

IL TEOREMA DEGLI ZERI

Una dimostrazione

di Ezio Fornero

Il teorema degli zeri è fondamentale per determinare se una funzione *continua* in un intervallo chiuso $[a; b]$ si annulla in almeno un punto interno all'intervallo. Se una funzione $f(x)$ si annulla nel punto c , per definizione si dice che c è uno *zero* o *radice* della funzione. In pratica, il teorema stabilisce che, se certe ipotesi sono verificate in un intervallo $[a, b]$, l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione.

Nella presente dimostrazione, assumiamo per definizione che una $f(x)$ sia continua in un punto del suo dominio se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, cioè se il limite della funzione per x che tende a c coincide con il suo valore calcolato nel punto c .

Più esattamente, si dice che $f(x)$ è continua in c se, comunque si prenda un intorno completo I di $f(c)$, esiste in corrispondenza un intorno completo H_c di c tale che, per ogni $x \in H_c$, si abbia $f(x) \in I$; ovvero, preso arbitrariamente $\varepsilon > 0$, la condizione $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$ deve essere soddisfatta per ogni x appartenente a un opportuno intorno H_c del punto c .

Le ipotesi del teorema sono:

1. La funzione reale $f(x)$ di variabile reale x è continua nell'intervallo $[a; b]$;
2. Negli estremi dell'intervallo assume valori di segno opposto $\Rightarrow f(a)f(b) < 0$.

La tesi afferma che esiste almeno un c tale che $c \in]a; b[\wedge f(c) = 0$.

Dimostrazione

Nella dimostrazione assumiamo $f(a) < 0$ e quindi $f(b) > 0$; nel caso opposto le considerazioni che svolgeremo si applicheranno alla funzione $-f(x)$, che ha gli stessi zeri di $f(x)$.

Se $f(a) < 0$, poiché $f(x)$ è continua anche in a , applicando il *teorema di permanenza del segno* deduciamo che esiste (almeno) un intorno destro I_a del punto a tale che, per ogni $x \in I_a$, i corrispondenti valori della funzione hanno lo stesso segno di $f(a)$. In questo caso $x \in I_a \Rightarrow f(x) < 0$.

E' essenziale l'ipotesi di continuità della $f(x)$, in quanto l'ipotesi del teorema di permanenza del segno è che il limite per $x \rightarrow c$ di una funzione abbia segno strettamente positivo o negativo, e per una funzione continua in c il limite coincide con il valore della funzione; altrimenti solo dall'ipotesi $f(a) < 0$ non potremmo dedurre l'esistenza di almeno un insieme I_a tale che in ogni suo punto la funzione abbia segno negativo.

Ogni intorno I_a ammette un estremo superiore $\sup\{I_a\}$; indichiamo con s l'estremo superiore dell'insieme $\{\sup\{I_a\}\}$, la cui esistenza è garantita dal teorema per cui ogni insieme limitato di numeri reali ammette un estremo inferiore e uno superiore. Consideriamo ora $f(b)$; per la permanenza del segno, esiste un intorno sinistro di b in ogni punto x del quale si ha $f(x) > 0$. Esistono quindi delle $x < b$ tali che $f(x) > 0 \Rightarrow s < b$.

Ne segue che l'intervallo aperto a destra $[a; s[$ con $s < b$ è il massimo degli intervalli con estremo inferiore in a tali che si abbia $f(x) < 0$ in ogni loro punto x . Dimostriamo che deve essere $f(s) = 0$. Non può essere $f(s) < 0$; infatti in tal caso per la permanenza del segno esiste un intorno completo di s in ogni punto del quale si ha $f(x) < 0$, in contraddizione con il significato di s . Non può neppure essere $f(s) > 0$, perché in tal caso esisterebbero delle $x < s$ tali che $f(x)$ è positiva, mentre per ogni $x \in [a; s[$ deve essere $f(x) < 0$. Ma la funzione $f(x)$ è definita in $x = s$ e quindi può assumere solo il valore 0 .

Il numero s così definito è il minimo dell'insieme degli zeri di $f(x)$.

Il teorema degli zeri fornisce solo una *condizione sufficiente* per determinare l'esistenza degli zeri di una funzione continua.

