

IL PROBLEMA CLASSICO DI GEOMETRIA

Contenuto

Questo lavoro contiene una premessa metodologica generale, e una serie di “schemi risolutivi” per impostare alcuni problemi fondamentali di geometria elementare su poligoni inscritti o circoscritti a un cerchio di raggio assegnato. In tutti i casi sono state proposte l'impostazione geometrica e quella trigonometrica. Inoltre è stata determinata la figura di max/min perimetro o area, dato l'interesse verso questo tipo di problema da parte di docenti e studenti del Liceo Scientifico.

Le figure notevoli studiate sono:

Triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio

Trapezio isoscele inscritto in un semicerchio

Triangolo isoscele inscritto in un cerchio

Cono circolare retto inscritto in una sfera

Rettangolo inscritto in un cerchio

Cilindro inscritto in una sfera

Rettangolo inscritto in un semicerchio

Triangolo isoscele circoscritto a un cerchio

Cono circolare retto circoscritto a una sfera

Trapezio isoscele circoscritto a un cerchio

Trapezio isoscele circoscritto a un semicerchio

Premessa: l'uso di schemi generali nella risoluzione di problemi di Geometria

L'impostazione dei problemi di Geometria conduce generalmente all'elaborazione di *schemi generali* per la risoluzione di classi di problemi affini. Cosa significa “classe di problemi affini”? Con ciò si intende un insieme di problemi diversi come enunciato, ma la cui impostazione *geometrica* è la stessa. Per es., determinare il triangolo isoscele di perimetro massimo inscritto in un cerchio e determinare il triangolo isoscele inscritto in un cerchio tale che la somma della base e dell'altezza è massima sono problemi che hanno la stessa impostazione, perché in entrambi i casi si tratta di calcolare le misure di segmenti in funzione di una incognita che può essere p.es. l'altezza del triangolo, o l'angolo definito dal lato obliquo e dall'altezza, ecc. Non solo, ma anche “esprimere l'area del triangolo isoscele inscritto in un cerchio di raggio R in funzione dell'altezza” richiede la stessa impostazione. Cambia però l'obiettivo, perché in questo caso non si tratta di risolvere un'equazione; ciò che importa è solo l'*impostazione* cioè quella serie di passaggi che permette di esprimere gli elementi necessari alla risoluzione di un problema in funzione di uno solo di essi, che sarà una variabile.

La risoluzione generale di un problema è una questione che non sempre viene affrontata in modo efficace. Se si considera la capacità di apprendere in modo produttivo questa tecnica matematica (qui faccio riferimento solo ai problemi di Geometria), si può dire che i risultati lasciano assai a desiderare, trovandosi frequentemente il caso di *studenti del liceo scientifico che non sanno neppure impostare un problema* (scrivo nell'anno 2007), vale a dire non sanno neppure come arrivare all'equazione risolvibile. Le ragioni di tale insuccesso sono varie, e può essere che ormai l'origine di questo problema non sia neppure didattica nel senso stretto del termine. Pur ammettendo l'impossibilità di definire con sicurezza l'origine ultima di certe difficoltà, una analisi della struttura

del problema classico di Geometria può aiutare almeno a *cercare* strategie di insegnamento-apprendimento efficaci.

Il parere di chi scrive è che una componente dell' "abilità" nel risolvere i problemi sta nella padronanza di schemi risolutivi nel senso sopra indicato. La questione non è il *problem solving*, ma qualcosa di più specifico. Quando si parla di problema di Geometria, si fa riferimento a un insieme ben delimitato di richieste. Un problema di Geometria può richiedere una *dimostrazione* (che non è la "esauriente giustificazione" o simili che affliggono certi temi dell'esame di Stato) puramente sintetica, ma qui faccio riferimento ad un altro tipo di problema: quello nel quale si richiede di *convertire le grandezze geometriche in espressioni contenenti indeterminate, cioè variabili o incognite*. Per esempio, un problema di massimo o minimo contiene questo passaggio. Si potrebbero definire come "problemi di applicazione dell'algebra e/o della trigonometria alla Geometria", ma io li chiamerei "problemi classici" di Geometria, dato il ruolo che hanno ricoperto nella didattica della Matematica.

In questo tipo di questioni non è richiesta di solito una dimostrazione sintetica, anche se può capitare talvolta di dover cercare delle relazioni di tipo sintetico. Il "problema classico" sfrutta dei teoremi, e ha una particolarità: è *classificabile* secondo insiemi di problemi affini, quindi parte della sua soluzione è uno schema fisso, che si può riapplicare a tutti i problemi dello stesso genere. Ciò conduce alla formulazione di *schemi problematici* che sono i nuclei della soluzione; sulla soluzione dello schema si innesta poi la soluzione *particolare* del quesito effettivamente formulato.

Questa "classificabilità" del problema classico nel senso sopra esposto è ben nota, anzi è così nota...che di fatto non vi facciamo caso. La cosa è più chiara se consideriamo il modo in cui generalmente i testi espongono la risoluzione dei problemi. Nella grande maggioranza dei casi, i testi procedono per *esempi*. Ciò dà la sgradevole impressione di un approccio *empirico*, *euristico* alla questione, e direi suggerisce che si procede in modo perfino *occasionale*, come se si potesse *dedurre un metodo generale di risoluzione da una serie finita per quanto numerosa di esempi proposti*.

Ora non intendo mettere in discussione l'esistenza di un elemento euristico e quasi-sperimentale nell'apprendimento della Matematica; ma la Matematica in sé non è né euristica né sperimentale: è un insieme di relazioni logiche. La questione è: tali relazioni logiche, che sono quindi necessariamente costitutive delle modalità di apprendimento e *ipso facto* di insegnamento, non debbono forse essere chiaramente rese esplicite? Si badi che la questione di fondo non è l'alternativa tra "insegnamento dall'alto" o "scoperta dal basso", ma riguarda il *contenuto* dell'apprendimento. Perché si prendono in considerazione i problemi "classici" di Geometria? Perché "servono a ragionare", dirà qualcuno. Ma perché servono a ragionare? Bene, qui possiamo trovare delle risposte; si può rispondere che, risolvendo un problema, si impara a concatenare i propri pensieri in modo sequenziale ecc, che si "sviluppa l'intuizione" ecc ecc – solo che si trascura quello che è, da Euclide anzi da molto prima, un aspetto fondamentale del ragionamento matematico e poi anche scientifico: la riduzione di una molteplicità indeterminata (di regole, proposizioni, problemi appunto) ad un insieme potenzialmente illimitato, ma concretamente finito, di *informazioni di base*, perché sia i postulati di Euclide sia gli "schemi risolutivi" sia i teoremi più noti sono informazione. La Matematica, sotto questo aspetto, è un processo di riordino/riduzione dell'informazione (Mach disse "*economia di pensiero*").

