IL PROBLEMA DEL CORPO NERO

Approfondimenti

di Ezio Fornero

Introduzione, breve sintesi e indice sommario degli argomenti

Lo scopo di questo lavoro consiste nel chiarire alcune questioni sul corpo nero, che spesso vengono tralasciate anche in trattazioni sofisticate.
Il primo problema che possiamo affrontare è l'insuccesso cui va incontro la Fisica classica nel tentativo di giustificare la distribuzione dell'energia associata alla radiazione di corpo nero rispetto alla lunghezza d'onda o alla frequenza. Il metodo rigoroso consiste nell'eseguire il calcolo del numero dei "modi di vibrazione" , che dimostra come il numero degli oscillatori diverga all'infinito quando la lunghezza d'onda tende a 0 ("catastrofe ultravioletta"), in flagrante contrasto col fatto che la radiazione termica, a temperature ordinarie e di poco superiori, si concentra nell'infrarosso. Si può tuttavia giungere alla catastrofe ultravioletta ragionando qualitativamente sulla distribuzione delle lunghezze d'onda di un sistema di onde stazionarie, il che è un grosso vantaggio quando si vogliano evitare le oscurità (e le difficoltà) del formalismo matematico.
Altri problemi sono legati all'uso della funzione che descrive lo *spettro* del corpo nero, cioè la distribuzione dell'energia rispetto alle lunghezze d'onda o rispetto alle frequenze. Infatti tale "spettro" può essere descritto come *intensità* della radiazione emessa da una superficie o come *densità* dell'energia contenuta in una cavità risonante. Il passaggio tra le due descrizioni non è proprio immediato, e di solito si trascura di esaminare a fondo la questione. Perciò in alcuni casi si preferisce utilizzare l'intensità della radiazione, in altri la densità, dando per scontato che lo spettro sia lo stesso; il che è vero, in quanto l'intensità della radiazione e la densità sono direttamente proporzionali: solo che sarebbe bene calcolare tale fattore di proporzionalità.
Un'altra difficoltà consiste nell'ambiguità del concetto di *intensità di radiazione.* Lo spettro non viene formalmente espresso rispetto a ciò che, secondo un lessico rigoroso, si definisce correttamente "intensità" di radiazione, ma è rappresentato da una grandezza più sofisticata, che si può definire come *intensità specifica* e che tiene conto sia della direzione di emissione sia dell'intervallo infinitesimo di lunghezze d'onda al quale si fa riferimento. Parte del lavoro è destinata a chiarire relazioni tra grandezze affini ma distinte e a stabilire le corrette unità di misura.
Gli argomenti trattati sono:
un **elenco di costanti fondamentali** , come premessa per la comprensione del testo;
una **discussione qualitativa del fallimento della Fisica classica nel problema del corpo nero** ;
una **analisi della relazione tra intensità e densità di radiazione**, nella quale si evidenzia il ruolo della direzione di propagazione della radiazione (*Legge di Lambert*) e si discute il significato della **legge di Stefan-Boltzmann ;**
una **analisi delle funzioni che descrivono lo spettro del corpo nero** , con particolare riferimento alla ***Legge dello spostamento di Wien*** e alla relazione tra lunghezza d'onda e frequenza di massima emissione ;
la **costruzione dei grafici rispetto alla λ** , con il contestuale calcolo numerico delle ***costanti di radiazione*** ;
una **discussione sull'approssimazione della funzione densità di energia ,** che evidenzia la possibilità di ricavare correttamente le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann ;
un **calcolo approssimato delle costanti di Wien e di Stefan-Boltzmann** ;
un **semplice programma in QBasic che consente di calcolare il massimo dello spettro** ;
il **calcolo delle costanti di Wien e di Stefan-Boltzmann in funzione delle costanti fisiche fondamentali.**

Nel problema del corpo nero si incontrano alcune costanti fondamentali, o derivate da quelle fondamentali.
I valori riportati nell'elenco seguente sono tratti da AA.VV., *Le misure di grandezze fisiche – manuale di metrologia,* Paravia 1984

costante di Boltzmann $k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ J · K^{-1}

costante di Planck $h = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}$ J · s

velocità della luce nel vuoto $c = 299.792.458$ m·s^{-1}

prima costante della radiazione $2hc^2 = 1{,}191062 \cdot 10^{-16}$ W·m^2

seconda costante della radiazione $\dfrac{hc}{k} = 1{,}438786$ m·K

costante di Stefan-Boltzmann $\sigma = \dfrac{2\pi^5}{15} \cdot \dfrac{k^4}{h^3 c^2} = 5{,}67032 \cdot 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}

1. **Perché la termodinamica classica non riesce a spiegare lo "spettro" del corpo nero : una discussione qualitativa**

Lo spettro del corpo nero rappresenta l' intensità della radiazione emessa dal corpo nero in funzione della lunghezza d'onda λ oppure della frequenza f , dato che $f = \dfrac{c}{\lambda}$ dove c è la velocità della luce nel vuoto. Chiamiamo I_λ l'intensità della radiazione emessa alla lunghezza d'onda λ. Secondo la *legge di Wien*, il massimo di I_λ si ha per un certo valore della lunghezza d'onda, diciamo λ_{max} , che è inversamente proporzionale alla T assoluta.
Per *intensità totale* di radiazione (I_{Tot}) si intende la quantità di energia emessa in tutte le direzioni da una superficie nell'unità di tempo e su unità di superficie, per cui l'unità di misura S.I. è $\dfrac{J}{m^2 \cdot s}$.
Poiché l'intensità della radiazione emessa dalla superficie del corpo nero è proporzionale alla densità ρ di energia, intesa come rapporto tra l'energia totale elettromagnetica e il volume, nei calcoli sulla legge di Planck si usa molto spesso la *densità di energia* della radiazione contenuta all'interno di una cavità (ρ) .

