

LA CORRENTE ELETTRICA E LE LEGGI DI OHM

di Ezio Fornero

Struttura dei conduttori

I conduttori possono essere liquidi o solidi; in determinate circostanze, anche una sostanza allo stato gassoso può essere conduttrice.

I solidi conduttori sono essenzialmente i *metalli*. Il carattere metallico dipende dalla natura del legame chimico, e possiamo dividere i solidi in quattro classi: molecolari, covalenti, ionici, e metallici. I primi tre tipi sono isolanti – cioè, non permettono il passaggio della corrente elettrica; ci interessa quindi solo il quarto.

In linea di principio, i solidi in senso stretto sono caratterizzati dal fatto che le particelle che li costituiscono sono disposte secondo una struttura *regolare e periodica* (salvo il fatto che generalmente esistono impurità e irregolarità, che però trascuriamo). Nei solidi metallici, tali particelle sono ioni positivi; il loro insieme è detto *reticolo cristallino*. Gli elettroni perduti dagli atomi ionizzati (di solito uno o due, a seconda del metallo) non sono vincolati a nessuna posizione in particolare e si muovono all'interno dello spazio non occupato dagli ioni. Tali elettroni sono detti *elettroni di conduzione*, dato che la conducibilità elettrica è dovuta proprio alla loro presenza. Infatti, gli ioni positivi – benché animati da un moto continuo di *agitazione termica* previsto dalla Teoria Cinetica – sono vincolati a oscillare intorno a centri fissi, la cui distribuzione nello spazio determina propriamente la geometria del solido, e non possono essere spostati – a meno che non si fornisca una quantità sufficientemente elevata di energia, fino a provocare la fusione – mentre gli elettroni di conduzione, qualora siano interessati da un campo elettrico, possono essere messi in moto ottenendo una corrente elettrica, cioè un moto mediamente ordinato e sistematico di cariche elettriche.

Gli elementi che presentano spiccato carattere metallico sono quelli del primo e secondo gruppo del sistema periodico e gli elementi di transizione. Di fatto, i conduttori più interessanti (cioè quelli di uso comune) appartengono a quest'ultima categoria. Nei metalli di transizione l'ultimo livello ($n = 4, 5$ o 6) contiene elettroni nel sottolivello s mentre il livello precedente non è ancora completo; inoltre, gli elementi di transizione sono caratterizzati, in generale, da elevati *numeri di correlazione*, cioè ogni atomo – anzi, ione – è circondato da un numero elevato di altri atomi (8 o 12). La distanza piuttosto grande tra gli elettroni più esterni e il nucleo e soprattutto il fatto che gli atomi sono disposti in modo compatto nello spazio fa sì che questi elettroni risentano notevolmente delle forze attrattive da parte dei nuclei degli atomi circostanti, che riescono a sottrarli all'atomo cui appartenerebbero se questo fosse isolato: perciò ogni atomo perde gli elettroni più esterni e nessun atomo è in grado di catturarli in modo stabile. Ne consegue che ogni atomo di un elemento di transizione perde uno o due elettroni.

Elettroni di conduzione

Esaminiamo ora il comportamento di un elettrone di conduzione. In base alla teoria cinetica, sia gli elettroni sia gli ioni positivi sono in continuo movimento, e l'energia cinetica media è proporzionale alla T assoluta secondo la *legge di Boltzmann*:

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT$$

essendo $\langle \dots \rangle$ il simbolo di valore medio, k la *costante di Boltzmann* $= 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ e T la temp. assoluta in gradi Kelvin. Essendo $E = \frac{1}{2} m_e v^2$, e considerato che m_e è molto piccolo (c.ca $9 \cdot 10^{-31}$ Kg), ne segue che la *velocità media* degli e^- è molto elevata : si ottiene $\langle v \rangle \sim \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = \text{c.ca } 10^5 \text{ m/s}$ a temperatura ambiente. Ovviamente, il moto di un singolo elettrone è estremamente caotico e disordinato: essendo gli atomi molto ravvicinati, gli elettroni li urtano continuamente, venendo respinti dalla carica negativa che circonda il nucleo.