L' "economia di pensiero" o, se vogliamo, lo schematismo, ha un ruolo essenziale nell'organizzazione delle strategie risolutive. Esso impedisce di disperdersi in una infinità

potenziale di casi distinti da affrontare separatamente. Ma quante sono le situazioni schematiche che si incontrano nei problemi “classici”? Si trova che il loro numero è abbastanza ridotto – a meno di considerare problemi un po’ fuori dal comune. Inoltre, fondamentalmente sono le stesse in Geometria piana e solida. Infine, gli schemi possono essere “euclidei” o trigonometrici. Si può distinguere tra figure inscritte e circoscritte. Di seguito ho proposto la soluzione di alcuni problemi su figure inscritte in un cerchio o in una sfera.

FIGURE INSCRITTE IN UN CERCHIO O IN UNA SFERA

La risoluzione di problemi su poligoni inscritti in un cerchio – o in un semicerchio e più in generale in un segmento circolare – dipende essenzialmente dai teoremi sui triangoli rettangoli e dal teorema della corda. L'impostazione può essere “elementare” o “algebrica” oppure trigonometrica. Nel primo caso, sono fondamentali i teoremi di Euclide e Pitagora; nel secondo, le regole che esprimono i cateti rispetto all'ipotenusa e appunto il teorema della corda, insieme alle relazioni e proprietà generali degli angoli alla circ. e al centro.

I problemi più semplici consistono in applicazioni delle proprietà dei triangoli rettangoli. A parte il Teorema di Pitagora, questi “semplici” problemi implicano i seguenti teoremi.

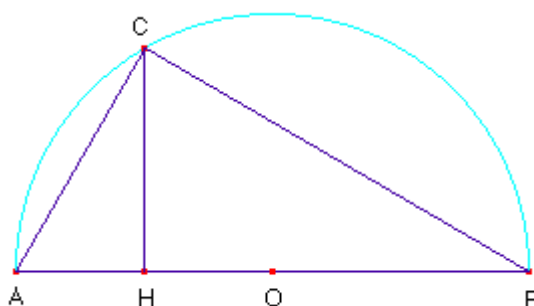
Primo teorema di Euclide: in un triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è equivalente al prodotto dell'ipotenusa per la proiezione del cateto sull'ipotenusa

Secondo teorema di Euclide: in un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al prodotto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

Primo Teorema fondamentale dei triangoli rettangoli: un cateto è dato dal prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto a quel cateto

Secondo Teorema fondamentale dei triangoli rettangoli: un cateto è dato dal prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto

1. Triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio (cioè di ipotenusa costante)



Posto $AB = 2r$, conviene esprimere tutte le distanze in funzione di $AH = x$, con $0 \leq x \leq 2r$. In base al primo teorema di Euclide, per cui $AC^2 = AH \cdot AB$, si ottiene

$$AC = \sqrt{2rx}$$

In base al secondo t. di Euclide si trova $CH^2 = AH \cdot HB$ e quindi, dato che $HB = 2r - x$,

$$CH = \sqrt{2rx - x^2}$$

Trigonometricamente si ha, prendendo $x = H \hat{A} C$,

$$\begin{aligned} AC &= 2r \cos x & BC &= 2r \sin x & CH &= 2r \cos x \sin x & AH &= 2r \cos^2 x \\ HB &= 2r \sin^2 x \end{aligned}$$

I problemi sul triangolo inscritto in un semicerchio sono elementarissimi; il perimetro $2p$ è dato trigonometricamente da

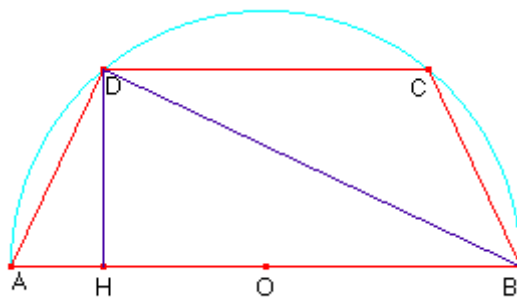
$$2p = 2r + 2r \sin x + 2r \cos x \quad \text{oppure algebricamente da } 2p = 2r + \sqrt{2rx} + \sqrt{2r(2r-x)}$$

Per l'area A abbiamo

$$\begin{aligned} A \quad (\text{semiprodotto dei cateti}) &= \frac{1}{2} \cdot 2r \sin x \cdot 2r \cos x = 2r^2 \sin x \cos x \quad \text{oppure (semiprodotto} \\ &\text{dell'ipotenusa per l'altezza ad essa relativa)} \quad A = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{2rx - x^2} = r\sqrt{2rx - x^2} \end{aligned}$$

2. Trapezio isoscele inscritto in un semicerchio

Si riconduce al caso del triangolo inscritto in un semicerchio (vedi prima)



Posto $AH = x$, con $0 \leq x \leq r$ (perché i casi limite della figura sono il trapezio di altezza nulla e il triangolo isoscele inscritto nel semicerchio, cioè il trapezio degenero di base minore nulla), abbiamo

$$AH = x \quad AD = \sqrt{2rx} \quad DC = AB - 2 \cdot AH = 2r - 2x \quad DH = \sqrt{2rx - x^2}$$

Il perimetro è $2p = 2\sqrt{2rx} + 2r - 2x + 2r = 2(\sqrt{2rx} + 2r - x)$

$$\begin{aligned} \text{L'area } A &= \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DH = \frac{1}{2}(2r + 2r - 2x) \cdot \sqrt{2rx - x^2} = (2r - x) \cdot \sqrt{2rx - x^2} = \\ &= \sqrt{x(2r - x)^3} \end{aligned}$$

