

PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO IN GEOMETRIA SOLIDA

Problemi su poliedri

di Ezio Fornero

Indice dei problemi risolti

In generale, un problema si riferisce a una figura con caratteristiche specifiche (p.es., il numero dei lati della base) e può essere quindi generalizzato, lasciando inalterata la traccia generale della sua soluzione. Perciò la soluzione di alcuni dei problemi esaminati è seguita da quella del problema generalizzato. Le prime tre pagine hanno carattere introduttivo; i problemi iniziano a pag. 4.

1. *Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di altezza h e di superficie totale costante S , qual è quello di volume massimo?* pag. 5
2. *Tra tutti i parallelepipedi rettangoli aventi per base un quadrato e di volume costante V , qual è quello di superficie totale minima?* pag. 6
Fra tutti i prismi retti aventi per base un poligono regolare e di volume costante V , qual è quello di superficie totale minima? pag. 6
3. *Fra tutti i prismi esagonali regolari inscritti nella medesima sfera di raggio di misura r , qual è quello di volume massimo?* pag. 7
Fra tutti i prismi retti con base regolare inscritti nella medesima sfera di raggio di misura r , qual è quello di volume massimo? pag. 7
4. *E' dato un tetraedro qualunque $VABC$; lo si tagli con un piano parallelo alla base ABC in modo che risulti massimo il tetraedro $V'A'B'C'$ avente per base la sezione determinata e il vertice V' in un punto qualunque della base del primo.* pag. 8
5. *Determinare la piramide retta con base quadrata di volume massimo, avente la superficie totale di misura S costante.* pag. 9
Determinare la piramide regolare di base triangolare e superficie totale costante S , avente volume massimo. pag. 10
Fra tutte le piramidi regolari di superficie totale S costante, determinare quella di volume massimo. pag. 10
6. *Fra tutte le piramidi triangolari regolari di superficie laterale S_l costante, qual è quella di volume massimo?* pag. 11
Fra tutte le piramidi a base quadrata, aventi superficie laterale costante S_l , determinare quella di volume massimo. pag. 13
Fra tutte le piramidi regolari di superficie laterale costante S_l determinare quella di volume massimo. pag. 13
7. *Fra tutte le piramidi regolari a base quadrata di dato volume V , determinare quella la cui area della superficie laterale è minima.* pag. 14
Fra tutte le piramidi regolari con N facce laterali di dato volume V , determinare quella la cui area della superficie laterale è minima. pag. 15
8. *Fra tutte le piramidi a base quadrata di volume V costante, determinare quella di superficie totale minima.* pag. 16
Fra tutte le piramidi regolari con N facce laterali e di volume V costante, determinare quella di superficie totale minima. pag. 16
9. *Determinare l'altezza del prisma di massimo volume inscritto in una piramide di base S e altezza h assegnate.* pag. 17
10. *Una piramide ha base quadrata di lato a e altezza h . A quale distanza dalla base si deve condurre un piano ad essa parallelo in modo che il prisma costruito proiettando la sezione ottenuta sul piano della base abbia superficie totale massima?* pag. 18
Determinare il prisma di massima superficie totale inscritto in una piramide con base regolare di lato a e altezza h assegnate. pag. 19

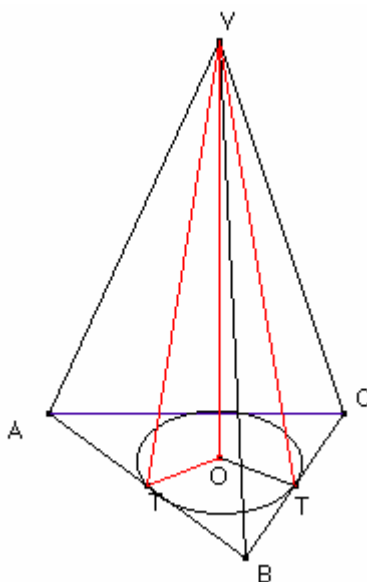
Introduzione

I problemi di Geometria Solida sono probabilmente i più difficili tra quelli che si presentano a uno studente delle scuole medie superiori. In parte, questa difficoltà è intrinseca a questo particolare settore della Matematica (intuire la soluzione di un problema in tre dimensioni è chiaramente più difficile che in due), in parte deriva dalle lacune stesse dell'insegnamento, che spesso trascura la Geometria Solida. Per poter impostare questo tipo di problemi basterebbero solo poche nozioni, essenzialmente per il calcolo di aree e volumi.

Per quanto riguarda **prismi e parallelepipedi** in particolare, non vi è difficoltà, dato che il volume del prisma è comunque dato dal prodotto della base per l'altezza. Questa regola si estende anche al prisma non retto, nel quale gli spigoli laterali non sono perpendicolari ai piani delle basi. Si applica anche al cilindro, che – intuitivamente – può essere pensato come un prisma avente come base un poligono regolare con infiniti lati.

Per la **piramide**, bisogna tener presente che molti problemi si riferiscono alla piramide *retta*, cioè tale che 1. il poligono di base è circoscritto a un cerchio; 2. la proiezione del vertice sul poligono di base coincide col centro del cerchio inscritto. La caratteristica della piramide retta è che tutte le facce laterali hanno la stessa altezza, la cui misura è detta *apotema* della piramide. Inoltre, per il *teorema delle tre perpendicolari*, le altezze delle facce laterali uniscono il vertice con i punti di contatto tra i lati della base e la circonferenza del cerchio inscritto nella base: perciò l'altezza h della piramide, le altezze delle facce laterali e il raggio r_b del cerchio inscritto nella base formano triangoli rettangoli congruenti con angolo retto nel centro del cerchio di base e ipotenusa equivalente all'apotema della piramide. Perciò, per la piramide retta, vale la relazione

$$a = \sqrt{r_b^2 + h^2}$$

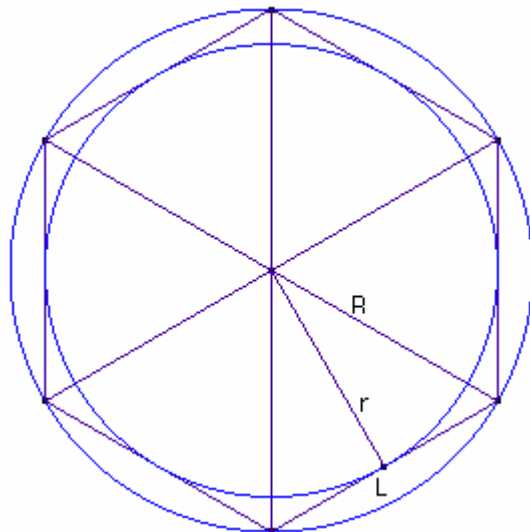


Se poi la piramide è anche *regolare*, cioè se è retta ed è regolare il poligono di base, le facce laterali sono triangoli isosceli e il raggio r_b del cerchio inscritto nel poligono di base coincide con l'apotema del poligono base. Per r_b vale la formula generale, riferita a un poligono di N lati ciascuno dei quali è uguale a L [“cot” = cotangente]

$$r_b = \frac{L}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{N}$$

(scomponiamo il poligono di base in N triangoli isosceli e dividiamoli con l'altezza in due triangoli rettangoli, aventi per cateti metà del lato L e l'altezza che misura r_b). La formula si

ottiene applicando il teorema dei triangoli rettangoli per il quale il rapporto tra i due cateti è uguale alla cotangente dell'angolo opposto al denominatore, che misura appunto $\frac{\pi}{N}$).