Supponiamo ora che gli elettroni siano immersi in un campo elettrico \mathbf{E} , uniforme in tutto lo spazio del conduttore (che può essere un filo di Cu collegato ai morsetti di una batteria). Gli elettroni vengono quindi accelerati dal campo con accelerazione $a = \frac{eE}{m}$ e acquistano una velocità $v = at$ nel senso del campo (l'asse del filo), che però non aumenta indefinitamente, dato l'elevata probabilità che l'elettrone urti un atomo dopo un intervallo di tempo molto breve. La velocità complessiva *istantanea* dell'elettrone è quindi la somma vettoriale della v dovuta al moto di agitazione termica – continuamente variabile – e di quella che acquista per effetto del campo E ; cioè in ogni istante abbiamo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_E$. Se però consideriamo i valori medi di questi vettori nel tempo, avremo che la media di \mathbf{v}_T è nulla (perché cambia di continuo e casualmente), mentre la media di \mathbf{v}_E non lo è: infatti, benché il moto di un singolo elettrone sia continuamente disturbato dagli urti contro gli atomi, nel complesso il campo elettrico spinge l'elettrone nella stessa direzione e nello stesso verso. Questa velocità media degli elettroni all'interno di un circuito elettrico è detta *velocità di deriva* ed è – rispetto alla velocità di agitazione termica – estremamente piccola (si tratta di c.ca 30 cm all'ora), ma è estremamente significativa, perché costituisce la corrente elettrica trasportata dal circuito.

Questo modello del moto dell'elettrone di conduzione in un conduttore permette di interpretare molto bene sia le *leggi di Ohm* sia *l'effetto Joule*.

Deduzione delle leggi di Ohm.

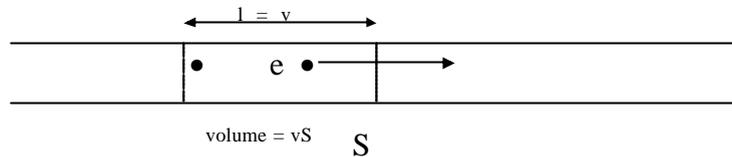
Si cerca di esprimere l'intensità di corrente elettrica rispetto alla differenza di potenziale applicata agli estremi del filo conduttore, in modo da evidenziare la resistenza elettrica. Si può pervenire a questo risultato in tre tempi:

1. si dimostra che la corrente i è = al prodotto della densità di elettroni (numero di elettroni contenuti nell'unità di volume) per la loro *velocità di deriva* e per la sezione S del filo.
2. Si esprime tale velocità di deriva in funzione del campo elettrico agente sugli elettroni e della massa dell'elettrone, e di alcune altre grandezze caratteristiche della struttura del materiale di cui il filo è costituito.
3. Si esprime il campo elettrico in funzione della differenza di potenziale applicata e della lunghezza del circuito.

In tal modo, si ottiene una relazione tra i , V e alcune altre grandezze, dipendenti in parte dalle caratteristiche geometriche del circuito, in parte dalla struttura della materia.

Ora, *l'intensità della corrente elettrica* i è data dal prodotto del numero di elettroni che in media attraversano una sezione normale del filo nell'unità di tempo, per la carica dell'elettrone. Indichiamo con N

la *densità di elettroni* (rapporto tra numero di elettroni e volume, supposto costante lungo tutto il circuito) e con S la misura della suddetta sezione normale. Inoltre, indichiamo con “ v ” la *velocità media di deriva* di un elettrone, che rappresenta il moto collettivo delle cariche nel circuito. In un secondo, dato che un elettrone percorre uno spazio $l = vt = v \cdot l = v$, passano attraverso tale sezione normale tutti gli elettroni contenuti in un tratto di filo di lunghezza $l = v$, corrispondente a un volume $v \cdot S$.



Il loro numero è quindi dato da densità \times volume, cioè $N \cdot v \cdot S$. Moltiplicando per la carica dell'elettrone e si ottiene la corrente e quindi la corrente è data da

$$i = NevS \quad (^\circ)$$

Passiamo ora al punto 2.