Nella termodinamica classica vale il *principio di equipartizione dell'energia*, il quale nel caso del corpo nero implica che tutte le onde racchiuse nella cavità abbiano la stessa energia. Più esattamente, si dovrebbe dire *modi di vibrazione* e non onde, ma il concetto è fondamentalmente lo stesso. Infatti l'energia dell'onda elettromagnetica dipende – secondo la teoria classica di Maxwell – dall'*ampiezza* dell'oscillazione (più esattamente, dal quadrato dell'ampiezza) e non dalla frequenza, e inoltre non c'è motivo per cui una singola oscillazione debba avere più energia di altre. Infatti, all'interno della cavità risonante avvengono di continuo scambi di energia tra la radiazione e le pareti della cavità, dato che queste possono assorbire e irradiare radiazioni di qualsiasi lunghezza d'onda. Perciò l'energia si ridistribuisce continuamente tra tutte le componenti della radiazione e non c'è motivo per cui l'energia media di una componente (cioè associata a una data λ) sia maggiore di quella delle altre componenti.

Un secondo aspetto sta nel calcolo del *numero* delle lunghezze d'onda comprese in un certo intervallo. La radiazione di corpo nero non ammette – in teoria – una lunghezza d'onda minima maggiore di zero, ma ammette una λ massima. Infatti il corpo nero è idealmente realizzato da una cavità riempita di radiazione elettromagnetica in equilibrio con le pareti e quindi composta di *onde stazionarie* , e in questo caso la lunghezza d'onda massima è determinata dalla distanza tra pareti opposte della cavità. Se questa fosse una sfera, la lunghezza d'onda massima possibile sarebbe il doppio del diametro (le pareti sono nodi di vibrazione e nell'onda stazionaria la distanza tra due

nodi successivi è la metà della lunghezza d'onda massima). Ora, se si considera una qualsiasi lunghezza d'onda X compresa tra zero e questo massimo, è chiaro che il numero delle onde comprese tra X e il massimo è finito, mentre, non esistendo una λ minima, tutti gli infiniti sottomultipli di X corrispondono a oscillazioni possibili. Perciò *il numero delle onde comprese tra una qualsiasi lunghezza d'onda e zero è potenzialmente infinito*, e *l'energia è distribuita mediamente in modo uniforme su tutte le vibrazioni*: quindi la radiazione, secondo la teoria classica, *dovrebbe essere composta quasi esclusivamente da onde di piccolissima lunghezza d'onda* (ultravioletto, raggi X, γ) il che è in completo disaccordo col fatto che, a temperatura ordinaria, il massimo della intensità di radiazione si concentra nell'infrarosso.
Il problema si risolve appunto ammettendo, secondo la legge di Planck, che l'energia associata alle oscillazioni sia proporzionale alla *frequenza* e non alla λ.

2. **Grandezze fondamentali** : **intensità della radiazione e densità di energia**

Le funzioni che descrivono lo spettro del corpo nero sono *l'intensità specifica della radiazione I* e la *densità specifica dell'energia* ρ e possono essere espresse entrambe sia in funzione della λ sia della frequenza f. L'intensità specifica della radiazione rappresenta la quantità di energia emessa nell'unità di tempo su unità di superficie e su unità di angolo solido sotto forma di radiazione termica in corrispondenza a una data lunghezza d'onda (se si usa λ come variabile) o di data frequenza f. Utilizziamo i due simboli I_λ e I_f per le due funzioni. Le sue unità di misura sono quindi $\frac{W}{m^2 \cdot srad}$ dove *srad* sta per *steradiante*, l'unità di angolo solido. Essa differisce leggermente dalla grandezza generalmente intesa come *intensità* , che implica solo un rapporto tra potenza e area, a prescindere dalla direzione di propagazione della radiazione. Più esattamente, il ruolo di *intensità specifica* nel senso prima espresso spetterebbe al prodotto $I_\lambda \cdot d\lambda$ dove $d\lambda$ è il differenziale, ovvero un intervallo infinitesimo di lunghezze d'onda comprese tra λ e $\lambda + d\lambda$, o al prodotto $I_f \cdot df$, per frequenze comprese tra f e $f + df$. Questa precisazione è necessaria per stabilire le corrette unità di misura nelle quali devono essere espresse le funzioni che descrivono lo spettro del corpo nero. Le unità di misura di I_λ si ottengono dividendo ulteriormente $\frac{W}{m^2 \cdot srad}$ per m ($d\lambda$ è dimensionalmente una lunghezza), per cui otteniamo che I_λ va espressa in $\frac{W}{m^3 \cdot srad}$.
Se invece si fa riferimento alla frequenza f , troviamo che I_f è espressa in $\frac{W}{m^2 \cdot srad \cdot s^{-1}}$ = $\frac{W \cdot s}{m^2 \cdot srad}$ = $\frac{J}{m^2 \cdot srad}$. Se rappresentiamo graficamente le funzioni I_λ o I_f , l'intensità della radiazione – intesa come energia irradiata nell'unità di tempo su unità di area e di angolo solido – emessa in un intervallo di lunghezze d'onda comprese tra λ_1 e λ_2 è data dall'area della parte di piano (rettangoloide) limitata dall'asse $x = \lambda$, dal grafico di I_λ e dalle rette verticali $x = \lambda_1$ e $x = \lambda_2$. Lo stesso vale per la funzione I_f .