Per il triangolo equilatero si ottiene $r_b = \frac{1}{6}L\sqrt{3}$; per il quadrato, $r_b = \frac{L}{2}$; per l'esagono, $r_b = \frac{1}{2}L\sqrt{3}$. Se sostituiamo quest' ultima nella formula precedente abbiamo

$$a = \sqrt{\frac{L^2}{4} \cot^2 \frac{\pi}{N} + h^2}$$

Un'altra formula interessante è quella dell'area del poligono di base, in funzione del numero N dei lati, data da ($\cot = \cotangente$)

$$A_N = \frac{N}{4} L_N^2 \cot \frac{\pi}{N}$$

(infatti l'area è la somma delle aree di N triangoli isosceli ciascuna delle quali è data da $\frac{1}{2} \cdot L_N \cdot \frac{L_N}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{N}$ - vedi fig. precedente).

Si può anche considerare l'espressione $A_N = \frac{N}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{N}$ dove R è il raggio del cerchio *circoscritto* al poligono di base, che si giustifica tenendo presente la formula trigonometrica dell'area di un triangolo $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ dove a b sono due lati e γ è l'angolo compreso – in questo caso, $a = b = R$ e $\gamma = \frac{2\pi}{N}$.

Superficie laterale della piramide retta – è la somma delle aree delle facce laterali, ciascuna delle quali è data da $\frac{1}{2} \cdot L \cdot a$, per cui $S_L = \frac{NL}{2} \cdot a = p \cdot a$ dove p è il semiperimetro della base.

Volume

Una piramide (non necessariamente retta) è sempre equivalente alla terza parte di un prisma con la stessa base e la stessa altezza, per cui il volume di una piramide è sempre dato da

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_B h$$

Proporzioni tra segmenti, superfici, volumi di piramidi

Per tutte le piramidi vale inoltre il principio seguente.

In una piramide si distinguono *segmenti* (l'altezza della piramide, le altezze delle facce laterali, gli spigoli e in generale tutti i segmenti che possiamo definire in relazione alla piramide), superfici e volumi. Se una piramide $VA'B'C'$... è ottenuta da un'altra $VABC$... intersecandola con un piano parallelo alla sua base ABC ..., le basi ABC ... e $A'B'C'$ sono poligoni simili e sono simili le facce laterali appartenenti allo stesso piano; si può dimostrare che il rapporto tra i corrispondenti segmenti delle due piramidi è uguale al rapporto tra le rispettive altezze, che il rapporto tra superfici corrispondenti è uguale al quadrato del rapporto tra le rispettive altezze, e che il rapporto tra i volumi è il cubo del rapporto tra le rispettive altezze. Per segmenti corrispondenti intendiamo i segmenti VA , VA' , ecc; le altezze di facce appartenenti allo stesso piano, come VAB e $VA'B'$; i lati delle basi AB e $A'B'$ ecc.; per superfici corrispondenti, i poligoni ottenuti intersecando la piramide con piani paralleli alle basi, le facce laterali ecc.

Lo schema generale dei problemi di massimo/minimo implica la scelta di una incognita e richiede che altre grandezze vengano espresse rispetto a questa. Normalmente qualche elemento della figura deve essere costante (un segmento, l'area della superficie laterale o totale, il volume...) e questo fornisce la relazione che permette di esprimere le grandezze coinvolte nel problema in funzione dell'incognita. Nei problemi di Geometria Solida, questo elemento costante – specie se si tratta di una superficie, laterale o totale – stabilisce talvolta una equazione tra due *variabili iniziali* che permette anche di studiare i limiti della variabile scelta come incognita, altrimenti non facilmente deducibili da considerazioni geometriche immediate.

Problemi

1. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di altezza h e di superficie totale costante S , qual è quello di volume massimo?

Il problema ha senso solo se si assegna un vincolo come la superficie totale costante, altrimenti non vi è un solido di volume massimo, perché la base può avere un'area arbitrariamente grande. Dato che l'altezza è h , allora la superficie laterale è $2 \cdot (x + y) \cdot h$, dove x e y sono le dimensioni della base. Assumendo come incognita x una delle dimensioni della base, abbiamo i casi limite: limite inferiore $x = 0$ (base nulla, volume nullo); il limite superiore si deduce dalla formula seguente che fornisce la superficie totale in funzione delle dimensioni x e y della base, quando $y = 0$.

La superficie totale sarà $2xy + 2(x + y) \cdot h = S \Rightarrow$ ricaviamo y :

$$y = \frac{S - 2hx}{2(h + x)}$$

per cui il limite superiore della x , in base al criterio prima esposto, è dato da $x = \frac{S}{2h}$.

Si può notare come in questo caso i limiti possano essere completamente discussi solo *dopo* che un vincolo è stato espresso in funzione delle due variabili iniziali del problema, in modo che si possa risolvere una delle due in funzione dell'altra.

L'area della base è data da $xy = \frac{Sx - 2hx^2}{2(h + x)}$ ed è sufficiente che sia massima, dato che il volume,

in questo problema, è dato dal prodotto xyh e h è costante. La derivata dell'area di base è data da

$$\frac{2Sh + 2Sx - 8h^2x - 8hx^2 - 2Sx + 4hx^2}{4(h + x)^2} = \frac{S \cdot h - 4h^2x - 2hx^2}{2(h + x)^2} \quad \text{che si annulla per } x =$$

$$\frac{-2h^2 \pm \sqrt{4h^4 + 2h^2S}}{2h}; \quad \text{si considera solo la sol. positiva: } x = \frac{1}{2}\sqrt{2S + 4h^2} - h, \text{ che è un}$$

massimo essendo il numeratore positivo per x compreso tra le sue due radici e il denominatore sempre positivo.

In particolare, la soluzione corrisponde al cubo ($x = y = h$) se $S = 6h^2$. Infatti si ottiene

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{12h^2 + 4h^2} - h = 2h - h = h \quad \text{e} \quad y = \frac{6h^2 - 2h^2}{4h} = h.$$

Se si vuole che la soluzione sia il cubo di spigolo h , si deve quindi imporre nel testo $S = 6h^2$, e svolgendo i calcoli dall'inizio si ottiene direttamente l'equazione $2xy + 2(x + y) \cdot h = 6h^2$

da cui ricaviamo la y : $y = \frac{3h^2 - hx}{x + h}$ con il limite superiore $x = 3h$. Quindi l'area della

base sarà $A = \frac{3h^2 - hx}{x + h} \cdot x = h \frac{3hx - x^2}{x + h}$ la cui derivata

$$h \frac{(3h - 2x)(x + h) - 3hx + x^2}{(x + h)^2} = h \frac{3h^2 - x^2 - 2hx}{(x + h)^2} \quad \text{si annulla se } x = -h \pm \sqrt{h^2 + 3h^2} \text{ da}$$

cui accettiamo la soluzione positiva $x = h$. Si trova che anche $y = h$. Si tratta di un punto di massimo perché la parabola $y = -x^2 - 2hx + 3h^2$ rivolge la concavità verso il basso e quindi l'arco di ordinata positiva è compreso tra le due soluzioni, $-3h$ e h . Perciò la derivata prima è positiva per x compreso tra 0 e h e h si conferma come il punto di massimo. Quindi le tre dimensioni sono uguali e la soluzione è il cubo di spigolo h .

2. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli aventi per base un quadrato e di volume costante V , qual è quello di superficie totale minima?

