

L'INFINITO MATEMATICO

una breve introduzione

di Ezio Fornero

Fino alla metà del XIX secolo, l'infinito matematico non è stato oggetto di indagini sistematiche. Ciò è dovuto alla difficoltà di trattare l'argomento senza cadere in paradossi e contraddizioni. Per esempio, è difficile definire come confrontare due infiniti diversi. Si può considerare il paradosso di Galileo, che si chiede se sono più numerosi i numeri naturali (0 , 1 , 2 , 3 ...) o i soli numeri pari. A prima vista, poiché vi sono infiniti numeri naturali dispari, si dovrebbe concludere che i numeri naturali sono "di più" dei soli numeri pari (o dispari, o multipli interi di qualche numero intero, o numeri primi ecc...). Tuttavia, Galileo fa notare che ogni numero naturale corrisponde a un solo numero pari, e viceversa, secondo una corrispondenza biunivoca:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Ora, due insiemi *finiti* di oggetti in corrispondenza biunivoca hanno lo stesso numero di elementi. Se si estende questo criterio agli insiemi infiniti si dovrebbe concludere che i numeri naturali non sono più numerosi dei numeri pari, contrariamente al *principio aristotelico per cui il tutto è maggiore della parte*.

Questo paradosso, insieme alle difficoltà implicite nella definizione di quantità infinite, ha indotto i matematici a fare un uso il più possibile limitato del concetto di infinito, fino a quando il matematico tedesco *Cantor*, dopo la metà del XIX secolo, elaborò una prima *teoria degli insiemi* che permetteva di trattare logicamente il problema dell'infinito matematico. Cantor parte dal concetto di *insieme* come gruppo di elementi distinti, e definisce un *insieme infinito come un insieme che può essere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria*. Per definizione, per "parte propria" di un insieme si intende un sottoinsieme dell'insieme non contenente almeno un elemento dell'insieme. Per esempio, se prendiamo l'insieme { 1 , 2 , 4 , 6 , 7 , 10 }, scelto prendendo alcuni numeri naturali a caso, una sua parte propria potrebbe essere { 2 , 6 , 7 , 10 }. E' evidente che il numero degli elementi di una parte propria di un insieme finito *I* è sempre strettamente minore del numero degli elementi di *I*. Ma, considerando l'esempio dei numeri naturali confrontati con i numeri pari, si scopre che l'insieme dei numeri pari è una parte propria dell'insieme dei naturali, e questo implica – come suggerisce l'intuizione – che l'insieme dei numeri naturali è infinito, perché è in corrispondenza biunivoca con i soli numeri pari. A questo punto, è necessario chiedersi: questi due insiemi infiniti, hanno lo stesso numero di elementi? O si deve far valere il principio per cui il tutto è maggiore della parte?

Cantor risponde facendo osservare che, *per gli insiemi finiti, vale il principio che hanno lo stesso numero di elementi se si possono porre in corrispondenza biunivoca*. Ciò si esprime dicendo che due insiemi finiti hanno lo stesso *numero cardinale* se sono in corrispondenza biunivoca. Se si estende questo criterio a *tutti* gli insiemi, si deve ammettere che due insiemi infiniti come i naturali e i soli numeri pari hanno lo stesso numero cardinale, anche se ci sono infiniti numeri naturali dispari. Quindi Cantor asserisce che *insiemi infiniti in corrispondenza biunivoca hanno lo stesso numero infinito di elementi, anche se uno dei due è parte propria dell'altro*.

A questo punto, si pone un problema: gli insiemi infiniti della Matematica hanno tutti lo stesso numero cardinale, cioè sono tutti in corrispondenza biunivoca tra di loro? Per esempio, l'insieme

dei numeri razionali (cioè le frazioni) ha la stessa cardinalità dei soli naturali? Apparentemente no (anche pensando che tra due razionali se ne trova sempre un terzo, mentre questo non vale per i naturali), eppure si può dimostrare che è possibile istituire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme Q dei razionali e l'insieme N dei naturali, ma per ottenere questo risultato è necessario ordinare i numeri razionali non in base alla grandezza, ma secondo uno schema come il seguente:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5		1/n			
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5		2/n			
3/1	3/2	3/3	3/4			3/n			
4/1	4/2	4/3	4/4			4/n			