L'intensità *totale* della radiazione è la quantità di energia radiante emessa nell'unità di tempo dall'unità di superficie su tutte le lunghezze d'onda o frequenze e in tutte le direzioni che formino con la normale alla superficie emittente un angolo ϑ minore di $\frac{\pi}{2}$, e si misura come rapporto $\frac{potenza}{superficie}$ in $\frac{W}{m^2 \cdot s}$. Infatti la radiazione termica non viene emessa tutta ortogonalmente alla superficie radiante, ma tutti i raggi divergenti da un punto della superficie contenuti in un angolo solido = 2π (cioè un emisfero con centro nel punto sorgente) sono linee di flusso dell'energia radiante secondo la *legge di Lambert* per cui l'intensità della radiazione attraverso un elemento di angolo solido $d\Omega$ è data da $I_n \cdot \cos\vartheta \cdot d\Omega$ dove I_n è l'intensità lungo la direzione $\vec{n}$ e ϑ è l'angolo (colatitudine) formato dalla normale $\vec{n}$ alla superficie emittente e dalla direzione del raggio che attraversa l'elemento *dS.* Essa è calcolata a partire dall'intensità specifica I_λ o I_f integrando sia su tutte le direzioni di emissione sia su tutte le lunghezze d'onda o frequenze. Il primo integrale viene eseguito in base alla ***legge di Stefan-Boltzmann***, per la quale *la quantità di energia emessa nell'unità di tempo su unità di area e di angolo solido sotto forma di radiazione termica di corpo nero nella direzione normale alla superficie emittente* è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta. Quindi l'intensità totale I_{tot} dell'energia radiante, calcolata su tutte le direzioni lungo cui l'energia viene propagata, e su tutte le λ , è data dall'integrale

$$I_{tot} \quad = \quad \int_\Omega I_n d\Omega \quad = \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_n \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta \quad = \quad \pi \cdot I_n$$

In quanto evidentemente $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ e $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}$.

Ne segue che anche l'intensità totale è proporzionale a T^4 , per cui la legge di Stefan-Boltzmann può semplicemente essere enunciata dicendo che *l'intensità totale della radiazione termica di corpo nero è direttamente proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta,* secondo l'equazione

$$I_{tot} \quad = \quad \sigma \cdot T^4$$

nella quale compare la ***costante di Stefan-Boltzmann*** $\sigma = 5{,}67032 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$. Questa è la forma più comunemente usata per la legge di Stefan-Boltzmann.

La *densità di energia* ρ è invece il rapporto tra l'energia della radiazione termica e il volume, ed è una grandezza utile in quanto la radiazione di corpo nero è generalmente quella contenuta sotto forma di onde stazionarie all'interno di una cavità con le cui pareti è in equilibrio termico. Poiché la distanza percorsa dalla radiazione nell'unità di tempo è numericamente equivalente alla velocità della luce nel vuoto, la quantità di energia I_n che nell'unità di tempo e su unità di superficie e di angolo solido viene emessa in direzione normale ad una apertura nella cavità è data da $\frac{c}{4\pi} \cdot \rho$ (*), dove I e ρ si possono riferire sia alla radiazione totale che alla componente relativa a una specifica λ o *f* ; per cui, la relazione tra *intensità della radiazione emessa in tutto un emisfero* e *densità di energia* è data da

$$I \quad = \quad \frac{\pi \cdot c}{4\pi} \cdot \rho \quad = \quad \frac{c}{4} \cdot \rho$$

* La divisione per 4π si giustifica se si pensa a un elemento di volume *dV* interno alla cavità. Ogni elemento di volume irradia energia in tutte le direzioni, secondo una simmetria sferica; quindi l'intensità della radiazione emessa da *dV* si ripartisce su un angolo solido = 4π e quando si passa al rapporto con l'angolo solido bisogna dividere per 4π . Si può giungere alla stessa conclusione considerando gli scambi energetici tra la radiazione e le pareti interne della cavità. Supponiamo che questa sia una sfera di raggio R e che subisca una dilatazione del raggio R della quantità differenziale $dR = cdt$ (cioè, nel tempuscolo *dt* la radiazione si espande sfericamente alla velocità della luce nel vuoto). Un aumento $dV = 4\pi R^2 dR$ del volume di una cavità sferica implica un lavoro di espansione = $\rho \frac{dV}{dR} dR$ (variazione di energia) = $4\pi R^2 \rho dR$ = $I_n \cdot 4\pi R^2 \frac{dt}{dR} dR$ (flusso di

energia attraverso la superficie della cavità nel tempo $dt = \frac{dR}{c}$) dove qui I_n rappresenta la potenza su unità di superficie della componente della radiazione normale alle pareti; semplificando si ha $I_n = c\rho$. La "dilatazione" della radiazione, uniforme in tutte le direzioni, implica tutto l'angolo solido, per cui se si fa riferimento solo al flusso di energia irradiata attraverso una apertura di angolo solido $d\Omega$ in srad bisogna calcolare la radiazione uscente lungo la normale come $\frac{I_n}{4\pi} d\Omega \cdot R^2$. Di qui l'utilità di utilizzare l'intensità su steradiante e la differenza di un fattore 4π tra la densità di radiazione (che prescinde dalle direzioni di propagazione dell'energia perché riferita a un insieme di onde stazionarie) e l'intensità della radiazione, che implica considerazioni sui raggi di propagazione.