Consideriamo la componente della velocità di un e^- lungo la direzione del campo E . Se non incontrasse atomi lungo la sua traiettoria, v aumenterebbe progressivamente; dato però che gli urti contro gli ioni del reticolo sono frequenti, l' e^- percorre un breve tratto tra due urti consecutivi. Semplificando al massimo il problema, *ammettiamo che a causa di un urto l' e^- subisca un arresto*, per poi riprendere la sua corsa lungo il filo conduttore. Dato che il moto dell'elettrone tra due urti consecutivi è uniformemente accelerato, la velocità massima dovuta al campo elettrico è il doppio della velocità media di deriva v : perciò, se t è il tempo che separa due urti consecutivi, otteniamo

$$v = \frac{eE}{2m_e} t$$

Il tempo t può essere definito come il rapporto tra il *cammino libero medio* λ di un elettrone (=lo spazio che mediamente percorre tra due urti consecutivi) e la sua velocità media durante questo intervallo di tempo. Quest'ultima *non deve però essere identificata con la velocità di deriva*, che è solo il valor medio della componente creata dal campo elettrico, ma con la velocità effettiva dell'elettrone, che come abbiamo visto è enormemente maggiore, e che chiamiamo V_T per sottolineare la sua dipendenza dalla T assoluta. Perciò abbiamo

$$v = \frac{eE}{2m_e} \frac{\lambda}{V_T}$$

che, sostituita nella formula ($^\circ$) della corrente precedentemente calcolata, fornisce

$$i = \frac{e^2 E \lambda}{2m_e V_T} NS$$

Benché fisicamente questa sia forse il miglior modo per esprimere la i in funzione delle grandezze che regolano il fenomeno, si preferisce un'equazione nella quale compaia la diff. di potenziale (tensione) V applicata ai capi del circuito. Si passa così al punto 3. Ammettendo che *il campo E sia uniforme lungo tutto il tragitto dell'elettrone*, analogamente al caso del condensatore, si ottiene $V = E \cdot d$ dove d è la lunghezza del filo conduttore considerato. Perciò al posto di E nella formula precedente inseriamo V/d e così si ottiene

$$i = \frac{S}{d} \frac{e^2 N I}{2 m_e V_T} V$$

che mette in rilievo il contenuto delle leggi di Ohm: infatti, esprimendo V in funzione di i si otterrebbe

$$V = \frac{2 m_e V_T}{e^2 N I} \frac{d}{S} \cdot i \quad \text{che può leggersi come } V = R i,$$

dove il coefficiente di i rappresenta la resistenza R . Così abbiamo ottenuto la **1^a legge di Ohm**. Si vede che R dipende dal rapporto $\frac{d}{S}$ e ciò costituisce la **2^a legge di Ohm**, secondo la quale la R è *proporzionale alla lunghezza d del circuito e inversamente proporzionale alla sua sezione*. Il termine $\frac{2 m_e V_T}{N e^2 I}$ rappresenta la *resistività*. Si può notare come nella resistività alcuni termini siano costanti caratteristiche dell'elettrone (m_e , e), altri dipendano dalla struttura della materia (N e I) – e quindi dalla natura del conduttore – e infine V_T non è costante, ma dipende dalla T assoluta.

Effetto Joule

Per quanto riguarda **l'effetto Joule**, è sufficiente esaminarlo qualitativamente.

In assenza di campo elettrico, gli elettroni e gli ioni positivi sono in *equilibrio termico*, il che significa che l'energia cinetica media degli elettroni è uguale a quella degli ioni positivi; infatti, a causa degli urti tra elettroni e ioni, essa tende a distribuirsi in modo uniforme tra tutte le particelle. Se però viene applicato un campo elettrico, gli elettroni acquistano ulteriore energia per via del lavoro fatto dal campo lungo un cammino libero medio, che trasferiscono agli atomi durante gli urti; dato che la T assoluta è una misura dell'energia cinetica media, ne segue un aumento della T del conduttore rispetto all'ambiente e un trasferimento di calore a quest'ultimo.

Questo meccanismo giustifica qualitativamente anche *l'aumento della resistività con la temperatura*. Infatti, gli atomi del metallo compiono oscillazioni intorno a posizioni fisse, che possono essere paragonate alle oscillazioni di un corpo vincolato ad una molla che si espande e si contrae; aumentando l'energia cinetica, aumenta anche l'ampiezza delle oscillazioni (cioè, la distanza di allontanamento dai centri di oscillazione) e quindi *aumenta la probabilità che un elettrone urti un atomo*, cioè *diminuisce la distanza media tra due urti consecutivi contro un atomo del conduttore*. Ovviamente, ciò aumenta la resistività del materiale, come si vede anche dalla formula, dove il cammino libero medio λ compare al denominatore. Un secondo fattore che agisce nello stesso senso è legato alla dipendenza della resistività dalla temperatura: dall'espressione della resistività trovata prima si deduce che è direttamente proporzionale alla velocità del moto di agitazione termica V_T , la quale aumenta all'aumentare della temperatura.