Trigonometricamente si ha, prendendo $x = \widehat{DAH}$ con $0 \leq x \leq 45^\circ$:

$2p = 2AD + CD + AB = 4r \cos x + (2r - 4r \cos^2 x) + 2r$ (vedi le relazioni valide per il triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio) e quindi

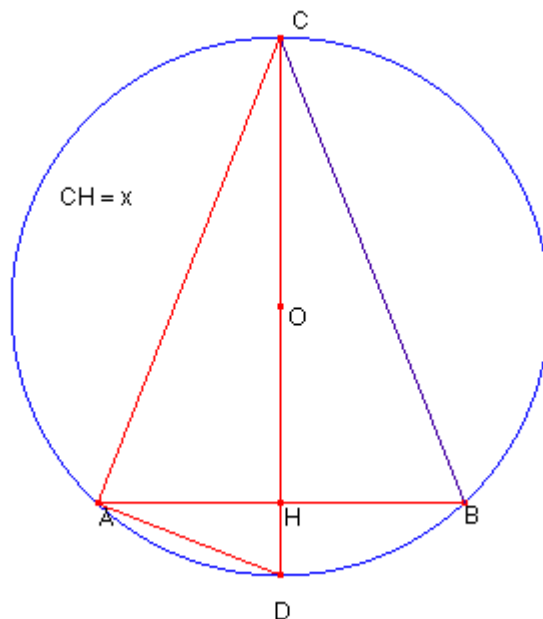
$$2p = 4r - 4r \cos^2 x + 4r \cos x = 4r(\sin^2 x + \cos x)$$

$$A = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DH = \frac{1}{2}(2r + 2r - 4r \cos^2 x) \cdot 2r \cos x \sin x = 4r^2 \sin^3 x \cos x$$

3. Triangolo isoscele inscritto in un cerchio di raggio R .

Supponiamo che AB sia la base, e CH l'altezza ad essa relativa.

Poniamo $CH = x$, con $0 \leq x \leq 2R$



Lo schema risolutivo consiste nel prolungare l'altezza CH fino al punto D , estremo opposto a C del diametro CD ; quindi costruiamo il triangolo CAD rettangolo in A perché inscritto in un semicerchio, cui possiamo applicare i **teoremi di Euclide**:

applicando il primo teorema di Euclide per cui $AC^2 = CH \cdot CD$ calcoliamo il lato obliquo – sostituendo $CD = 2r$ e $CH = x$ abbiamo $AC^2 = 2rx$ e quindi

$$AC = BC = \sqrt{2rx}$$

Applicando il secondo di Euclide per cui $AH^2 = CH \cdot HB$ otteniamo la base – sostituendo $CH = x$ e $HB = 2r - x$ abbiamo $AH^2 = x(2r - x) \Rightarrow AH = \sqrt{2rx - x^2}$ e quindi

$$AB = 2AH = 2\sqrt{2rx - x^2}$$

Il *perimetro* del triangolo è quindi $2p = 2\sqrt{2rx} + 2\sqrt{2rx - x^2}$

L'*area* è data da $A = x\sqrt{2rx - x^2}$

Il triangolo isoscele di **perimetro massimo** si trova annullando la derivata di p :

$$p' = \sqrt{2r} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2r - 2x}{2\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{\sqrt{2r}\sqrt{2rx - x^2} + (2r - 2x)\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{2r}\sqrt{2r - x} + 2r - 2x)}{2\sqrt{x}\sqrt{2rx - x^2}}$$

quindi annullando il numeratore otteniamo la eq

$$\sqrt{4r^2 - 2rx} = 2x - 2r \Rightarrow 4x^2 - 8rx + 4r^2 = 0 \quad 4r^2 - 2rx \quad 4x^2 - 6rx = 0 \Rightarrow x = \frac{3r}{2} \text{ che}$$

corrisponde al triangolo equilatero. Ciò può essere confermato osservando che – in base ai due teoremi di Euclide – il lato obliquo del triangolo isoscele inscritto è $\sqrt{2r \frac{3r}{2}} = r\sqrt{3}$ che è proprio il

lato del triangolo equilatero, in base p.es. al teorema della corda, mentre la base è $2\sqrt{2r\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}$ come il lato obliquo.

Alcune osservazioni importanti. Anzitutto, benché il risultato ottenuto sia corretto, nella soluzione proposta mancano passaggi essenziali. In linea di principio, se si cerca il massimo o il minimo di una funzione continua il cui dominio è un intervallo chiuso limitato $[a; b]$ come in questo caso, è necessario considerare la possibilità che i valori estremi della funzione cadano negli estremi del dominio e non corrispondano all'annullarsi della derivata prima. Nel problema considerato – e in genere nei problemi in cui si cercano perimetro o area o volume massimo – questa eventualità è da escludere, perché generalmente gli estremi del dominio corrispondono a valori nulli della funzione di cui cerchiamo il massimo o a minimi locali (nel problema considerato per $x = 0$ si trova $p = 0$, per $x = 2r$ si ha $p = 2r - p$ è la metà del perimetro $2p$). Tuttavia, l'analisi completa di un problema in generale richiede che i valori della funzione debbano essere confrontati con la soluzione che annulla la derivata.

In secondo luogo, nella ricerca della soluzione ho trascurato $\sqrt{x} = 0$ e di nuovo $x = 0$ quando si risolve l'equazione di secondo grado ottenuta elevando al quadrato. Ciò è localmente giustificato da quanto appena detto, e dall'annullarsi del denominatore della derivata, ma le soluzioni algebriche ottenute vanno comunque prese in considerazione.

L'eq. di secondo grado è stata ottenuta elevando al quadrato i membri di un'eq. irrazionale del tipo $\sqrt{A} = B$, nella quale si suppone per coerenza del segno che debba essere $B > 0$, cioè nel nostro caso $2x - 2r > 0$ quindi $x > r$. Una soluzione che non rispetti questa condizione sul segno di B non è una soluzione, e ciò va discusso.