Anche nel caso della densità *specifica* di energia è necessario precisare che a tutto rigore questa qualifica spetta piuttosto al prodotto $\rho_\lambda \cdot d\lambda$ o al prodotto $\rho_f \cdot df$. Quindi le unità di misura sono rispettivamente $\frac{J}{m^3}/m = \frac{J}{m^4}$ per ρ_λ e $\frac{J}{m^3 \cdot s^{-1}} = \frac{J \cdot s}{m^3}$ per ρ_f .

3. **Equazioni della radiazione di corpo nero**

Le equazioni forniscono la densità o l'intensità specifiche della radiazione di corpo nero a una data lunghezza d'onda ρ_λ o a una data frequenza ρ_f , nel senso prima precisato. Per passare da un'equazione in funzione di λ alla corrispondente in funzione della f basta operare la sostituzione $\lambda \rightarrow \frac{c}{f}$.

Rispetto alla λ si ha, per la densità specifica di energia,

$$\rho_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \left\{ \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \right\}$$

con: h = costante di Planck, c = velocità della luce nel vuoto, k = costante di Boltzmann, e per l'intensità su angolo solido

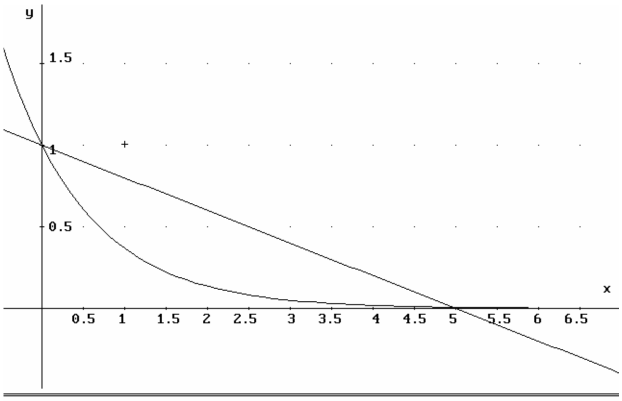
$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \left\{ \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \right\} \quad \text{in} \quad W \cdot m^{-2} \cdot srad^{-1}$$

Più sbrigativamente è una funzione del tipo $F(x) = \frac{A}{x^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{B}{x}} - 1}$ con $x = \lambda$, $B = \frac{hc}{kT}$.

Annullando la derivata di questa funzione si ottiene la lunghezza d'onda per la quale ρ_λ assume il valore massimo. Conviene però operare la sostituzione $\frac{B}{x} = X$, in modo che la funzione diventi

$\rho_\lambda(X) = \frac{A}{B^5} \cdot [\frac{X^5}{e^X - 1}]$; annullando la derivata $\rho'_\lambda(X)$ che è $= \frac{X^4 \cdot [(5 - X) \cdot e^X - 5]}{(e^X - 1)^2}$ si ottiene l'equazione $5 - X = 5 \cdot e^{-X}$ che si traduce nel sistema

$$\begin{cases} Y = 1 - \dfrac{X}{5} \\ Y = e^{-X} \end{cases}$$ rappresentato dal grafico



La soluzione $X_{\max}$ che ci interessa corrisponde approssimativamente a X = 5 . E' essenziale considerare che *questa soluzione ha carattere generale*, nel senso che è la stessa per tutte le funzioni ρ_λ (X) che esprimano l'intensità della radiazione in funzione di λ *qualunque sia la temperatura di equilibrio del corpo nero* . Dato che $X = \dfrac{B}{x} = \dfrac{\frac{hc}{kT}}{\lambda} = \dfrac{hc}{k} \cdot \dfrac{1}{\lambda T}$, si ottiene, riferendosi al punto di massimo della ρ_λ , $\lambda_{\max} T = \dfrac{hc}{k} \cdot \dfrac{1}{X_{\max}}$ e quindi

$\lambda_{\max} T$ = costante, secondo la ***legge dello spostamento di Wien*** .

Questo risultato può essere ottenuto anche operando sulla funzione ρ_f.

Rispetto alla frequenza si ottiene

$$\rho_f = \frac{8\pi f^2}{c^3} \cdot \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

che è una funzione del tipo $\dfrac{Hx^3}{e^{Kx} - 1}$ dove $x = f$, $H = \dfrac{8\pi h}{c^3}$, $K = \dfrac{h}{kT}$.

Per rappresentare graficamente la funzione ρ_f è utile porre $K\,x$ = Z , e trascurando il fattore $\dfrac{H}{K^3}$ (che è costante a T costante) si ottiene la formula ridotta $\rho(Z) = \dfrac{Z^3}{e^Z - 1}$ con $Z = \dfrac{hf}{kT}$.

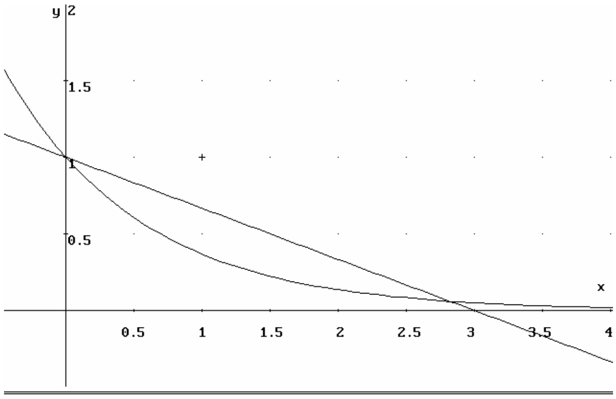
La funzione ρ(Z) si può studiare facilmente. Interessano i limiti $\lim\limits_{Z \to 0} \dfrac{Z^3}{e^Z - 1}$ che con la regola di de l'Hospital implica $\lim\limits_{Z \to 0} \dfrac{3Z^2}{e^Z} = 0$, e il $\lim\limits_{Z \to \infty} \dfrac{Z^3}{e^Z - 1} = 0$ in quanto e^Z è un infinito di ordine superiore.