Dette x e y le misure rispettive dello spigolo di base e dell'altezza, il volume è dato da $V = x^2 y$ e quindi $y = \frac{V}{x^2}$. In linea di massima nulla vieta che lo spigolo di base possa essere grande a piacere, quindi deve essere $x \geq 0$. La superficie totale sarà la somma delle due basi cioè $2x^2$ e delle facce laterali $4xy$, per cui $S = 2x^2 + 4 \cdot \frac{V}{x}$ la cui derivata $4x - 4 \cdot \frac{V}{x^2} = \frac{4(x^3 - V)}{x^2}$ si annulla se $x = \sqrt[3]{V}$. Il corrispondente valore di y è $\frac{V}{\sqrt[3]{V}^2} = \sqrt[3]{V} = x$, quindi la soluzione è un cubo. Che si tratti di un minimo è confermato dall'intervallo di positività della derivata prima, dato dalla disequazione $x > \sqrt[3]{V}$. Per x compreso tra 0 e $\sqrt[3]{V}$ la derivata è negativa e ciò conferma che si tratta di un punto di minimo.

Questo problema si può facilmente generalizzare a un *prisma retto* avente per base un poligono regolare di N lati, avente volume V costante.

Fra tutti i prismi retti aventi per base un poligono regolare e di volume costante V , qual è quello di superficie totale minima?

La superficie della base è data dalla formula (vedi pag. 3) che la esprime in funzione del numero N dei lati e della misura L_N di ogni lato:

$$A_N = \frac{N}{4} L_N^2 \cot \frac{\pi}{N} \quad \Rightarrow \quad \text{posto } L_N = x, \text{ abbiamo per la superficie totale}$$

$$S_N = 2A_N + S_L = \frac{N}{2} x^2 \cot \frac{\pi}{N} + Nxy \quad \text{essendo } y \text{ l'altezza del prisma, che ricaviamo in}$$

$$\text{funzione di } x \text{ in base al volume costante: } V = A_N \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = V \frac{4}{N \cdot \cot \frac{\pi}{N}} =$$

$\frac{4V}{Nx^2} \cdot \tan \frac{\pi}{N} = V \frac{K}{x^2}$ essendo K una costante $= \frac{4}{N} \tan \frac{\pi}{N}$; come nel caso precedente, non vi è alcun limite superiore alla misura x del lato di base.

La superficie totale è quindi data da $S = \frac{2}{K} x^2 + NVK \frac{1}{x}$ la cui derivata $\frac{4}{K} x - NVK \frac{1}{x^2}$ si annulla per $4x^3 - NVK^2 = 0$ cioè - esplicitando K e svolgendo i calcoli - per

$$x = \sqrt[3]{\frac{4V}{N} \tan^2 \frac{\pi}{N}}.$$

Nel caso iniziale, per cui $N = 4$, si ha $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ e quindi $x = \sqrt[3]{V}$. Se $N = 3$, abbiamo

$$x = \sqrt[3]{\frac{4V}{3} \cdot 3} = \sqrt[3]{4V}. \text{ Se } N = 6, \text{ si ottiene } x = \sqrt[3]{\frac{4V}{6} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2V}{9}}.$$

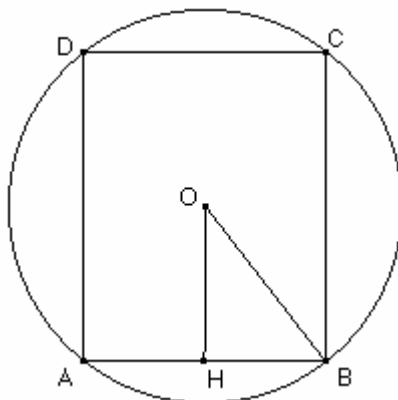
Si può ottenere il risultato per $N = 3$ anche direttamente:

$$S_B = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2, \quad S_T = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 3hx, \quad h = \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot x^2}, \text{ per cui}$$

$$S_T = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3 \cdot \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot x} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{4V\sqrt{3}}{x} \quad \text{la cui derivata si annulla se}$$

$$x^3\sqrt{3} - 4V\sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4V}.$$

3. *Fra tutti i prismi esagonali regolari inscritti nella medesima sfera di raggio di misura r , qual è quello di volume massimo?*



Sezione meridiana di un prisma esagonale regolare inscritto in una sfera; AB è un diametro del cerchio circoscritto alla base esagonale, BC e AD sono spigoli laterali opposti, $OB = r$, $HB = r_b$, $OH = x$

Il volume del prisma è il prodotto di base per altezza; conviene esprimere la superficie di base in funzione dell'altezza $h = 2x$, con $0 \leq 2x \leq 2r$. L'area dell'esagono inscritto in un cerchio di raggio r_b è uguale a $6 \cdot \frac{1}{2} r_b^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ (in quanto l'area di un triangolo isoscele inscritto in un cerchio di

centro O raggio r_b e angolo con vertice in O uguale a $\frac{\pi}{3}$ è data da $\frac{1}{2} r_b^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3}$) cioè a

$3 r_b^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il raggio del cerchio di base è dato da $r_b^2 = r^2 - x^2$ (vedi figura) e quindi

$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} (r^2 - x^2) \cdot 2x = 3\sqrt{3} \cdot (r^2 x - x^3)$. La derivata prima è $= 3\sqrt{3} (r^2 - 3x^2)$ e si annulla

per $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$, per cui l'altezza $2x$ è uguale a $\frac{2r}{\sqrt{3}}$. Lo studio del segno della derivata prima conferma che si tratta di un punto di massimo.

Si può notare che il problema non cambia se la base fosse un qualsiasi poligono regolare, come si vede in base al seguente problema

Fra tutti i prismi retti con base regolare inscritti nella medesima sfera di raggio di misura r , qual è quello di volume massimo?

Si può generalizzare il problema sin dall'inizio, assumendo che la base del prisma sia un poligono regolare di N lati. L'area di un poligono regolare di N lati è la somma delle aree di N triangoli isosceli di lato equivalente al raggio r_b del cerchio circoscritto al poligono; in base alla trigonometria possiamo scrivere che l'area di un singolo triangolo isoscele è $\frac{1}{2} r_b^2 \sin \frac{2\pi}{N}$ (vedi

formula a pag. 3) essendo $\frac{2\pi}{N}$ l'ampiezza dell'angolo opposto al lato di base. Tenendo presente

che il raggio di base r_b , l'altezza del prisma x e il raggio r della sfera ad esso circoscritta sono collegati dalla relazione (vedi fig. precedente) $r_b^2 = r^2 - x^2$, per l'area A_N della base otteniamo

$$A_N = \frac{N}{2} \cdot (r^2 - x^2) \cdot \sin \frac{2\pi}{N}$$

Il volume del prisma quindi è dato da

$$V = Nx \cdot (r^2 - x^2) \cdot \sin \frac{2\pi}{N} = N \cdot (r^2 x - x^3) \cdot \sin \frac{2\pi}{N}$$

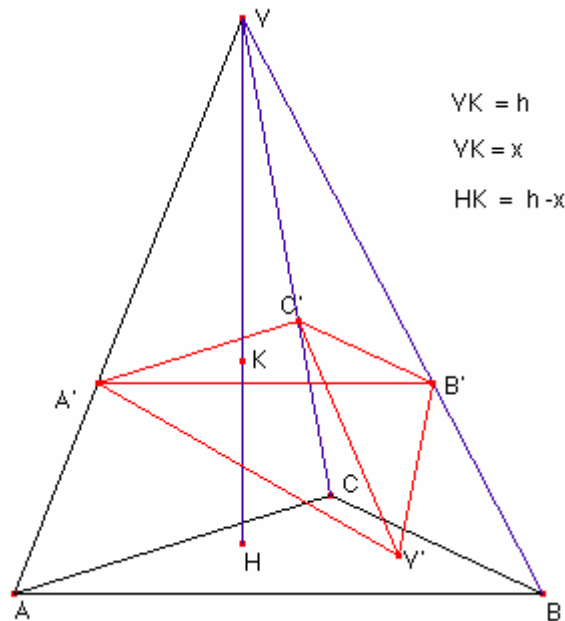
La derivata del volume è il prodotto di una costante moltiplicativa dipendente dal numero dei lati per un polinomio, che non contiene il numero dei lati; quindi il punto di massimo x_N è indipendente dal numero dei lati del poligono di base del prisma, ed è funzione solo della sua altezza.