Infine, dal punto di vista analitico non abbiamo ancora dimostrato che $x = \frac{3r}{2}$ è veramente un punto di massimo, anche se è geometricamente evidente. Possiamo considerare il sistema misto

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{2r}\sqrt{2r-x} + 2r - 2x)}{2\sqrt{x}\sqrt{2rx - x^2}} > 0$$

$$0 \leq x \leq 2r$$

Dato che le radici sono positive, resta da risolvere la dis. $\sqrt{4r^2 - 2rx} > 2x - 2r$.

Per quanto riguarda il triangolo di **area massima**, abbiamo

$A' = D(x\sqrt{2rx - x^2})$ che è a der. di un prodotto. Dato che $x > 0$, portiamo x sotto radice e otteniamo $A = \sqrt{2rx^3 - x^4}$ - nel calcolo della derivata la radice si può trascurare (il massimo di una radice coincide col massimo del radicando) e quindi $D(2rx^3 - x^4) = 6rx^2 - 4x^3 = 0$ se $x = 0$ (che non interessa) e $x = \frac{3r}{2}$, che corrisponde al triangolo di $2p$ max, cioè equilatero.

In questo caso, la conferma che si tratta di un massimo può essere ottenuta dal segno della der. seconda, che è $A'' = 12rx - 12x^2$ e che è negativa per $x = \frac{3r}{2}$.

Soluzioni trigonometriche – specie per il calcolo del perimetro, il metodo euclideo applicato sembra essere complicato dal punto di vista del calcolo. Ciò induce a considerare la possibilità di cercare una *soluzione trigonometrica* dello schema del triangolo isoscele inscritto, nella quale

l'incognita x sia p.es. la metà dell'angolo opposto alla base, cioè $\hat{ACH} = \hat{HCB}$. E' evidente che deve essere $0 \leq x \leq 2r$. Anche trigonometricamente la chiave di volta del problema è la costruzione del triangolo rettangolo CAD, nel quale $AC = BC = 2r \cos x$ e $AB = 2 AH = 2 (AC \sin x) = 2 (2r \cos x \sin x) = 4r \sin x \cos x$ (a questo risultato possiamo anche giungere col teorema della corda per cui

$AB = 2r \sin 2x = 2r (2 \sin x \cos x)$. Per l'altezza si ha invece $CH = 2r \cos x \cos x = 2r \cos^2 x$. Abbiamo quindi le formule trigonometriche

$$2p = 4r \cos x + 4r \sin x \cos x = 4r \cos x (1 + \sin x) \text{ oppure } 2r (2 \cos x + \sin 2x),$$

$$A = 4r \sin x \cos^3 x.$$

Lo studio dei massimi del perimetro e dell'area non presenta particolare difficoltà, a parte il fatto che nella derivata dell'area si ottiene un'espressione di quarto grado: $\cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x$ che conduce all'equazione $\cos^2 x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = 0$ e alla disequazione associata (per confermare che si tratta di un massimo).

Dallo schema del triangolo isoscele inscritto si passa al

4. Cono inscritto in una sfera

La figura solida che corrisponde a un problema sul cono (circolare retto) si ottiene ruotando la figura piana (il triangolo isoscele inscritto) intorno al diametro contenente l'altezza. Perciò le dimensioni lineari rimangono le stesse, e lo schema risolutivo elaborato per il triangolo isoscele inscritto può essere applicato tale e quale, con la seguente interpretazione:

$$h = \text{altezza del cono} = CH = x \text{ oppure } 2r \cos^2 x$$

$$r_b = \text{raggio di base del cono} = AH = \sqrt{2rx - x^2} \text{ oppure } 2r \sin x \cos x$$

$$a = \text{apotema del cono} = AC = \sqrt{2rx} \text{ oppure } 2r \cos x$$

Possiamo quindi considerare:

$$\text{la superficie laterale } S_l = \pi r_b a = \pi \sqrt{2Rx} \sqrt{2Rx - x^2} = \pi \sqrt{4R^2 x^2 - 2Rx^3} \text{ oppure}$$

$$\pi (2R \sin x \cos x) (2R \cos x) = 4\pi R^2 \sin x \cos^2 x$$

$$\text{la superficie totale } S_T = \pi r_b (r_b + a) = \pi \cdot (\sqrt{2Rx - x^2}) \cdot (\sqrt{2Rx - x^2} + \sqrt{2Rx}) \text{ oppure}$$

$$\pi (2R \sin x \cos x) (2R \sin x \cos x + 2R \cos x) = 4\pi R^2 \cdot (\sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x)$$

$$\text{il volume } V = \frac{\pi}{3} r_b^2 h = \frac{\pi}{3} (2Rx - x^2) x = \frac{\pi}{3} (2Rx^2 - x^3) \text{ oppure}$$

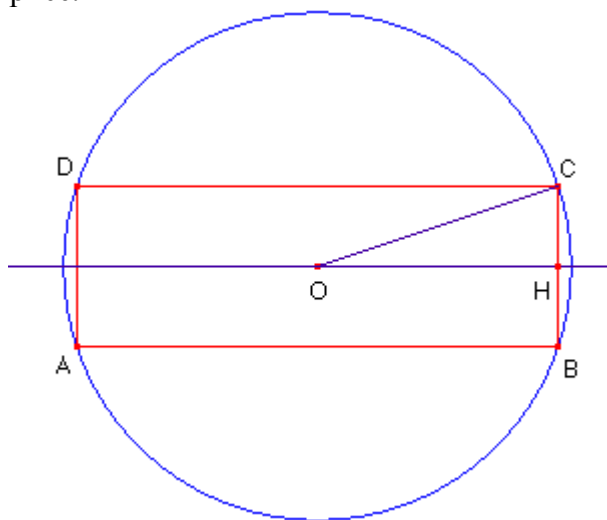
$$\frac{\pi}{3} (2R \sin x \cos x)^2 (2R \cos^2 x) = \frac{8\pi}{3} R^3 \sin^2 x \cos^4 x.$$

Confrontando la formula trigonometrica del volume con quella della superficie laterale, si nota che V è proporzionale al quadrato di S_l . Ora, se una grandezza è proporzionale al quadrato di un'altra ed entrambe sono positive nel loro dominio comune, cioè se $F = k f^2$, i max e i min di F coincidono con i max e i min di f oppure con le soluzioni dell'equazione $f = 0$. Infatti la derivata di F ignorando la costante k , cioè $D(f^2) = 2f \cdot f' = 0$ implica $f' = 0$ o $f = 0$. In pratica, $f = 0$ corrisponde a un minimo e quindi i massimi del quadrato di una funzione positiva coincidono con i massimi della funzione.