Per determinare il massimo della curva I(Z), calcoliamone la derivata

$$\frac{d\rho}{dZ} \;=\; \frac{(3Z^2 - Z^3)\cdot e^Z - 3Z^2}{(e^Z - 1)^2} \;=\; Z^2 \cdot \frac{(3 - Z)\cdot e^Z - 3}{(e^Z - 1)^2}$$ $\Rightarrow$ il massimo si trova se annulliamo il numeratore: $3 - Z \;=\; 3\cdot e^{-Z} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{3}Z \;=\; e^{-Z}$ che è risolta dal sistema

$$\begin{cases} Y \;=\; 1 - \frac{1}{3}Z \\ \\ Y \;=\; e^{-Z} \end{cases}$$

rappresentabile nel diagramma seguente



Da questo diagramma si deduce che l'intersezione tra la retta $Y \;=\; \frac{1}{3} - Z$ e la curva esponenziale è poco minore di $Z = 3$.

E' fondamentale osservare che la soluzione trovata – che chiamiamo Z_{max} - *ha carattere generale, non dipendendo dalla temperatura assoluta T* ; quindi Z_{max} è una costante per ogni curva I(Z) , e tenendo conto della definizione di Z , possiamo scrivere

$Z_{max} \;=\; \frac{hf_{max}}{kT} \;=\; \frac{h}{k}\cdot\frac{f_{max}}{T}$ dove f_{max} è la frequenza alla quale si ha il massimo dell'emissione. Si ottiene infine

$$\frac{f_{max}}{T} \;=\; \frac{k}{h}\cdot Z_{max}$$

Oppure, passando alla λ, abbiamo $\frac{c}{f_{max}} \;=\; \frac{hc}{kZ_{max}}\cdot\frac{1}{T}$ che corrisponde ancora alla fondamentale ***legge dello spostamento di Wien*** , ma con un diverso calcolo della costante (Z_{max} = c.ca 3 e non 5, come ottenuto prima).

Questa divergenza numerica tra i due calcoli dipende evidentemente dal fatto che, rispettando il significato dei simboli precedentemente stabilito, la λ_{max} *non* è uguale al rapporto $\frac{c}{f_{max}}$. Per spiegare questo fatto apparentemente paradossale, bisogna considerare il significato delle funzioni I_λ e I_f , per il quale l'intensità della radiazione emessa compresa tra due lunghezze d'onda λ_1 , λ_2 oppure tra due frequenze f_1 e f_2 è dato rispettivamente dai due integrali (che hanno lo stesso valore)

$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho_\lambda d\lambda$ e $\int_{f2}^{f_1} \rho_f df$ (gli indici degli estremi sono invertiti, perché f è inversamente proporzionale a λ ; quindi $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho_\lambda d\lambda = -\int_{f_1}^{f_2} \rho_f df$ da cui si deduce l'equazione differenziale

$\rho_\lambda \, d\lambda = -\rho_f \, df$, e infine

$\rho_f = -\rho_\lambda \frac{d\lambda}{df} = \rho_\lambda \cdot \frac{c}{f^2} = \frac{\lambda^2}{c}\rho_\lambda$. Quindi il punto di massimo di I_f *non* coincide con quello di I_λ , ma con quello della funzione $\frac{\lambda^2}{c}\rho_\lambda$.

4. Grafico dello spettro di corpo nero, in funzione di λ

Per disegnare il grafico dello spettro del corpo nero, bisogna considerare o la formula

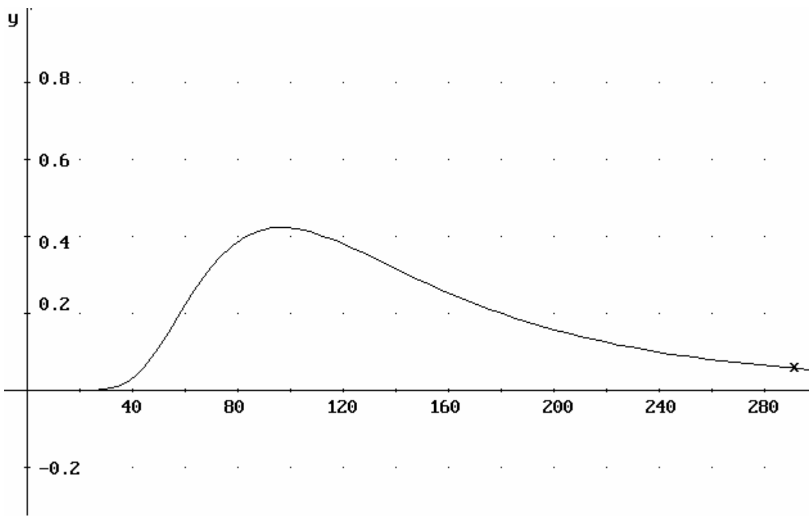
$$\rho_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \left\{ \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \right\} \quad \text{oppure} \quad \rho_f = \frac{8\pi f^2}{c^3} \cdot \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

I grafici possibili sono infiniti; noi possiamo considerare quelli a 300 K , 600 K e 1200 K.