Zeri di un polinomio

Il teorema degli zeri ha interessanti conseguenze per il calcolo delle “radici” *reali* di un polinomio $P(x)$ di grado n , dove per *radice* o *zero* del polinomio si intende ciascuna delle soluzioni dell'equazione $P(x) = 0$. In particolare si deduce che *un polinomio di grado dispari ammette sempre almeno una soluzione reale*, mentre un polinomio di grado pari può non avere soluzioni reali.

Infatti, ammettiamo che un polinomio $P(x)$ assuma valori di segno opposto in a e in b . Poiché un polinomio è una funzione continua in tutto il campo reale, lo sarà evidentemente anche in ogni intervallo chiuso e quindi in $[a, b]$ (supponiamo $a < b$). Perciò, per il *teorema degli zeri*, esiste almeno una radice di $P(x)$ compresa tra a e b . Si tratta quindi di dimostrare che un polinomio di grado dispari cambia di segno al variare della x .

Supponiamo che $P(x)$ abbia grado *dispari*. I limiti all'infinito di $P(x)$ sono evidentemente infiniti e uguali ai limiti del termine principale $a_0 x^n$ [in generale, un polinomio è indicato con $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_0$]. Se l'esponente è *dispari* i limiti per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$ rispettivamente sono infiniti di segno opposto; quindi, devono esistere un intorno I_- di $-\infty$ e un intorno I_+ di $+\infty$ nei quali $P(x) < 0$ e $P(x) > 0$ rispettivamente, o il contrario. Perciò vi sono infiniti punti del dominio di $P(x)$ – indichiamoli con “ a ” – tali che $P(a) < 0$ e infiniti “ b ” tali che $P(b) > 0$ o viceversa; quindi a un $P(x)$ di grado *dispari* è applicabile il teorema degli zeri e $P(x)$ avrà *almeno uno zero reale*.

Questo corollario del teorema si applica a qualsiasi funzione $f(x)$ definita e continua in tutto il campo reale, tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ sono infiniti di segno opposto. E' possibile generalizzarlo ulteriormente a una funzione definita e continua in tutto $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ siano finiti o infiniti di segno opposto; infatti per il *teorema della permanenza del segno* esistono un intorno di $-\infty$ e un intorno di $+\infty$ tali che in ogni punto a del primo e in ogni punto b del secondo la funzione assuma segno opposto.

Si può estendere il teorema ad una funzione $f(x)$ definita e continua in un aperto $]a, b[$ tale che $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L < 0$ e $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = M > 0$ o viceversa, con a e b finiti o infiniti. Infatti, se a e b sono finiti, possiamo ricondurci al teorema degli zeri applicandolo alla funzione

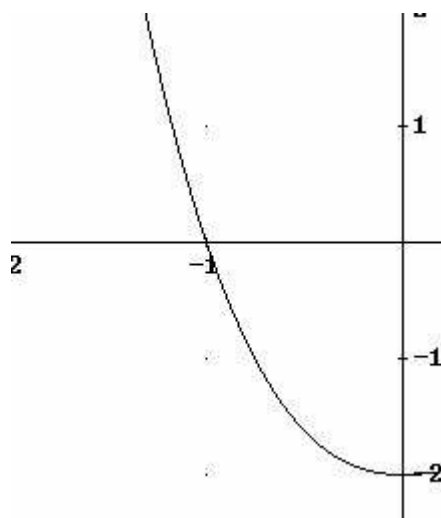
$$\varphi(x) = \begin{cases} L & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{se } a < x < b \\ M & \text{se } x = b \end{cases} \quad ; \text{ se invece almeno uno dei due estremi è infinito, si cade nel}$$

caso precedente.

Il teorema degli zeri *non si applica ai polinomi di grado pari*, che *possono* avere segno costante. Si può applicare, invece, alle *funzioni razionali fratte* (= rapporti tra polinomi) quando il numeratore è di grado dispari e il denominatore non ha zeri reali (e quindi la funzione non ha punti di infinito ed è continua in tutto il campo reale).

Dal punto di vista grafico, il significato del teorema è evidente: se una funzione è continua in un insieme, il suo grafico non ha interruzioni (è una curva connessa) e quindi, se contiene punti di

ordinata negativa e positiva, dovrà pure attraversare l'asse orizzontale in qualche suo punto. Tali intersezioni sono gli “zeri” della funzione rappresentata dal grafico.