Il cono di volume e di sup. laterale massimi si può trovare facilmente annullando la der. di $2Rx^2 - x^3$ cioè $4Rx - 3x^2$ e si ottiene $x = \frac{4R}{3}$ (valgono sempre le precedenti osservazioni sulla verifica che si tratti effettivamente di un massimo). Trigonometricamente corrisponde all'eq. $2R \cos x = \frac{4R}{3}$ cioè $\cos x = \frac{2}{3}$, cui corrisponde l'angolo di semiapertura $0,841069$ rad.

5. Rettangolo inscritto in un cerchio

E' un problema molto semplice.



Algebricamente, detto r il raggio, abbiamo che la metà dell'altezza e la metà della base sono i cateti di un triangolo rettangolo avente r come ipotenusa. Quindi, se x è la metà della base, l'altezza è $2\sqrt{r^2 - x^2}$, con $0 \leq x \leq r$. Perciò

$$2p = 4x + 4\sqrt{r^2 - x^2} \qquad A = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Trigonometricamente, se indichiamo con x l'angolo $\hat{HOC}$, con $0 \leq x \leq 90^\circ$, avremo per la base $AB = 2r \cos x$ e $BC = 2r \sin x$ per cui abbiamo anche $2p = 4r \sin x + 4r \cos x$ e $A = 4r^2 \sin x \cos x$.

rettangolo inscritto in un cerchio di perimetro massimo

si ottiene il quadrato. Ci sono molti modi per giungere a questo risultato. Trigonometricamente, calcoliamo $D(2p) = 4r(\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow x = 45^\circ$.

rettangolo inscritto in un cerchio di area massima

si ottiene ancora il quadrato. Trigonometricamente, $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ che è massimo se $2x = 90^\circ$ cioè $x = 45^\circ$.

Osservazione. Le due formule algebriche del perimetro e dell'area sono invarianti rispetto alla sostituzione di x con $\sqrt{r^2 - x^2}$. Quindi, qualsiasi problema avente per argomento il perimetro o l'area è simmetrico, vale a dire: se ammette la soluzione $x = s$, deve ammettere anche $x = \sqrt{r^2 - s^2}$. Ciò significa che se la soluzione è unica allora è fornita dall'equazione $x = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, che definisce appunto il quadrato. Trigonometricamente ciò si vede

dall'invarianza rispetto allo scambio $\sin x \leftrightarrow \cos x$. Nei problemi sulle figure inscritte il punto di massimo è generalmente uno solo, e allora si può concludere che la invarianza rispetto allo scambio di x con $f(x)$ implica che la soluzione è data da $x = f(x)$. Nelle figure circoscritte è il minimo ad essere unico, e vale la stessa conclusione.

6. Cilindro inscritto in una sfera

Superficie laterale $S_l = 2\pi r_b h = 2\pi x (2\sqrt{R^2 - x^2}) = 4\pi x \sqrt{R^2 - x^2}$ dove x è il raggio di base. Se $2x$ è l'altezza, si avrebbe $2\pi (\sqrt{R^2 - x^2}) \cdot 2x$ che è la stessa formula.

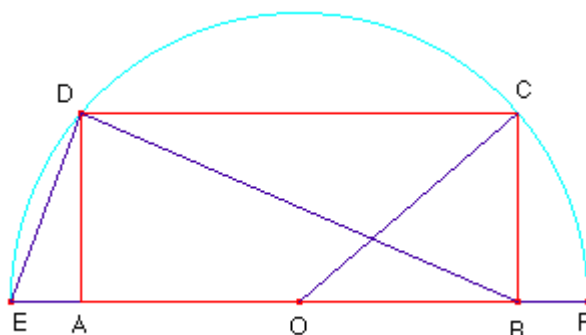
Questa *invarianza formale* della superficie laterale rispetto allo scambio tra raggio e semialtezza come significato della x implica che la figura di superficie laterale massima ha il diametro di base uguale all'altezza (*cilindro equilatero*), cioè deve essere $x = \sqrt{R^2 - x^2}$ che porta a $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Trigonometricamente si avrebbe $S_l = 2\pi R \cos x \cdot 2R \sin x$ (con lo stesso significato di x visto prima) cioè $4\pi R^2 \sin x \cos x$

Per la *superficie totale* si ha $S_T = 2\pi r_b^2 + 2\pi r_b h = 2\pi r_b (r_b + h) = 2\pi x (x + 2\sqrt{R^2 - x^2})$, se x è il raggio di base. Trigonometricamente si avrebbe $2\pi R \cos x (R \cos x + 2R \sin x) = 2\pi R^2 (\cos^2 x + 2 \sin x \cos x)$

Il volume è dato da $V = \pi r_b^2 h = \pi x^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2}$ oppure $2\pi R^3 \cos^2 x \sin x$

7. Rettangolo inscritto in un semicerchio



Può essere ricondotto allo schema del rettangolo inscritto in un cerchio, o a quello del triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.