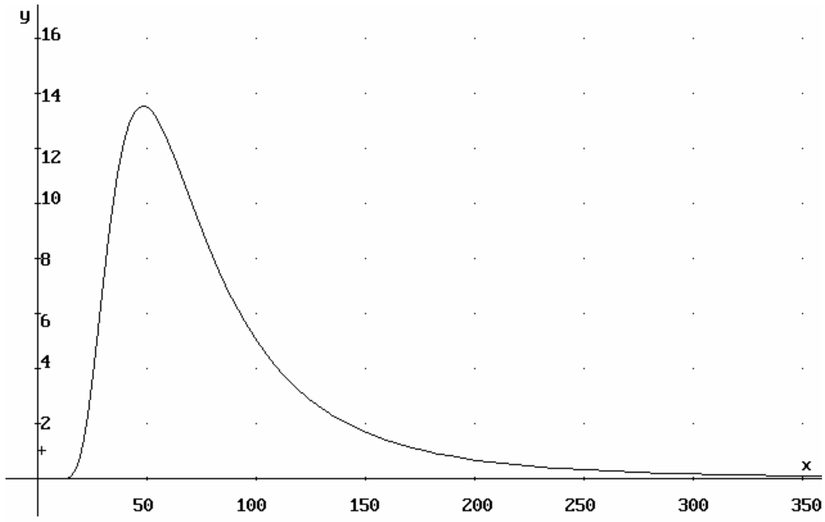
Serve un calcolo della costante $\frac{hc}{k}$ = c.ca $\frac{(6.6 \cdot 10^{-34} J \cdot s) \cdot (3 \cdot 10^8 m/s)}{1.38 \cdot 10^{-23} J/K} \approx \frac{19.8}{1.38} \cdot 10^{-3}$ = $1{,}435 \cdot 10^{-2}$ m·K. Un valore più corretto, tenendo conto di tutte le cifre decimali "sicure", è $1{,}438786 \cdot 10^{-2}$ m·K . Misurando la λ in nm , possiamo valutare la costante come $1{,}438786 \cdot 10^{7}$ nm. Si ha inoltre $hc \approx 1{,}98 \cdot 10^{-25}$ J·m. Nel grafico, sull'asse delle ascisse conviene riportare le λ in centinaia di nm (questa scelta è ragionevole, dato che la lunghezza d'onda della luce è intorno a $5 \cdot 10^2$ nm); quindi la costante, diventa $1{,}438786 \cdot 10^5$. La costante $8\pi hc \approx 49{,}74 \cdot 10^{-25}$ va moltiplicata per $(10^7)^5 = 10^{35}$, e si ottiene c.ca $5 \cdot 10^{11}$. Più esattamente, $8\pi hc = \frac{4\pi}{c} \cdot 2hc^2$ = $4{,}19169 \cdot 1{,}191062 = 4{,}992562 ... 10^{11}$ J·m

Vediamo ora i grafici della funzione empirica $\rho_\lambda = 5 \cdot 10^{11} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1{,}435 \cdot 10^5}{T\lambda}} - 1}$

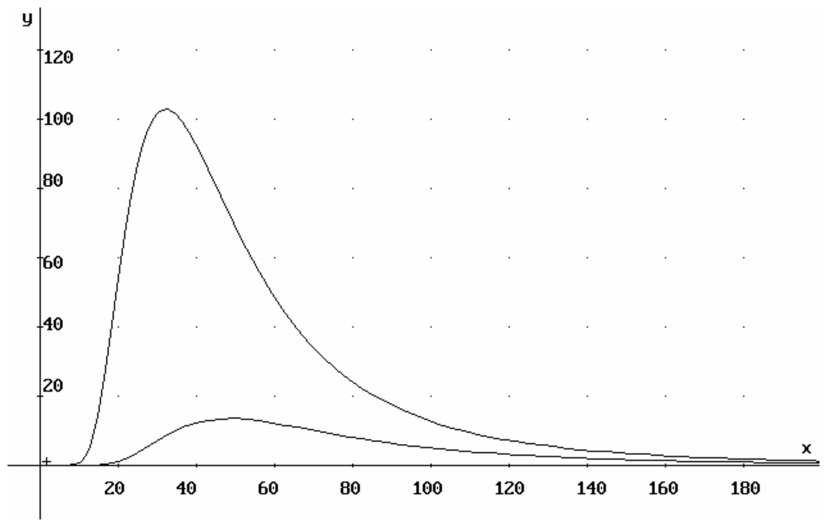
Alla temperatura di 300 K



Alla temperatura di 600 K



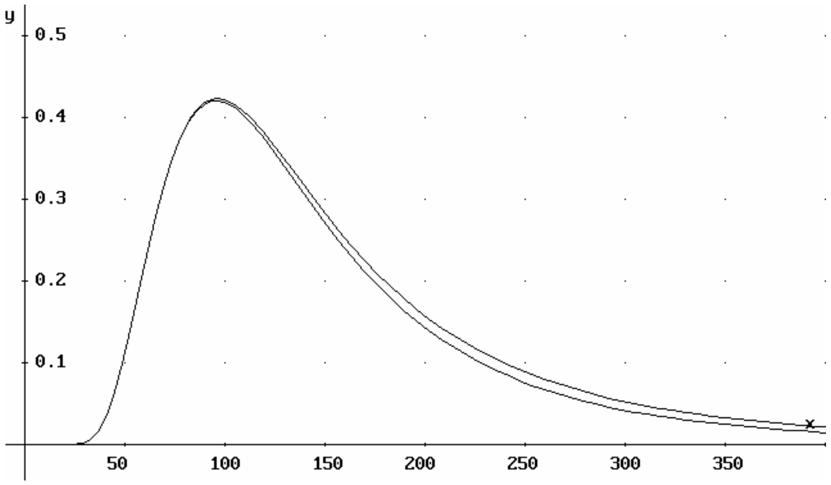
Alla temperatura di 1200 K abbiamo (il grafico inferiore è quello a 600 K)



