$y >/< f(x)$$

rappresenta la parte di piano "superiore" o "inferiore" alla curva di equazione  $y = f(x)$ , con  $x$  variabile nel dominio della funzione  $y = f(x)$ .

Una disequazione implicita del tipo  $F(x; y) >/< K$  ha un significato che dipende dalla curva rappresentata dall'equazione associata  $F(x; y) = K$ . Se si tratta di una curva chiusa, o più in generale di una conica, la disequazione rappresenta la parte "interna" o la parte "esterna" della curva. Ciò è particolarmente evidente nel caso del cerchio di raggio  $r$  e centro  $C(a; b)$ , che è rappresentato dalla disequazione

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$$

Infatti, il cerchio è l'insieme dei punti del piano la cui distanza dal centro non supera il raggio, quindi  $CP \leq r \Rightarrow CP^2 \leq r^2$ ; la distanza al quadrato tra due punti è data dalla somma dei quadrati delle differenze tra le rispettive ascisse e ordinate ed essendo  $P(x; y)$  il punto generico del cerchio, si ha  $CP^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$  e quindi la disequazione.

Nel caso di una conica in generale, si deve anzitutto specificare cosa si intende per "parte interna" e "parte esterna" di una conica. Questi termini hanno un significato immediato nel caso di un cerchio o di un'ellisse, ma la parabola e l'iperbole sono curve aperte. In questo caso, definiremo "esterna" alla conica la parte di piano contenente rette esterne alla conica stessa, cioè non secanti e non tangenti; invece tutte le rette condotte per un punto qualsiasi della parte "interna" sono secanti della conica. Ciò equivale a definire come "interna" alla conica la parte convessa di piano avente come margine la conica stessa, e come "esterna" la parte concava. Supponiamo che l'equazione della conica sia

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Consideriamo il caso dell'ellisse, per cui  $A$  e  $B$  hanno segno concorde.

Una retta secante parallela all'asse delle ordinate è intersecata dalla curva in due punti distinti, e la parte interna contiene i punti di ordinata compresa tra quelle delle due intersezioni; quindi le coordinate dei punti interni soddisfano una doppia disequazione del tipo

$$f(x) < y < g(x),$$

nella quale  $f(x)$  e  $g(x)$  sono le ordinate espresse in funzione della  $x$  delle due intersezioni tra la curva e la retta verticale di ascissa  $x$ .

Supponiamo  $A$  e  $B$  positivi; la disequazione

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E < 0$$

è di secondo grado rispetto alla  $y$ . Essendo  $B > 0$  essa equivale a una disequazione di secondo grado nella variabile  $y$ , quindi risolvendo rispetto a  $y$  otteniamo  $f(x) < y < g(x)$  dove  $f(x)$  e  $g(x)$  sono le soluzioni dell'equazione associata. Quindi la disequazione rappresenta la parte interna alla curva.

La disequazione opposta  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E > 0$  invece rappresenta la parte esterna.

Il cerchio è un caso particolare di questa espressione, con  $A = C = 1$ ,  $B = 0$ ,  $D = -2a$ ,  $E = -b^2 - a^2 + r^2$ .

Nel caso dell'iperbole, la parte interna alla curva è quella contenente i fuochi. Una disequazione del tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$$

nel caso  $A$  e  $B$  discordi rappresenta quindi o la parte esterna o la parte interna di una iperbole riferita agli assi. In linea di principio, è possibile stabilire quale delle due parti di piano è rappresentata dalla disequazione senza studiare completamente la curva; infatti basta calcolare le coordinate del centro e verificare se soddisfano o no la disuguaglianza assegnata. Il centro è un punto appartenente alla parte esterna perciò se soddisfa la disequazione questa rappresenta la parte esterna alla curva, altrimenti quella interna.

Nel caso di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, la parte interna (contenente il fuoco) è rappresentata dalla disequazione

$$y > ax^2 + bx + c$$

se la curva rivolge la concavità verso l'alto, dalla disequazione

$$y < ax^2 + bx + c$$

se la concavità è rivolta verso il basso.

Analogamente, per una parabola con asse di simmetria orizzontale, la parte interna corrisponde alla disequazione

$$x > ay^2 + by + c$$

se la concavità è rivolta verso destra ( $a > 0$ ), alla disequazione

$$x < ay^2 + by + c$$

se la concavità è rivolta a sinistra.