4. *E' dato un tetraedro qualunque $VABC$; lo si tagli con un piano parallelo alla base ABC in modo che risulti massimo il tetraedro $V'A'B'C'$ avente per base la sezione determinata e il vertice V' in un punto qualunque della base del primo.*

Il volume del tetraedro è dato da $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ dove in questo caso S è l'area di $A'B'C'$ e h è la distanza tra i piani ABC e $A'B'C'$. Prendiamo come variabile incognita la distanza tra $A'B'C'$ e il vertice V . In base al principio per cui, se due piramidi hanno stesso vertice e spigoli laterali e le rispettive basi sono parallele, il rapporto tra le rispettive basi è uguale al rapporto tra i quadrati delle rispettive altezze. Indicando quindi con h e S la misura dell'altezza e della base rispettivamente del tetraedro $VABCD$, e con x e S' quelle di $VA'B'C'$, con $0 \leq x \leq h$, avremo $S' = S \cdot \frac{x^2}{h^2}$ e quindi, essendo l'altezza di $V'A'B'C'$ uguale a $h - x$, il volume cercato è

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{h^2} \cdot x^2 (h - x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{h^2} \cdot (hx^2 - x^3)$$

e la sua derivata (trascurando la costante) $2hx - 3x^2 = 0$ se $x = \frac{2}{3}h$, cioè se la distanza tra il piano $A'B'C'$ e il vertice V è i due terzi dell'altezza del tetraedro $VABCD$. (l'altra soluzione, $x = 0$, è un caso limite). La parabola $Y = 2hx - 3x^2$ ha la concavità rivolta verso il basso e quindi $Y > 0$ se $0 < x < \frac{2}{3}h$; quindi la soluzione trovata è un punto di massimo.



Osservazione importante. – La soluzione trovata per il tetraedro vale per qualsiasi piramide, perché basata sulla relazione di proporzionalità tra superficie della base e quadrato dell'altezza, che implica la formula risolvente $S' = S \cdot \frac{x^2}{h^2}$.

5. Determinare la piramide retta con base quadrata di volume massimo, avente la superficie totale di misura S costante.

In una piramide retta le altezze delle facce laterali sono tutte uguali all'apotema a , e la superficie totale è data dalla somma dell'area di base e della superficie laterale. Posto uguale a x lo spigolo della base, con $0 < x \leq \sqrt{\frac{S}{2}}$ (il caso limite superiore corrisponde all'altezza nulla della piramide, per cui l'area della superficie totale coincide con quella della base + quella della superficie laterale, che in questo caso tende a quella della base, dato che il vertice della piramide converge al centro della base, per cui al limite $S = 2x^2$), dobbiamo determinare la misura dell'altezza in funzione di x e di S . A questo scopo, osserviamo che l'apotema $a = \sqrt{x^2 + h^2}$ e $h = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$, quindi dobbiamo esprimere l'apotema in funzione di x e S ; per questo, consideriamo la superficie totale come $S = x^2$ (area di base) + $2ax$ (sup. laterale) \Rightarrow

$$a = \frac{S - x^2}{2x} \quad \text{e} \quad h = \sqrt{\frac{S^2 + x^4 - 2Sx^2}{4x^2} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S^2 - 2Sx^2}{x^2}}$$

$$\text{Il volume è dato da } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{\frac{S^2 - 2Sx^2}{x^2}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{S^2 x^2 - 2Sx^4}$$

Per il massimo trascuriamo $\frac{1}{6}$ ed eleviamo al quadrato, la derivata è $2S^2 x - 8Sx^3 = 0$ se

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm \sqrt{\frac{S}{4}} \quad \text{si prende solo la soluzione positiva, cioè } \frac{1}{2} \sqrt{S}.$$

Il segno della derivata è positivo se $S^2 - 4Sx^2 > 0$, cioè se $x < \frac{1}{2}\sqrt{S}$ [tener presente che $x > 0$].
Quindi si tratta di un punto di massimo.

Prendendo come variabile l'altezza x , avremmo dovuto considerare il lato di base l come seconda incognita e l'espressione della superficie totale diventa $S = l^2 + 2l \cdot \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}} = l^2 + \sqrt{4l^2x^2 + l^4}$; da questa relazione si ricava $l^2 \Rightarrow S - l^2 = \sqrt{4l^2x^2 + l^4} \Rightarrow$
 $S^2 + l^4 - 2Sl^2 = 4l^2x^2 + l^4 \Rightarrow l^2 = \frac{S^2}{4x^2 + 2S}$

Il volume è dato da $\frac{1}{3} \cdot \frac{S^2}{4x^2 + 2S} \cdot x$ la cui derivata $\frac{S^2}{3} \cdot \frac{(4x^2 + 2S) - 8x^2}{(4x^2 + 2S)^2}$ si annulla per

$S - 2x^2 = 0$, cioè $x = \sqrt{\frac{S}{2}}$, che dallo studio del segno risulta un punto di massimo.

L'apotema risulta essere $\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{S}{2} + \frac{S}{16}} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{S}$.

Determinare la piramide regolare di base triangolare e superficie totale costante S , avente volume massimo.

La soluzione di questo problema, nel caso in cui la base è un triangolo equilatero, è evidentemente analoga a quella della base quadrata. Detto x il lato di base, per i limiti della x valgono le considerazioni già ottenute prima, per cui $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{3}}}$, in quanto l'area della base è $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2$ e,

nel caso limite superiore, la superficie totale è il doppio di quella della base. Seguendo la stessa impostazione del problema precedente, per il volume V otteniamo la formula

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \cdot \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{12}}$ in quanto l'apotema del triangolo di base è $\frac{x\sqrt{3}}{6}$. Essendo

$S = \frac{3}{2}ax + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ si ottiene $a = \frac{2S}{3x} - \frac{\sqrt{3}}{6}x \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 \sqrt{\left(\frac{4S^2}{9x^2} + \frac{x^2}{12} - \frac{2S \cdot \sqrt{3}}{9}\right) - \frac{x^2}{12}}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{18} \sqrt{4S^2 \cdot x^2 - 2Sx^4} \cdot \sqrt{3}$ Elevando al quadrato, e trascurando la costante moltiplicativa, si

ottiene la derivata $8(S^2x - Sx^3 \cdot \sqrt{3})$ con la soluzione (diversa da $x = 0$) $x = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$.

Fra tutte le piramidi regolari di superficie totale S costante, determinare quella di volume massimo.

E' la generalizzazione al caso di una base di N lati dei due problemi precedenti.