Numero degli zeri

Il teorema degli zeri non prevede il numero di tutti gli zeri di una funzione interni ad un intervallo assegnato, ma in alcuni casi è possibile stabilire se la funzione presenta un solo zero o più di uno.

1. Criterio del segno di $f'(x)$

Se una $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema in $[a, b]$, e la sua derivata prima $f'(x)$ è definita in $]a, b[$, ha segno costante in $]a, b[$ e non si annulla, allora $f(x)$ ammette un solo zero c interno ad $]a, b[$.

Infatti, supponiamo per assurdo che la funzione presenti due zeri distinti c e z interni a $]a, b[$. Per il *Teorema di Rolle*, esiste almeno un punto interno all'intervallo di estremi c e z nel quale la derivata si annulla, contro l'ipotesi.

Si può giungere alla stessa conclusione ammettendo più semplicemente che la $f(x)$ sia strettamente crescente o decrescente in tutto $]a, b[$: p.es. supponiamo sia strettamente crescente. Sia c uno zero della funzione; per ogni $x > c$ dovrà essere $f(x) > f(c) > 0$ e quindi non esiste nessun $x > c$ tale che $f(x) = 0$, e per ogni $x < c$ dovrà essere $f(x) < f(c) < 0$, ecc.

Questa versione è preferibile alla precedente, perché non richiede la derivabilità della f in tutti i punti di $]a, b[$, necessaria per poter applicare il teorema di Rolle.

2. Criterio del segno di $f''(x)$

Supponiamo che $f(x)$ soddisfi il teorema degli zeri in $]a, b[$.

Se la derivata seconda $f''(x)$ è definita, ha segno costante e non si annulla mai in tutto $]a, b[$, allora $f(x)$ ammette un solo zero interno a $]a, b[$.

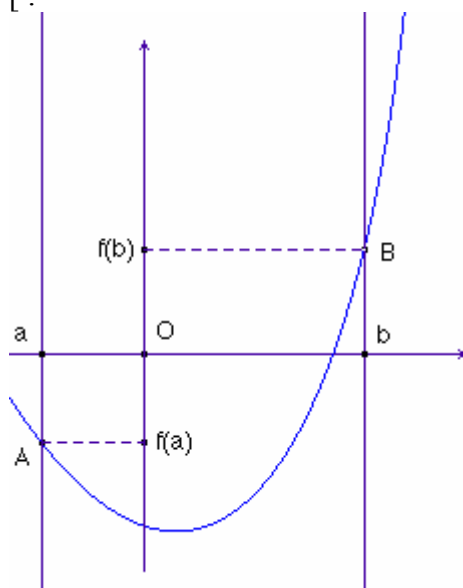
L'ipotesi significa che $f'(x)$ è sempre strettamente crescente o decrescente in tutto $]a, b[$. Cominciamo con l'esaminare un caso particolare, per capire quale sia la struttura della dimostrazione in generale.

Supponiamo p.es. che $f(a) < 0, f'(x) > 0$. Allora, se $f'(a) \geq 0$, per ogni $x \in]a, b[$ si ha $f'(x) > f'(a) \Rightarrow f'(x) > 0$ e si cade nel caso precedente di derivata prima con segno costante; se $f'(a) < 0$, allora esiste un solo punto t tale che $f'(t) = 0$. Infatti, $f(b) > f(a)$ implica [Lagrange] che esista *almeno* un punto z nel quale $f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, e applicando il teorema degli zeri a $f'(x)$ in $[a, z]$ si deduce che esiste almeno un punto t nel quale $f'(t) = 0$. Il punto t è unico, perché $f'(x)$ è strettamente crescente in tutto $]a, b[$, quindi $x \in]a, t[\Rightarrow f'(x) < 0$ e $x \in]t, b[\Rightarrow f'(x) > 0$. Quindi t è un punto di minimo di $f(x)$, per cui $f(t) < f(a) < 0$. Appliciamo il teorema degli zeri alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $]t, b[$; essendo sempre crescente in $]t, b[$, $f(x)$ ammetterà un solo zero interno a questo intervallo. Se la derivata seconda è negativa, si dimostra allo stesso modo che $f(x)$ ammette uno e un solo massimo in $]a, b[$ in un punto t e quindi un solo zero appartenente a $]t, b[$.