Nel primo caso, applicando il t. di Pitagora abbiamo, prendendo $OB = x$ con $0 \leq x \leq r$:

$BC = \sqrt{r^2 - x^2}$ e quindi

$2p = 4x + 2\sqrt{r^2 - x^2}$ perimetro

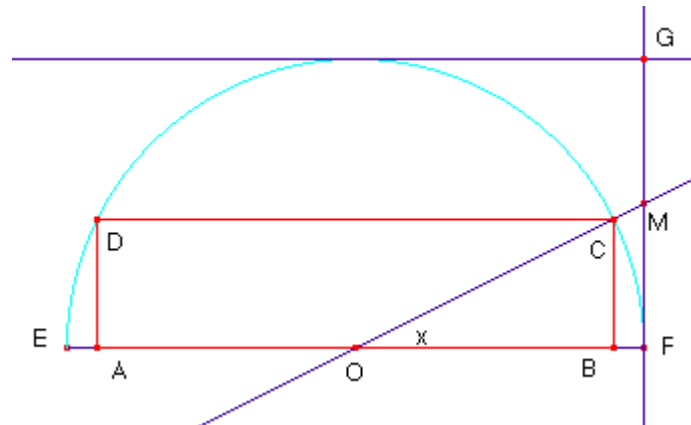
$A = 2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ area

Trigonometricamente si avrebbe $OB = r \cos x$ e $BC = r \sin x$ per cui

$2p = 4r \cos x + 2r \sin x$

$A = 2r^2 \cos x \sin x = r^2 \sin 2x$

Se ne deduce che il **rettangolo di A massima inscritto in un semicerchio** si ottiene per $\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 90^\circ$ e quindi $x = 45^\circ$, che corrisponde al quadrato, mentre quello di **2p massimo** è dato dall'equazione $D(p) = 0 \Rightarrow -2 \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$. Questa soluzione può essere costruita graficamente:



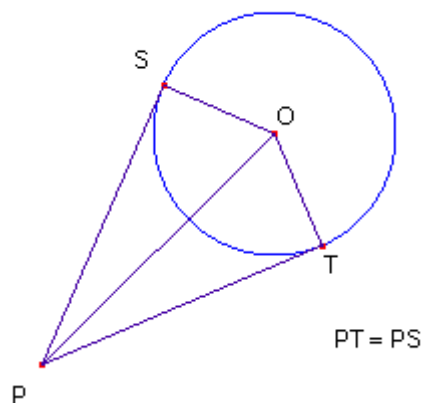
In base alla definizione di tangente di un angolo, si ha $MF = r \tan x = \frac{1}{2}r$. Quindi si può costruire la tangente al semicerchio in uno degli estremi del diametro come F, e unire il centro del semicerchio col punto sulla tangente che dista da F metà del raggio. L'intersezione di OM con la semicirconferenza è uno dei vertici del rettangolo.

FIGURE CIRCOSCRITTE A UN CERCHIO O A UNA SFERA

Questo tipo di problemi è molto più interessante (e difficile).

Nel caso di figure circoscritte, i teoremi fondamentali da tener presenti sono:

1. il segmento che unisce il centro del cerchio a un punto di tangenza del cerchio con un lato è perpendicolare al lato stesso. Quindi è possibile costruire triangoli rettangoli unendo il centro del cerchio, un vertice e un punto di tangenza ;
2. l'area di un poligono circoscritto a un cerchio è equivalente al prodotto del semiperimetro per il raggio del cerchio, per cui $A = p \cdot r$;
3. i segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una circonferenza sono congruenti.



Esaminiamo i seguenti casi:

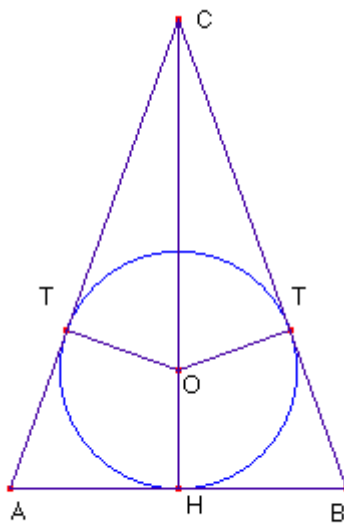
triangolo isoscele circoscritto a un cerchio e cono circoscritto a una sfera;

trapezio isoscele circoscritto a un cerchio;

trapezio isoscele circoscritto a un semicerchio.

1. Triangolo isoscele circoscritto a un cerchio

Costruzione della figura: con centro negli estremi A e B della base del triangolo, tracciare due crf di raggio uguale a metà della base. Le intersezioni tra queste crf e la circonferenza inscritta nel triangolo sono i punti di tangenza. Ovviamente i segmenti OT sono perpendicolari ai lati obliqui.



Algebricamente: un metodo consiste nel prendere come variabile indipendente x la distanza OC tra il vertice opposto alla base del triangolo e il centro della crf inscritta.

Limiti: $x > 0$ (se $x = 0$ la base AB diventa infinita, mentre evidentemente non c'è un limite superiore).

Noto HB, è possibile esprimere sia il perimetro che l'area del triangolo. Infatti l'altezza è immediata essendo $CH = x + r$, e il lato obliquo è calcolabile col teorema di Pitagora. Quindi la chiave risolutiva è il calcolo di HB in funzione di $CO = x$.

Si può sfruttare la similitudine tra i triangoli CHB e CTO, per cui

$$OC : OT = BC : HB$$

Posto il raggio della crf = r , possiamo esprimere HB in funzione di $OC = x$. Dobbiamo però esprimere il lato obliquo BC in funzione di x e di HB. Indichiamo HB con la lettera y ; abbiamo

$$BC^2 = HC^2 + HB^2$$

$$\text{E quindi } BC^2 = (x+r)^2 + y^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + y^2 + 2rx + r^2}$$

Ricaviamo $HB = y$ dalla proporzione: $OC \cdot HB = OT \cdot BC$. Elevando tutto al quadrato si ha

$$x^2 \cdot y^2 = r^2 \cdot (x^2 + y^2 + 2rx + r^2)$$

[ricordare che $y = HB$, $x = OC$, $r = OT$, $\sqrt{x^2 + y^2 + 2rx + r^2} = BC$].
ricaviamo la y :

$$y^2 = \frac{r^2(x^2 + 2rx + r^2)}{x^2 - r^2} = \frac{r^2(x+r)^2}{(x+r)(x-r)} = \frac{r^2(x+r)}{x-r}$$

$$\text{e infine } y = HB = r \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$$

Altro metodo – In tutti i poligoni circoscritti a un cerchio, l'area è data dal prodotto del semiperimetro per il raggio del cerchio: $A = p \cdot r$.

Nel nostro caso, l'area può essere calcolata anche come semiprodotto della base per l'altezza.