Indicando con S_L e S_B rispettivamente la superficie laterale e quella di base, con x la misura del lato di base, con a l'apotema della piramide e con N il numero dei lati della base, abbiamo

$S_{TOT} = S_L + S_B$ e quindi, tenendo presente l'espressione $A_N = \frac{N}{4} L_N^2 \cot \frac{\pi}{N}$ valida per la superficie della base regolare di N lati, per cui $S_B = \frac{N}{4} x^2 \cot \frac{\pi}{N}$ da cui

$$S_{TOT} = \frac{N}{2} ax + \frac{N}{4} x^2 \cot \frac{\pi}{N} = \frac{N}{2} \cdot [ax + \frac{x^2}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{N}]$$

dalla quale ricaviamo $a = \frac{2}{N} \frac{S}{x} - \frac{x}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{N}$. Dall'apotema e dalla misura x del lato di base

$$\text{otteniamo l'altezza } h = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4} \cot^2 \frac{\pi}{N}} = \sqrt{\frac{4S^2}{N^2 x^2} - \frac{2S}{N} \cot \frac{\pi}{N}} =$$

$$\frac{1}{x} \sqrt{\frac{4S^2}{N^2} - \frac{2S}{N} \cdot x^2 \cdot \cot \frac{\pi}{N}} \text{ e quindi}$$

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{N}{4} x^2 \cot \frac{\pi}{N} \right) \cdot \frac{1}{x} \sqrt{\frac{4S^2}{N^2} - \frac{2S}{N} \cdot x^2 \cdot \cot \frac{\pi}{N}} = \frac{N}{12} \cot \frac{\pi}{N} \cdot \sqrt{\frac{4S^2}{N^2} x^2 - \frac{2S}{N} \cot \frac{\pi}{N} \cdot x^4}$$

la cui derivata, trascurando la costante moltiplicativa ed elevando al quadrato il radicale, diventa

$$8x \left(\frac{S^2}{N^2} - \frac{S}{N} \cot \frac{\pi}{N} \cdot x^2 \right) \text{ che uguagliata a } 0 \text{ fornisce per il punto di massimo } x = \sqrt{\frac{S}{N} \tan \frac{\pi}{N}}.$$

Per $N = 4$ si ottiene la soluzione già trovata prima, $x = \frac{1}{2} \sqrt{S}$.

6. *Fra tutte le piramidi triangolari regolari di superficie laterale S_l costante, qual è quella di volume massimo?*

Lo schema risolutivo del problema si basa sul calcolo del volume $V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$ [S_b è l'area del poligono di base, e h l'altezza della piramide] e sulla formula della superficie laterale, per la quale $S_l = a \cdot p$ [a è l'apotema della piramide e p la misura del semiperimetro del poligono di base. Si tenga presente che una piramide regolare è anche retta, per cui le altezze delle facce laterali sono tutte uguali all'apotema a della piramide]. Il valore costante della superficie laterale S_l implica che l'apotema a possa essere espressa in funzione del semiperimetro, secondo la formula $a = \frac{S_l}{p}$

ed essendo la base un poligono regolare abbiamo che p è la metà del numero dei lati di base per la loro misura comune, x ; nel nostro caso, otteniamo

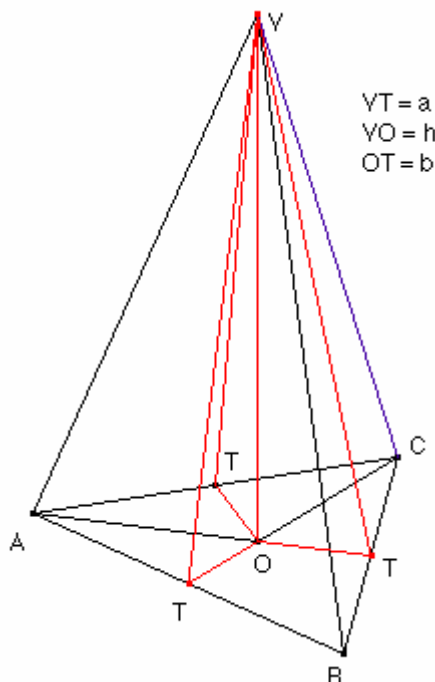
$$a = \frac{S_l}{\frac{3}{2}x} = \frac{2S_l}{3x}$$

Per poter risolvere il problema, dobbiamo trovare l'altezza della piramide, esprimendola in funzione dell'apotema a della piramide e dell'apotema b del poligono di base. Questo schema logico si può applicare in generale a tutti i problemi di questo tipo, purché la piramide sia regolare, a prescindere dal numero dei lati di base e delle facce laterali.

Infatti una piramide regolare è una piramide retta, per cui il centro O del cerchio inscritto nel poligono di base coincide con la proiezione ortogonale del vertice V della piramide sul piano di base, e le altezze delle facce laterali uniscono il vertice con i punti di tangenza T dei lati di base. Se la piramide è regolare, anche la base è un poligono regolare e l'apotema b del poligono di base è la misura comune dei segmenti che uniscono il centro O con i punti T . L'altezza h della piramide, le altezze delle facce laterali tutte uguali all'apotema a e le distanze tra il centro O della base e i lati

di base, tutte uguali all'apotema b della base, sono lati di triangoli rettangoli congruenti VOT nei quali l'apotema della piramide è la misura dell'ipotenusa; quindi otteniamo anche la relazione

$$h = \sqrt{a^2 - b^2} .$$



Il problema è risolto se esprimiamo b in funzione del lato di base x . Nel caso di un triangolo equilatero l'apotema b è un terzo dell'altezza (in quanto le altezze coincidono con le mediane) ed essendo l'altezza del triangolo $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ per il lato, otteniamo infine $b = \frac{\sqrt{3}}{6}x$. Quindi per l'altezza h otteniamo l'espressione

$$h = \sqrt{\frac{4S_l^2}{9x^2} - \frac{x^2}{12}}$$

Restano da analizzare i limiti sull'incognita x . Il limite inferiore è evidentemente 0. Il limite superiore si deduce dalla relazione $S_l = p \cdot a$ ed essendo a riducibile a zero, non vi è nessun limite superiore per il semiperimetro e quindi nemmeno per la misura x del lato di base.

Cerchiamo ora la formula del volume in funzione del lato di base x . Alle relazioni trovate prima, dobbiamo aggiungere l'espressione della superficie della base in funzione del lato x , che nel caso

del triangolo equilatero è metà del lato per l'altezza, cioè $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$. Infine per il volume abbiamo

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{4S_l^2}{9x^2} - \frac{x^2}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{\frac{4S_l^2 x^2}{9} - \frac{x^6}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{72} \cdot \sqrt{16S_l^2 \cdot x^2 - 3x^6}$$

che è massimo o minimo se lo è il suo quadrato, cioè – trascurando la costante moltiplicativa iniziale – il polinomio $16S_l^2 \cdot x^2 - 3x^6$. Derivando il polinomio si ottiene $32S_l^2 x - 18x^5 = 0$, cioè $x = 0$

che è un limite con volume nullo, e $x = \sqrt[4]{\frac{32}{18} \cdot S_l^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{S_l}$.

Si tratta di un punto di massimo, in quanto la derivata, scritta nella forma $2x(16S_l^2 - 9x^4)$ e quindi $2x(4S_l + 3x^2)(4S_l - 3x^2)$, è positiva se il fattore $4S_l - 3x^2 > 0$, in quanto sono positivi gli altri due (deve essere $x > 0$ per i limiti del problema). Questa disequazione è risolta nell'intervallo

compreso tra $-2\sqrt{\frac{S_l}{3}} < x < +2\sqrt{\frac{S_l}{3}}$ e quindi, essendo positiva per $x < +2\sqrt{\frac{S_l}{3}}$, si tratta di un punto di massimo.

Fra tutte le piramidi a base quadrata, aventi superficie laterale costante S_l , determinare quella di volume massimo.