Dimostrazione generale del criterio della derivata seconda

Se in un punto t di $]a, b[$ si ha $f'(t) = 0 \wedge f''(t) > 0$ allora t è un punto di minimo, se $f'(t) = 0 \wedge f''(t) < 0$ è un punto di massimo.

Supponiamo ora che il segno di f'' sia costante in tutto l'intervallo $]a, b[$ e che f'' non si annulli; dimostriamo che esiste al più un solo punto $t \in]a, b[$ nel quale la derivata prima si annulla. Supponiamo infatti che f' si annulli in t e in z ; applicando il teorema di Rolle a f' in un intervallo chiuso di estremi t e z la f'' si deve annullare in almeno un punto interno all'intervallo, contro l'ipotesi. Perciò il punto t è unico ed è un punto di massimo o di minimo, dato che f'' è strettamente positiva o negativa in tutto $]a, b[$. Inoltre non può essere $f(t) = 0$, perché $f(t)$ deve essere o maggiore del massimo o minore del minimo tra $f(b)$ e $f(a)$ e quindi concorde con uno dei due. Se $f(t)$ è discorde da $f(a)$ e quindi concorde con $f(b)$ vi sarà uno e un solo zero della $f(x)$ in $]a, t[$, in base al criterio del segno di $f'(x)$. Nell'altro intervallo $f'(x)$ ha segno costante, quindi $f(x)$ è strettamente crescente o decrescente in tutto $]t, b[$: $f(t) > f(x) > f(b)$ o viceversa; quindi ha lo stesso segno di $f(t)$ e di $f(b)$ e non vi sono altri zeri. Alla stessa conclusione si giunge supponendo $f(t)$ concorde con $f(a)$ e discorde da $f(b)$, ma in questo caso l'unico zero appartiene a $]t, b[$.



Caso $f(a) < 0, f'(a) < 0, f'' > 0$

3. Criterio della derivata n-esima

Supponiamo che

1. La derivata di ordine n di una funzione $f(x)$, $f^{(n)}(x)$, sia definita in tutto l'intervallo $]a, b[$ e abbia segno costante in $]a, b[$;
2. La derivata di ordine $n - 1$ $f^{(n-1)}(x)$ è definita e continua in tutto $[a, b]$;
3. Nel punto a , $f^{(n-1)}(a)$ ha segno concorde con $f^{(n)}(x)$.

Si conclude che $f^{(n-1)}(x)$ ha segno concorde con $f^{(n)}(x)$ in tutto $]a, b[$ (per il teorema di Lagrange, in ogni punto x di $]a, b[$ si ha $f^{(n-1)}(x) = (x - a) \cdot f^{(n)}(z) + f^{(n-1)}(a)$ dove $z \in]a, x[$. Questa espressione è una somma di termini con lo stesso segno e quindi per ogni x di $[a, b]$ $f^{(n-1)}(x)$ ha lo stesso segno di $f^{(n-1)}(a)$.

Estendiamo il teorema a una funzione $f(x)$ definita e continua insieme alle sue prime $n - 1$ derivate in un intervallo $[a, b]$, tale che

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. Tutte le prime $n - 1$ derivate hanno segno concorde nel punto a ;
3. La derivata n -esima $f^{(n)}(x)$ è definita e continua nell'intervallo $]a, b[$;
4. Il segno di $f^{(n)}(x)$ in tutto $]a, b[$ è concorde con quello delle prime $n - 1$ derivate in a .

Allora la funzione $f(x)$ è strettamente crescente o decrescente in tutto $]a, b[$, per cui ammette un solo zero nell'intervallo.

Infatti, se la derivata di ordine m ha segno definito in tutto l'intervallo allora la derivata di ordine $m - 1$ è strettamente crescente o decrescente nello stesso intervallo. Se il segno di $f^{(m)}$ in $]a, b[$ concorda con il segno di $f^{(m-1)}$ nel punto a , allora si avrà $f^{(m-1)}(x) > f^{(m-1)}(a) > 0$ oppure al contrario $f^{(m-1)}(x) < f^{(m-1)}(a) < 0$ in tutto $]a, b[$. Quindi tutte le derivate hanno in $[a, b]$ lo stesso segno di $f^{(n)}(x)$, compresa in particolare la derivata prima. Perciò la $f(x)$ è sempre crescente o decrescente in tutto l'intervallo. Si cade quindi nel caso corrispondente al criterio del segno di $f'(x)$ e la regola è dimostrata.