Quindi

$$HB \cdot CH = (HB + BC) \cdot OT$$

Da cui

$$y \cdot (x+r) = (y + \sqrt{(x+r)^2 + y^2}) \cdot r$$

$$xy = \sqrt{(x+r)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 y^2 = r^2(x^2 + 2rx + r^2 + y^2) \Rightarrow (x^2 - r^2)y^2 = r^2(x+r)^2$$

e si riottiene il risultato precedente per HB.

Ancora un altro metodo – in base al teorema per cui i segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una circonferenza sono congruenti, si può osservare che il lato obliquo può essere calcolato in due modi: in base al teorema di Pitagora, per cui

$$BC^2 = HB^2 + HC^2$$

e come somma di due segmenti di tangente

$$BC = BT + TC.$$

Indichiamo la metà della base, BH, con la lettera y , per il teorema della congruenza dei segmenti di tangente, abbiamo pure $BT = BH = y$. Calcoliamo TC; applicando il t. di Pitagora a

$$COT, \text{ abbiamo } TC = \sqrt{x^2 - r^2}$$

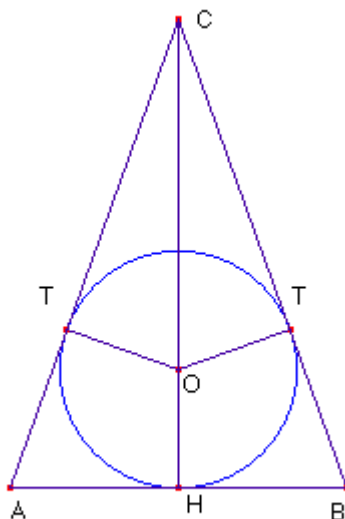
$$\text{Quindi } BC = y + \sqrt{x^2 - r^2} = \sqrt{(x+r)^2 + y^2}$$

Quadrando si ottiene

$$y^2 + x^2 - r^2 + 2y\sqrt{x^2 - r^2} = x^2 + 2rx + r^2 + y^2$$

Riducendo abbiamo $y\sqrt{x^2 - r^2} = rx + r^2 = r(x + r)$, da cui si ottiene $HB = r \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$

Interessante è pure la *risoluzione trigonometrica*.



In questo caso, prendiamo come variabile l'angolo $x = \hat{ACH}$.

Limiti: $0 < x < 90^\circ$. La costante è il raggio r ; da qui possiamo dedurre

$$\begin{aligned} OC &= \frac{r}{\sin x} & CH &= r + \frac{r}{\sin x} = \frac{r(1 + \sin x)}{\sin x} & HB &= CH \cdot \tan x \Rightarrow \\ HB &= \frac{r(1 + \sin x)}{\cos x} & BC &= \frac{CH}{\cos x} = \frac{r(1 + \sin x)}{\sin x \cdot \cos x} \end{aligned}$$

Evidentemente l'impostazione trigonometrica è molto più semplice. Da notare l'uso di formule inverse e la comparsa di funzioni goniometriche al denominatore, tipica dei problemi su poligoni circoscritti.

Triangolo isoscele di perimetro minimo e area minima circoscritto a un cerchio

Nel caso di figure circoscritte, si possono solo cercare i minimi dell'area e del perimetro; infatti è evidente che queste grandezze in questo caso non possono ammettere massimo.

Il poligono circoscritto di area minima coincide con quello di perimetro massimo, data la formula $A = p \cdot r$ nella quale r è costante. Se si adotta l'impostazione algebrica conviene cercare l'area massima, data la comparsa di radicali che rendono il calcolo della derivata piuttosto complicato quando vengono sommati. Come visto sopra, l'area è data da

$$A = HB \cdot HC = r \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}} \cdot (x+r)$$

Poiché $A \geq 0$, è massima quando lo è il suo quadrato; perciò consideriamo $\frac{A^2}{r}$ (r è una costante moltiplicativa e si può ignorare annullando la derivata) $= \frac{(x+r)^3}{x-r}$, la cui derivata è $\frac{2(x+r)^2 \cdot (x-2r)}{(x-r)^2}$ e si annulla per $x = 2r$ (ricordare che deve essere $x > r$).

Un esame immediato del segno conferma che si tratta di un minimo.

La figura corrispondente ha altezza $(x+r) = 3r$, metà base $(r\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}) = r\sqrt{3}$ e quindi la tangente degli angoli alla base è $= \sqrt{3} \Rightarrow$ gli angoli alla base sono di 60° e il triangolo è equilatero.

Trigonometricamente, $HB = \frac{r(1+\sin x)}{\cos x}$ e $CH = \frac{r(1+\sin x)}{\sin x}$ (vedi fig.) dove x è la metà dell'angolo opposto alla base.

Si può cercare il minimo dell'area $A = HB \cdot CH = r^2 \cdot \frac{(1+\sin x)^2}{\sin x \cos x}$ la cui derivata immediata è

$A' = r^2 \left[\frac{2(1+\sin x)\cos^2 x \sin x + (\sin^2 x - \cos^2 x)(1+\sin x)^2}{\sin^2 x \cos^2 x} \right]$ si sostituisce $\cos^2 x$ con $1 - \sin^2 x$; dopo riduzioni e raccoglimenti il numeratore si scompone in $(1+\sin x)(2\sin^2 x + \sin x - 1)$ - a noi interessa solo la soluzione $\sin x = \frac{1}{2}$ cioè $x = 30^\circ$, essendo x la metà dell'angolo opposto alla base si deduce il triangolo equilatero.

2. Cono circolare retto circoscritto a una sfera

I tre problemi fondamentali sono: il cono di *volume minimo*, di *superficie laterale minima* e di *superficie totale minima*. Prendiamo sempre $x = OC$, col limite $x \geq r$.

Cono di volume minimo circoscritto a una sfera

Il volume è dato da $V = \frac{1}{3}r_b^2 \cdot h$ essendo r_b il raggio della crf di base, cioè HB , e h l'altezza $= CH$.

Con la soluzione algebrica otteniamo $V = \frac{1}{3}r^2 \left(\frac{x+r}{x-r}\right) \cdot (x+r) = \frac{r^2}{3} \cdot \frac{(x+r)^2}{x-r}$ la cui derivata $= \frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}$ si annulla per $x = 3r$. Lo studio del segno conferma che è un minimo.