L'impostazione è identica al problema precedente, salvo la misura dell'apotema, data dal rapporto tra S_l e il semiperimetro $2x$ della base, x è il lato di base: $a = \frac{S_l}{2x}$. Quindi l'altezza della

piramide è data da $h = \sqrt{a^2 - b^2}$ dove $b = \frac{x}{2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{S_l^2}{4x^2} - \frac{x^2}{4}}$, e data l'area della

base $S_b = x^2$ si ottiene $V = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\frac{S_l^2}{4x^2} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{6}\sqrt{S_l^2 \cdot x^2 - x^6}$. Seguendo il

solito metodo, eleviamo al quadrato e calcoliamo la derivata; otteniamo $2S_l^2x - 6x^5 = 0$ che, a

parte la soluzione $x = 0$, fornisce $x = \sqrt[4]{\frac{S_l^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{S_l}$

Cerchiamo ora di generalizzare questo problema a una piramide regolare con un numero N di facce laterali

Fra tutte le piramidi regolari di superficie laterale costante S_l determinare quella di volume massimo

Questo problema può essere risolto nel caso generale di una piramide regolare, se si riesce a trovare una formula universale per il volume di una piramide regolare di N facce laterali. Generalizziamo il metodo già applicato per la base triangolare e quadrata.

Indicando con x_N il lato del poligono di base, dobbiamo calcolare in funzione di x_N l'altezza della piramide, che è il cateto di un triangolo rettangolo avente come ipotenusa e altro cateto rispettivamente l'apotema della piramide a e l'apotema del poligono di base, b (si tenga presente che una piramide regolare è una piramide retta, per cui il centro O del cerchio inscritto nel poligono di base coincide con la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base, e l'apotema della piramide unisce il vertice con i punti di tangenza T dei lati di base. Se la piramide è regolare, anche la base è un poligono regolare e l'apotema del poligono di base è la misura dei segmenti che uniscono il centro O con i punti T). Per prima cosa ricaviamo l'apotema in funzione del lato di base.

Dalla formula $S_L = \frac{N}{2}x_N \cdot a_N$ si ottiene immediatamente $a_N = \frac{2S_L}{N} \cdot \frac{1}{x_N}$.

La formula generale per x_N è $d \cdot \sin \frac{\pi}{N}$ dove d è il diametro del cerchio che circoscrive il

poligono di base, e l'apotema b del poligono di base è $\frac{1}{2} \cdot x_N \cdot \cot \frac{\pi}{N}$ (in quanto l'angolo al centro

opposto al lato x_N è $\frac{2\pi}{N}$). Nel caso di un triangolo equilatero, si ottiene $b = x \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Quindi l'altezza è data da $h = \sqrt{\frac{4S_L^2}{N^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \cdot \cot^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot x^2} = \frac{1}{2Nx} \sqrt{16S_L^2 - N^2 \cot^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot x^4}$

E per l'area della base abbiamo $A_N = \frac{N}{2} \cdot x_N \cdot \frac{1}{2} \cdot x_N \cdot \cot \frac{\pi}{N} = \frac{N}{4} \cdot x^2 \cot \frac{\pi}{N}$, da cui si ottiene

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{4} \cdot x^2 \cot \frac{\pi}{N} \cdot \frac{1}{2Nx} \sqrt{16S_L^2 - N^2 \cot^2 \left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot x^4} \quad \text{da cui}$$

$$V = \frac{1}{24} \cdot \cot \frac{\pi}{N} \cdot x \sqrt{16S_L^2 - N^2 \cot^2 \frac{\pi}{N} \cdot x^4}$$

Per trovare il massimo, si può calcolare la derivata di $16S_L^2 \cdot x^2 - N^2 \cot^2 \frac{\pi}{N} \cdot x^6 =$

$$2x \cdot (16S_L^2 - N^2 \cot^2 \frac{\pi}{N} \cdot 3x^4) \quad \text{con la soluzione } x = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{\frac{S_L}{N \cot \frac{\pi}{N}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{\frac{S_L}{N} \cdot \tan \frac{\pi}{N}}$$

(in base al principio che il massimo di una quantità positiva è quello del suo quadrato, trascurando eventuali costanti moltiplicative).

Nel caso della base triangolare, abbiamo $x_3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{S_L}{3}}$ e $a_3 = \frac{2S_L}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{S_L}} = \sqrt{\frac{S_L}{3}}$.

Si può notare che il rapporto $\frac{x_3}{a_3} = 2$, cioè il lato di base è doppio dell'apotema.

Se la base è un quadrato, si ottiene $x_4 = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{\frac{S_L}{4 \cot g \frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{S_L}}{\sqrt[4]{3}}$.

7. *Fra tutte le piramidi regolari a base quadrata di dato volume V , determinare quella la cui area della superficie laterale è minima.*

Esprimiamo la superficie laterale S_l in funzione del lato di base x e dell'apotema a . La superficie laterale è la somma delle aree di triangoli isosceli, cioè la somma dei prodotti della metà dei lati per le altezze, che sono tutte uguali all'apotema, essendo la piramide a base quadrata una piramide retta. Si ottiene $S_l = 2 x a$, cioè il semiperimetro di base x l'apotema. Per calcolare a , consideriamo il volume, che consente di esprimere l'altezza h in funzione del lato di base. Dalla relazione $V =$

$$\frac{1}{3} S_b h \quad \text{con } S_b = x^2, \quad \text{ricaviamo } h = \frac{3V}{x^2} \quad \text{e quindi l'apotema } a = \sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{9V^2}{x^4}} =$$

$$\frac{1}{2x^2} \sqrt{x^6 + 36V^2} \Rightarrow S_l = \sqrt{\frac{x^6 + 36V^2}{x^2}} \quad \text{per calcolarne la derivata, eleviamo al quadrato. La}$$

$$\text{derivata del radicando è } \frac{6x^7 - 2x^7 - 72V^2 x}{x^4} = \frac{4x^6 - 72V^2}{x^3} \quad \text{che si annulla per } x = \sqrt[6]{18V^2} =$$

$$\sqrt[6]{18} \cdot \sqrt[3]{V} = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{3V}. \quad \text{Per il corrispondente valore di } h, \text{ si trova } h = \frac{3V}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{V^2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{3V}}{\sqrt[3]{2}}. \quad \text{Si può notare che il rapporto tra il lato di base e l'altezza corrispondenti al massimo è}$$

$$\text{uguale a } \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Anche questo problema ammette generalizzazione al caso di un poligono di base regolare di lato x .

Fra tutte le piramidi regolari con N facce laterali di dato volume V , determinare quella la cui area della superficie laterale è minima.