5. **Calcoli approssimati** . La funzione densità di radiazione $\rho(\lambda) = \dfrac{A}{e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1}$ è in alcuni calcoli approssimabile con $A \cdot e^{-\frac{b}{\lambda T}}$. Ciò è possibile nella misura in cui $e^{\frac{b}{\lambda T}} >> 1$. L'esponente contiene $b = 1{,}435 \cdot 10^{-2}$ m·K . L'approssimazione è chiaramente valida se $\lambda \to 0$, resta da esaminare se lo è in prossimità del vertice delle curve di Planck. Il vertice è caratterizzato dall'equazione $\lambda_{\max} \cdot T \approx 0{,}3$ cm·K $= 3 \cdot 10^{-3}$ m·K , per cui nell'intorno del punto di massimo l'esponente è dato da $\dfrac{14{,}35 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} \approx 4{,}8$. Si ha $e^{4{,}8} \approx 120$, per cui l'errore percentuale che si compie tralasciando -1 al denominatore è < 1% . Ponendo $\lambda = 2\lambda_{\max}$, abbiamo $e^{2{,}4} \approx \sqrt{120} = 11$; all'aumentare di λ , l'approssimazione diventerebbe sempre meno valida, ma bisogna considerare il fattore $\dfrac{1}{\lambda^5}$, che per $\lambda \to \infty$ attenua l'errore di approssimazione fino a ridurlo a

zero all'infinito. Tale errore è c.ca $\dfrac{\sqrt[n]{120}-1}{n^5 \cdot \lambda_{max}^5}$ in corrispondenza della $\lambda = n\lambda_{max}$, Inoltre, poiché $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + ...$, abbiamo $e^x - 1 \approx x = \dfrac{b}{\lambda T}$; questa approssimazione, valida nella "coda" della curva di Planck , è tanto migliore se $x \to 0$, cioè se $\lambda \to \infty$: quindi, oltrepassato il massimo, moltiplicando per $\dfrac{1}{\lambda^5}$ la funzione di Planck diventa $\dfrac{A}{b\lambda^5}T$.

Sotto sono rappresentati i grafici della curva di Planck (grafico superiore) e della curva approssimata dalla funzione $\dfrac{A}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{b}{\lambda T}}$. Come si vede, l'approssimazione è ottima sino al massimo della curva, mentre è peggiore in prossimità del secondo flesso.



6. **Calcolo della costante di Wien** . Come visto prima, il calcolo *esatto* della costante di Wien non è possibile, in quanto tale costante dipende dalla soluzione dell'equazione trascendente

$5 - X = 5 \cdot e^{-X}$ con $X = \dfrac{hc}{k} \cdot \dfrac{1}{\lambda T}$. Tuttavia, si può sfruttare il fatto che è una costante per aggirare il problema. Consideriamo anzitutto la parte della curva di Planck con $\lambda \approx 0$; in tal caso, per ogni $T > 0$, l'esponenziale diverge e quindi le I_λ si possono scrivere asintoticamente come $\dfrac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{hc}{kT\lambda}}$ cioè $\dfrac{A}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}$ la cui derivata $A \cdot [-\dfrac{5}{\lambda^6} \cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}} + \dfrac{1}{\lambda^5} e^{-\frac{b}{T\lambda}} \cdot \dfrac{b}{T\lambda^2}] = \dfrac{A}{\lambda^7} \cdot [-5\lambda + \dfrac{b}{T}] \cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}$ si annulla se $\lambda = \dfrac{b}{5T}$. Quindi la costante di Wien, *in prima approssimazione*, è uguale a $\dfrac{b}{5} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{hc}{k} \approx \dfrac{1{,}435 \cdot 10^{-2}}{5}$ m·K = 2,87 mm·K = 0,287 cm·K

Calcolo della costante di Wien, col metodo di bisezione

Applichiamo la formula $\alpha = \dfrac{hc}{k} \cdot \dfrac{1}{X_{max}}$; X_{max} è la soluzione dell'equazione $1 - \dfrac{X}{5} = e^{-X}$. Si può usare il seguente programma in QBasic

```
DECLARE FUNCTION Funz (x)

'calcolo delle soluzioni dell'equazione  1-x/5=exp(-x)

'inizializzo le variabili
'estremo inferiore iniziale  a  =  4
'in z = 4 la funzione 1-x/5-exp(-x)è >0
'estremo sup iniziale  b  =  5
'in z = 5 la funzione è < 0
'uso il metodo di BISEZIONE

a = 4: b = 5

WHILE ABS(a - b) > .0001

c = (a + b) / 2
IF Funz(c) = 0 THEN
PRINT "la soluzione è x =   ", c
STOP
END IF
IF Funz(c) * Funz(a) < 0 THEN
b = c
ELSE
a = c
END IF
WEND
PRINT "la soluzione è x =    ", c
```

La funzione "Funz" richiamata nel programma è definita come

```
FUNCTION Funz (x)

Funz = 1 - x / 5 - EXP(-x)

END FUNCTION
```

La soluzione trovata (approssimata a meno di 0,0001) è X_{max} = 4.965149

Poiché $\frac{hc}{k}$ = $1{,}438786 \cdot 10^{-2}$ mK , la costante di Wien è data in cm·K dal rapporto $\frac{1{,}438786}{4{,}965149}$ = 2,89777... cm·K

Un calcolo abbastanza preciso, eseguibile con calcolatrice non programmabile, consiste nell'osservare che per $x \approx 5$ il valore dell'esponenziale $e^{-x} = e^{-5}$ è c.ca 0,00673794 : quindi l'intersezione tra la retta $Y = 1 - \frac{X}{5}$ e la curva esponenziale è molto vicina (leggermente inferiore) al punto X dato dalla soluzione dell'equazione $1 - \frac{X}{5} = 0{,}00673794$, cioè $X \approx 4{,}96631$ – valore che differisce dello 0,023% da quello "esatto" fornito dal programma.