Cono di superficie laterale minima circoscritto a una sfera

La superficie laterale è il semiprodotto della crf di base per l'apotema, cioè la distanza tra vertice e un punto della crf di base: $S_L = \pi \cdot r_b \cdot a$. Anche in questo caso cerchiamo la soluzione algebrica, per cui

$$HB = r \sqrt{\frac{x+r}{x-r}} \quad \text{e} \quad BC = a = \sqrt{HC^2 + HB^2} = \sqrt{(x+r)^2 + r^2 \cdot \frac{x+r}{x-r}} = x \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$$

[questo risultato si può dedurre anche dalla similitudine tra COT e CHB, per cui

$$BC : OC = HB : r \Rightarrow BC = \frac{OC \cdot HB}{r} = \frac{x}{r} \cdot \left[r \sqrt{\frac{x+r}{x-r}} \right] \quad - \text{ vedi figura}$$

prec.]

Quindi $S_L = \pi \cdot r \cdot x \cdot \frac{x+r}{x-r}$. La derivata $\pi r \cdot \frac{x^2 - 2rx - r^2}{(x-r)^2}$ si annulla per $x = r \pm r\sqrt{2}$;

interessa solo la soluzione maggiore $r + r\sqrt{2}$, dato il limite $x \geq r$. Lo studio del segno conferma che si tratta di un minimo.

Cono di superficie totale minima circoscritto a una sfera

La sup. totale è data da $S_T = \pi \cdot r_b^2 + \pi \cdot r_b \cdot a$ essendo al solito r_b e a il raggio di base e l'apotema, rispettivamente. Indichiamo sempre con r il raggio della sfera inscritta nel cono. In base alle formule calcolate prima, per cui $HB = r_b$ e $BC = a$, abbiamo $S_T =$

$$\pi \left(r^2 \cdot \frac{x+r}{x-r} + rx \cdot \frac{x+r}{x-r} \right) = \pi r \cdot \frac{(x+r)^2}{x-r} \quad \text{che, a parte una costante moltiplicativa,}$$

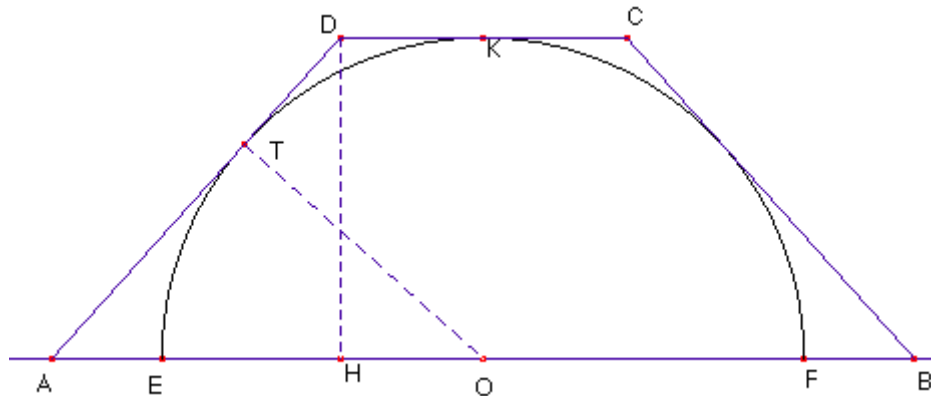
coincide con quella del volume (vedi prima), per cui *il cono circoscritto di volume minimo è anche quello di superficie totale minima.*

3. Trapezio isoscele circoscritto a un cerchio

In base alla proprietà di congruenza dei segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una crf, ($AT \cong AM$ e $TD \cong DK$) abbiamo che il lato obliquo è equivalente alla somma delle metà delle basi, per cui la somma dei lati obliqui è equivalente alla somma delle basi. Quindi il perimetro equivale a 4 lati obliqui.

Il trapezio circoscritto di perimetro e area minima (le due figure coincidono sempre quando sono circoscritte) quindi è quello di lato obliquo minimo, che corrisponde al caso del quadrato (il lato obliquo è sempre maggiore dell'altezza del trapezio, e il minimo si ha quando è congruente all'altezza, cioè nel caso limite di ortogonalità rispetto alle basi).

completare la figura, costruire l'asse del diametro EF , intersecare con la crf , condurre per l'intersezione K la parallela al diametro, ecc.



Il parametro costante della figura è il raggio $r = DH$.

Impostazione algebrica - è basata sulla congruenza tra i due triangoli rettangoli AHD e ATO ($\hat{ADH}$ e $\hat{AOT}$ congruenti perché complementari di $\hat{DAH}$ che è in comune, $\hat{AHD} \cong \hat{ATO}$, $DH \cong OT$ perché raggi della stessa crf). Ne segue che il lato obliquo è congruente alla metà AO della base maggiore, mentre la base minore può essere calcolata come differenza tra la base maggiore e il doppio della proiezione AH del lato obliquo sulla stessa base maggiore.

Ciò suggerisce di prendere come incognita $x = AO$, per cui

$AD = x$, $AH = \sqrt{x^2 - r^2}$, $CD = 2(x - \sqrt{x^2 - r^2})$, con il limite $x \geq r$. Il perimetro è quindi dato da

$$2p = 6x - 2\sqrt{x^2 - r^2}$$

e l'area da

$$A = (2x - \sqrt{x^2 - r^2}) \cdot r$$

Il **perimetro minimo** si ottiene dall'equazione $3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}r$.

L' **area minima** corrisponde invece a $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$. Questo valore numero corrisponde al lato

del *semiesagono regolare circoscritto a un cerchio*, coerentemente con la regola generale per la quale il *poligono circoscritto di area minima è quello regolare* – infatti, abbiamo visto che la metà

della base maggiore equivale al lato obliquo, mentre $CD = 2(\frac{2\sqrt{3}}{3}r - \sqrt{\frac{4}{3}r^2 - r^2}) =$

$$2(\frac{2\sqrt{3}}{3}r - \frac{\sqrt{3}}{3}r) = \frac{2\sqrt{3}}{3}r = AD.$$