Come prima, ricaviamo l'altezza h della piramide e poi l'apotema a in funzione del lato di base x . In base alla formula di pag. 3 per la quale $A_N = \frac{N}{4} L_N^2 \cot \frac{\pi}{N}$ che con $L_N = x$, abbiamo

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_N \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{\frac{N}{4} x^2 \cot \frac{\pi}{N}} = V \frac{12 \cdot \tan \frac{\pi}{N}}{N} \cdot \frac{1}{x^2} = 12 V K \frac{1}{x^2} \quad \text{dove la}$$

costante $K = \frac{\tan \frac{\pi}{N}}{N}$. Quindi dalla relazione (pag. 3) $a = \sqrt{\frac{L^2}{4} \cot^2 \frac{\pi}{N} + h^2}$

otteniamo $a = \sqrt{\frac{x^2}{4} \cot^2 \frac{\pi}{N} + h^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{4} \cot^2 \frac{\pi}{N} + 144 \cdot V^2 \frac{\tan^2 \frac{\pi}{N}}{N^2} \cdot \frac{1}{x^4}}$

moltiplicando l'apotema per il semiperimetro di base $\frac{N}{2}x$ otteniamo

$$S_L = \frac{N}{2} x \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} \cot^2 \frac{\pi}{N} + 144 \cdot V^2 \frac{\tan^2 \frac{\pi}{N}}{N^2} \cdot \frac{1}{x^4}} = \frac{N}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4} \cot^2 \frac{\pi}{N} + 144 V^2 \frac{\tan^2 \frac{\pi}{N}}{N^2} \cdot \frac{1}{x^2}} ;$$

conviene calcolare la derivata del quadrato di S_L : $\frac{N^2}{4} \cdot [x^3 \cot^2 \frac{\pi}{N} - 288 \cdot V^2 \cdot \frac{\tan^2 \frac{\pi}{N}}{N^2} \cdot \frac{1}{x^3}]$

che si annulla se $x^6 = \frac{288 \cdot V^2}{N^2} \cdot \tan^2 \frac{\pi}{N} : \cot^2 \frac{\pi}{N} = \frac{288 \cdot V^2}{N^2} \cdot \tan^4 \frac{\pi}{N} \Rightarrow x =$

$\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{12V}{N} \cdot \tan^2 \frac{\pi}{N}}$ che, per $N = 4$, conduce a $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{V}}$. Nel caso $N = 3$, si ottiene $x = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{12V}$.

8. *Fra tutte le piramidi a base quadrata di volume V costante, determinare quella di superficie totale minima.*

Assumiamo come incognita il lato della base x , con il limite inferiore $x = 0$ - non esiste un limite superiore, in quanto il volume dipende dal prodotto della base per l'altezza, e se l'area della base tende all'infinito per mantenere il volume costante si fa tendere a zero l'altezza.

Dal volume $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$ possiamo esprimere l'altezza h in funzione del volume e della

superficie di base, che evidentemente è $S_b = x^2$, per cui $h = \frac{3V}{x^2}$. La superficie totale è data

dalla somma della base e della superficie laterale S_l , per cui dobbiamo trovare una formula per la

superficie laterale: dato che tutte le facce laterali sono uguali, abbiamo $S_l = a \cdot p$ dove a è l'apotema della piramide e p il semiperimetro, uguale a $2x$. L'apotema si calcola applicando il Teorema di Pitagora al triangolo VOT dove V è il vertice della piramide, O la proiezione di V sulla base e T uno qualsiasi dei punti di contatto tra lato di base e circonferenza inscritta nel

poligono base; quindi abbiamo
$$a = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{9V^2}{x^4}} \Rightarrow$$

$$S_l = 2x \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{9V^2}{x^4}} = \sqrt{x^4 + \frac{36V^2}{x^2}} \text{ e quindi per la superficie totale abbiamo}$$

$$S = x^2 + \sqrt{x^4 + \frac{36V^2}{x^2}}, \text{ la cui derivata è } 2x + \frac{x}{2\sqrt{x^6 + 36V^2}} \cdot (4x^3 - \frac{72V^2}{x^3}) =$$

$$x \cdot \left(2 + \frac{2x^6 - 36V^2}{x^3 \sqrt{x^6 + 36V^2}}\right) = \frac{2x^3 \cdot \sqrt{x^6 + 36V^2} + 2x^6 - 36V^2}{x^2 \sqrt{x^6 + 36V^2}}$$

Separando il radicale nel numeratore e quadrando si ottiene

$$x^{12} + 36V^2 x^6 = x^{12} - 36V^2 x^6 + 324V^4 \Rightarrow x^6 = \frac{9}{2} \cdot V^2 \Rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt[3]{V} \text{ che è}$$

un punto di minimo in quanto la disequazione $x^6 > \frac{9}{2} \cdot V^2$ è risolta se $x > \sqrt[6]{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt[3]{V}$.

Fra tutte le piramidi regolari con N facce laterali e di volume V costante, determinare quella di superficie totale minima.

La superficie della base è data dalla formula generale $S_b = \frac{N}{4} x^2 \cot \frac{\pi}{N}$, nella quale x è la misura incognita del lato di base. La superficie totale è la somma della superficie di base e di quella laterale, data da $S_l = \frac{1}{2} N x a$ dove a è l'apotema. Quest'ultima è collegata all'altezza h e

all'apotema del poligono di base b dalla relazione $a = \sqrt{h^2 + b^2}$ nella quale $b = \frac{x}{2} \cot \frac{\pi}{N}$

mentre h si ricava dal volume e dalla superficie di base: $h = \frac{3V}{S_b} = \frac{12V}{Nx^2} \cdot \tan \frac{\pi}{N}$ quindi

$$a = \sqrt{\frac{144V^2}{N^2 x^4} \cdot \tan^2 \frac{\pi}{N} + \frac{x^2}{4} \cdot \cot^2 \frac{\pi}{N}} \quad \text{per cui}$$

$$S_T = \frac{N}{4} x^2 \cot \frac{\pi}{N} + \sqrt{\frac{36V^2}{x^2} \tan^2 \frac{\pi}{N} + \frac{N^2 x^4}{16} \cdot \cot^2 \frac{\pi}{N}}$$

Scriviamola come $Ax^2 + \sqrt{\frac{B}{x^2} + A^2 x^4}$; la derivata è $2Ax + \frac{-\frac{2B}{x^3} + 4A^2 x^3}{2 \cdot \sqrt{\frac{B}{x^2} + A^2 x^4}} =$

$$2Ax - \frac{B - 2A^2 x^6}{x^2 \cdot \sqrt{B + A^2 x^6}} = x \left[2A - \frac{B - 2A^2 x^6}{x^3 \cdot \sqrt{B + A^2 x^6}} \right] = 0 \text{ se } x = 0 \text{ o se}$$

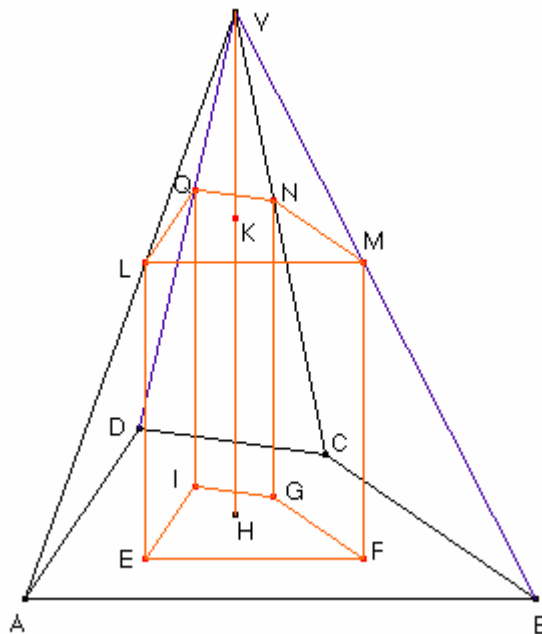
$$2A - \frac{B - 2A^2 x^6}{x^3 \cdot \sqrt{B + A^2 x^6}} = 0 \quad \text{poniamo } x^3 = z, \text{ si ottiene } 2Az\sqrt{B + A^2 z^2} = B - 2A^2 z^2 \Rightarrow$$

$$4A^2 B z^2 + 4A^4 z^4 = B^2 + 4A^4 z^4 - 4A^2 B z^2 \Rightarrow 8A^2 B z^2 - B^2 = 0 \Rightarrow z = \sqrt{\frac{B}{8A^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{36V^2 \tan^2 \frac{\pi}{N}}{8 \cdot \frac{N^2}{16} \cdot \cot^2 \frac{\pi}{N}}} \Rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{72V^2 \cdot \tan^4 \frac{\pi}{N}}{N^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \tan^2 \frac{\pi}{N}}{N}}$$

9. Determinare l'altezza del prisma di massimo volume inscritto in una piramide di altezza h e base S assegnate.

Data una piramide $VABCD$ (la base può essere un poligono qualsiasi) di altezza h e base S , intersechiamola con un piano parallelo al poligono di base, ottenendo i punti $L M N O \dots$ vertici di un poligono simile a quello della base. Definiamo in questo modo un prisma $LMNO \dots EFGI$ avente come base inferiore la proiezione ortogonale di $LMNO$ sul piano della base della piramide.