7. **Calcolo approssimato della legge di Stefan-Boltzmann e della costante σ**

Si può eseguire, con lo stesso metodo, anche un calcolo approssimato della *legge di Stefan-Boltzmann* , per la quale l'intensità della radiazione totale emessa dal corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta della radiazione:

$I_{tot} = \sigma T^4$; σ è la costante di Stefan.

Trascurando 1 al denominatore e approssimando per $\lambda \to 0$, otteniamo per ogni T

$$\int \frac{A}{\lambda^5}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}} d\lambda \quad = \quad \int \frac{A}{\lambda^3}\cdot[\frac{1}{\lambda^2}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}]\cdot d\lambda \quad = \quad \frac{A}{\lambda^3}\cdot\frac{T}{b}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}} + \int \frac{3A}{\lambda^4}\cdot\frac{T}{b}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}\cdot d\lambda$$

Iterando il procedimento abbiamo

$$\int \frac{A}{\lambda^n}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}\cdot d\lambda \quad = \quad \frac{A}{\lambda^{n-2}}\cdot\frac{T}{b}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}} + (n-2)\cdot A\cdot\int \frac{1}{\lambda^{n-1}}\cdot\frac{T}{b}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}\cdot d\lambda$$

Se si calcola l'integrale definito generalizzato tra 0 e $+\infty$, il termine generale $\frac{A}{\lambda^{n-2}}\cdot\frac{T}{b}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}$ si annulla e quindi l'integrale va calcolato in base all'iterazione del calcolo di $(n-2)\cdot A\cdot\int \frac{1}{\lambda^{n-1}}\cdot\frac{T}{b}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}\cdot d\lambda$. L'ultimo passaggio consiste nel calcolo di $\frac{T^{n-2}}{b^{n-2}}\cdot\int A\cdot\frac{1}{\lambda^2}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}} d\lambda$ $= \quad A\cdot(\frac{T}{b})^{n-1}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}} + C$ e vi si arriva dopo n – 1 passaggi , compreso il calcolo dell'ultimo integrale $\int A\cdot\frac{1}{\lambda^2}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}} d\lambda$. Perciò l'integrale finale calcolato, a prescindere dai termini che tendono a 0 quando λ tende a 0 e all' ∞, è dato da I $= (n\text{-}2)(n\text{-}3)...1 \cdot A\cdot\frac{T^{n-1}}{b^{n-1}}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}} + C =$ $(n-2)!\cdot\frac{A}{b^{n-1}}\cdot T^{n-1}\cdot e^{-\frac{b}{T\lambda}}$. Poiché $e^{-\frac{b}{T\lambda}}\Big|_0^{\infty} = 1$, e $n = 5$, otteniamo in prima approssimazione che la densità della radiazione totale calcolata su tutte le λ è data da $6\frac{A}{b^4}\cdot T^4$ (in accordo con la *legge di Stefan-Boltzmann*), per cui $\rho_{tot} = 6\frac{8\pi hc}{h^4c^4}\cdot k^4\cdot T^4 = 48\pi\cdot\frac{k^4}{h^3c^3}\cdot T^4$ La costante di proporzionalità $R \approx \frac{150{,}72\cdot(1{,}38\cdot10^{-23})^4}{(6{,}62\cdot10^{-34})^3\cdot(3\cdot10^8)^3} \approx 0{,}07\cdot10^{-92}\cdot10^{102}\cdot10^{-24} = 7\cdot10^{-16}\ \frac{J}{m^3\cdot K^{-4}}$.

Il calcolo esatto fornirebbe per la ρ_{tot} la formula calcolata con approssimazione, moltiplicata per $\frac{\pi^4}{90}$, per cui $\rho_{tot} = 48\pi\cdot\frac{k^4}{h^3c^3}\cdot\frac{\pi^4}{90}\cdot T^4$ con $\pi^4 \approx 97{,}176...$ e quindi $\frac{\pi^4}{90} \approx 1{,}08$, il che conferma che il calcolo eseguito è approssimato per difetto all' 8% c.ca.

Per ottenere la ***costante di Stefan-Boltzmann*** in prima approssimazione, moltiplichiamo $\frac{\rho_{tot}}{T^4}$ per $\frac{c}{4}$ e otteniamo c.ca $7\cdot10^{-16}\cdot\frac{3\cdot10^8}{4} = 5{,}25\cdot10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} minore del valore effettivo, che si deduce dalla formula $\frac{c}{4}\cdot48\pi\cdot\frac{k^4}{h^3c^3}\cdot\frac{\pi^4}{90} = 12\pi\cdot\frac{\pi^4}{90}\cdot\frac{k^4}{h^3c^2} = \frac{2\pi^5}{15}\cdot\frac{k^4}{h^3c^2}$ che conduce al valore esatto $5{,}67032\cdot10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4} .