L'ordine secondo cui organizzare l'insieme Q è $1/1$; $1/2$; $2/1$; $1/3$; $2/2$; $3/1$; $1/4$; $2/3$; $3/2$; $4/1$ ecc , cioè si ricopre la matrice (tabella) infinita di tutti i razionali, costruita come sopra, con una *successione di diagonal finite* ciascuna delle quali inizia con un termine del tipo $\frac{1}{n}$

(prima riga, n-esima colonna) e finisce con un termine del tipo $\frac{n}{1}$ (n-esima riga, prima colonna

della matrice); in questo modo lo stesso numero (per es. $\frac{n}{n} = 1$) compare infinite volte, ma

questo non modifica la conclusione del ragionamento: in questo modo, ad ogni numero razionale

$\frac{m}{n}$ viene associato uno e un solo naturale, quindi secondo il criterio di Cantor *i numeri naturali e i*

numeri razionali hanno lo stesso numero cardinale , anche se esistono infiniti numeri razionali che

non equivalgono a nessun intero positivo, come p.es. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ ecc.

Resta da esaminare l'insieme di tutti i numeri reali, cioè l'insieme $\mathbb{R}$. Per stabilire se $\mathbb{R}$ e N hanno lo stesso numero di elementi, partiamo dalla *rappresentazione decimale infinita del numero reale*, per cui esso può essere rappresentato da una successione infinita di cifre e viceversa qualsiasi successione di cifre, separate da una virgola, rappresenta un numero reale. In realtà è sufficiente esaminare i numeri reali compresi tra 0 e 1; infatti, se si trovasse che questo insieme non ha lo stesso numero cardinale di N , se ne deduce che anche l'insieme $\mathbb{R}$ non avrà lo stesso numero di elementi di N .

Supponiamo ora che l'insieme $\mathbb{R}$ sia in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali; se è così, noi possiamo pensare che vi sia un “primo” numero reale, un “secondo” numero reale, un “terzo” numero reale, e così via, cioè possiamo pensare che esista un *elenco infinito numerabile* di numeri reali comprendente *tutti* i numeri reali, come per l'insieme dei razionali.

0, $a_1 b_1 c_1 d_1$
0, $a_2 b_2 c_2 d_2$
0, $a_3 b_3 c_3 d_3$
.....
.....
0, $a_n b_n c_n d_n$
.....

dove le lettere indicano le cifre in successione e l'indice n indica il numero reale associato a n .

Questa ipotesi è però contraddetta dal fatto che si riesce a trovare *almeno un numero reale che non può appartenere a questo elenco*.

Se infatti si riesce a dimostrare che si può costruire anche un solo numero reale che non appartiene all'elenco, si deduce che questo elenco non è completo e quindi l'insieme dei numeri reali non è in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali, anzi il suo numero cardinale è maggiore di quello dei numeri naturali.

Si può definire un numero reale diverso da tutti i numeri dell'elenco pensando che la sua prima cifra decimale sia diversa da a_1 , la seconda diversa da b_2 , la terza diversa da c_3 , la n -esima diversa dalla n -esima cifra del numero reale associato nell'elenco al numero naturale n , in modo che le sue cifre siano ordinatamente diverse da quelle della diagonale $a_1 b_2 c_3$ (infatti questo procedimento è noto come "metodo diagonale").

Infatti, se la n -esima cifra di un numero reale è diversa dalla corrispondente cifra del numero reale n -esimo contenuto nell'elenco, allora questo numero è diverso da tutti i numeri reali elencati, in contraddizione con l'ipotesi secondo cui l'elenco conterrebbe tutti i numeri reali. Ne segue che *l'insieme dei numeri reali ha un numero cardinale maggiore di quello dei numeri naturali*.

A questo proposito, lo stesso Cantor introdusse il concetto di "*potenza del numerabile*" per indicare il "numero" di tutti i numeri naturali, e di "*potenza del continuo*" per indicare il "numero" di tutti i numeri reali, assegnando i simboli $\aleph_0$ ("aleph-zero") e C rispettivamente per il primo e il secondo.

Non esistono numeri infiniti minori della potenza del numerabile, mentre esistono infiniti maggiori della potenza del continuo; i matematici hanno discusso se esistano o no numeri infiniti "compresi" tra $\aleph_0$ e C , e a questo proposito non vi è una conclusione definitiva. L'ipotesi per cui non esistono numeri infiniti compresi tra la potenza del numerabile e quella del continuo è detta *ipotesi del continuo*.