Un piano che intersechi tutti gli spigoli laterali di una piramide separa un tronco di piramide e una piramide simile a quella data, nel senso che i due solidi hanno in proporzione gli spigoli corrispondenti, hanno in comune gli angoli diedri e appartengono allo stesso angoloide. In particolare, nelle due piramidi possiamo riconoscere *segmenti corrispondenti* (altezze delle due piramidi, altezze delle facce laterali, spigoli, lati dei poligono di base), *superfici corrispondenti* (facce laterali, poligoni di base) e *volumi*. Si può dimostrare in generale che *il rapporto tra due segmenti corrispondenti è uguale al rapporto tra le rispettive altezze*. Dato che il rapporto tra le superfici di poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto tra lati corrispondenti, si conclude che *il rapporto tra facce corrispondenti e quello tra i poligoni di base è uguale al quadrato del rapporto tra le rispettive altezze*. Dette quindi S e S' le aree dei poligoni di base, rispettivamente

Ezio Fornero – Il problema classico di geometria – 17/19

<http://www.superzeko.net> – Per espressa volontà dell'autore, questo testo è liberamente utilizzabile per fini personali o didattici.

Qualora tuttavia dovesse essere riprodotto su un sito web o in una pubblicazione, si prega di citare la fonte.

della piramide maggiore e di quella minore, e h e h' le rispettive altezze, abbiamo la proporzione

$$\frac{S'}{S} = \frac{h'^2}{h^2}$$

Se indichiamo con x l'altezza della piramide minore $VLMNO...$ abbiamo quindi, per l'area delle basi del prisma inscritto, la formula $S' = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$ e quindi il **volume del prisma** è dato da

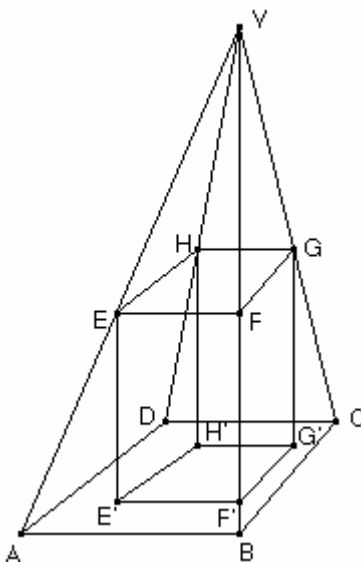
$$V = S' \cdot (h - x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h - x)$$

Questa formula non dipende dalla forma della piramide, ma solo dalla misura della superficie del poligono di base. Invece, eventuali problemi sulla superficie laterale o totale del prisma implicherebbero informazioni sul poligono di base (almeno sulla misura del perimetro).

L'espressione ottenuta è identica a quella del cilindro inscritto in un cono, dato che in termini intuitivi possiamo immaginare cilindro e cono come prisma e piramide avente come perimetro della base delle circonferenze.

Il **prisma di volume massimo** quindi corrisponde a $x = \frac{2}{3}h$, per cui *la sua altezza è un terzo di quella della piramide in cui è inscritto.*

10. Una piramide ha base quadrata di lato a e altezza h . A quale distanza dalla base si deve condurre un piano ad essa parallelo in modo che il prisma costruito proiettando la sezione ottenuta sul piano della base abbia superficie totale massima?



Il principio è che le aree di $EFGH$ e di $ABCD$ sono proporzionali ai quadrati delle rispettive distanze dal vertice. Se l'incognita x è l'altezza del prisma, con i limiti $0 \leq x \leq h$, dalla proporzione generale $S_x : S_b = (h - x)^2 : h^2$ dove S_x denota la superficie delle basi del prisma deduciamo $S_x = \frac{S_b}{h^2} \cdot (h - x)^2$ e quindi $S_x = \frac{a^2}{h^2} (h - x)^2$. La superficie laterale si calcola tenendo conto che le misure dei segmenti corrispondenti di due piramidi appartenenti allo stesso

angoloide sono proporzionali alle rispettive altezze, per cui il lato y delle basi del prisma è dato da $y : a = (h - x) : h \Rightarrow y = \frac{a}{h}(h - x)$ e quindi la superficie laterale S_l è $4yx =$

$4\frac{a}{h}x \cdot (h - x)$. La superficie totale è $S = 2S_b + S_l$ è quindi

$$S = 2\frac{a^2}{h^2}(h - x)^2 + 4\frac{a}{h}x(h - x)$$

La cui derivata si annulla per $-2\frac{a^2}{h^2} \cdot 2(h - x) + 4\frac{a}{h}(h - x) - 4\frac{a}{h}x = 0$, cioè $(1 - \frac{a}{h}) \cdot (h - x) - x =$

$0 \Rightarrow (\frac{a}{h} - 2)x - a + h = 0$ e quindi $x = \frac{h(a - h)}{a - 2h}$. Questo risultato esige però una

discussione relativa sia alla posizione del numero $\frac{h(a - h)}{a - 2h}$ rispetto agli estremi 0 e h , sia alla sua natura come punto di massimo o di minimo.

Se $a > 2h$, la derivata è positiva per $x > \frac{h(a - h)}{a - 2h}$ e quindi si tratta di un minimo *esterno ai*

limiti in quanto $2h > h$ implica $\frac{a - h}{a - 2h} > 1$: il massimo effettivo in questo caso corrisponde a $x = 0$, essendo la funzione S decrescente in tutto l'intervallo $0 \leq x \leq h$.

Se $2h > a > h$, la derivata è positiva se $x < \frac{h(a - h)}{a - 2h}$; inoltre, $\frac{h(a - h)}{a - 2h} < 0$ e quindi si ha un massimo *esterno ai* limiti; il massimo effettivo è di nuovo in $x = 0$, essendo S di nuovo decrescente in tutto l'intervallo $[0; h]$.

Se $a = h$, il massimo si ha ancora in $x = 0$.

Se $a < h$, la frazione $\frac{h(a - h)}{a - 2h}$ è positiva ed è $< h$ e si tratta ancora di un punto di massimo, ma *interno* all'intervallo $[0; h]$.

Il metodo risolutivo è lo stesso anche nel caso in cui la piramide ha per base un poligono regolare di N lati uguali ad a , solo che la formula della superficie laterale è $S_l = N \cdot \frac{a}{h}x \cdot (h - x)$, e la

superficie della base – in base alla solita formula generale per cui vale $\frac{N}{4}L_N^2 \cot \frac{\pi}{N}$ per un

poligono regolare di N lati - è $S_b = \frac{N}{4} \cot \frac{\pi}{N} \cdot \frac{a^2}{h^2}(h - x)^2$. Perciò la superficie totale sarà

$$\frac{N}{2} \cot \frac{\pi}{N} \cdot \frac{a^2}{h^2}(h - x)^2 + N \cdot \frac{a}{h}x \cdot (h - x).$$