

# PROBLEMI SULLE FIGURE CIRCOSCRITTE A UN CERCHIO O A UNA SFERA

*di Ezio Fornero*

## Indice dei problemi

### **Triangolo rettangolo circoscritto a un cerchio di raggio assegnato**

*Determinare le misure dei cateti del triangolo sapendo l'ipotenusa "a".*

*Determinare le misure dei lati del triangolo rettangolo circoscritto sapendo che l'area è uguale a  $kr^2$*

*Determinare i lati sapendo che il perimetro è  $kr$*

### **Triangolo isoscele circoscritto a un cerchio di raggio assegnato**

*Determinare l'altezza e la base del triangolo isoscele circoscritto a un cerchio di raggio 'r' sapendo il lato obliquo 'l'*

*Determinare altezza e base del triangolo isoscele circoscritto sapendo il perimetro o l'area*

*Determinare il lato del triangolo equilatero circoscritto a un cerchio di raggio 'r'*

### **Triangolo isoscele circoscritto a un semicerchio di raggio 'r'**

*Determinare il triangolo isoscele circoscritto a un semicerchio di perimetro assegnato*

*Determinare il triangolo isoscele di area assegnata  $kr^2$  circoscritto a un semicerchio.*

### **Trapezio isoscele circoscritto a un cerchio di raggio r assegnato**

*Determinare le misure dei lati di un trapezio isoscele di perimetro  $2p$  assegnato circoscritto a un cerchio*

*Determinare le misure dei lati di un trapezio isoscele di area  $kr^2$  circoscritto a un cerchio.*

### **Trapezio isoscele circoscritto a un semicerchio di raggio assegnato**

*Determinare i lati del trapezio isoscele di dato perimetro  $2p$  circoscritto a un semicerchio di raggio r*

*Determinare il trapezio isoscele di area assegnata  $kr^2$  circoscritto a un semicerchio di raggio r*

*Determinare i lati del trapezio isoscele di lato obliquo "l" circoscritto a un semicerchio di raggio r*

### **Trapezio rettangolo circoscritto a un cerchio di raggio assegnato**

*Determinare i lati di un trapezio rettangolo di perimetro  $2p$  circoscritto a un cerchio di raggio r.*

*Determinare i lati di un trapezio rettangolo di area assegnata circoscritto a un cerchio di raggio r*

### **Trapezio rettangolo circoscritto a un semicerchio di raggio assegnato**

*Determinare i lati del trapezio rettangolo di perimetro  $2p$  circoscritto a un semicerchio*

### **Appendice – le discussioni grafiche**

## Premessa algebrica

Molti problemi su figure circoscritte a un cerchio di raggio assegnato si risolvono con due incognite,  $x$  e  $y$ , che rappresentano lunghezze di lati incogniti. Uno dei sistemi algebrici classici che risolvono problemi di questo tipo è il sistema

$$\begin{cases} x + y = l \\ xy = a \end{cases} \quad \text{dove } l \text{ rappresenta una lunghezza costante e } a \text{ un'area (perché è un prodotto di lunghezze).}$$

Per esempio, se si chiede di determinare i cateti di un triangolo rettangolo sapendo la loro somma e l'area del triangolo, il sistema che traduce il problema è proprio di quel tipo.

La soluzione di questo sistema può trovarsi facilmente esprimendo  $y$  in funzione di  $x$  o viceversa nella seconda equazione, ma si può ottenere anche in base al teorema per cui la somma delle soluzioni di un'equazione di secondo grado del tipo

$$z^2 + bz + c = 0$$

è data da  $-b$ , mentre il prodotto è uguale a  $c$ . Quindi, risolvendo l'equazione

$$z^2 - lz + a = 0$$

si ottengono  $x$  e  $y$ , nella forma  $\frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4a}}{2}$ . Si tenga presente che questo sistema – e quelli che prenderemo in

considerazione – sono *simmetrici* cioè non cambiano scambiando le lettere  $x$  e  $y$ .

Quindi, risolvendo rispetto a una delle due incognite, si trovano anche i valori dell'altra. Ciò significa che, risolvendo p.es. l'incognita  $x$ , le soluzioni  $x_1$  e  $x_2$  sono valori possibili per entrambe le incognite; quindi, se  $x = x_1$ , abbiamo  $y = x_2$ , e viceversa.

In alternativa, si può ricavare  $y$  in funzione di  $x$  dall'equazione lineare:  $y = l - x$  e sostituire nella seconda, ottenendo

$$lx - x^2 = a \Rightarrow x^2 - lx + a = 0,$$

che è l'equazione ottenuta prima.

Il sistema 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b \\ xy = a \end{cases}$$
 si riconduce al precedente, con la sostituzione 
$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 2a$$
 da cui otteniamo

$$\begin{cases} x + y = \pm \sqrt{b + 2a} \\ xy = a \end{cases}$$

È facile riconoscere in questo secondo sistema l'applicazione del teorema di Pitagora – supponendo che  $x$  e  $y$  siano cateti di un triangolo rettangolo, mentre  $xy$  è il doppio dell'area.

Si può anche ricavare la  $y$  in funzione di  $x$  dalla seconda equazione, ottenendo  $y = \frac{a}{x}$ ; sostituendo nella prima,

abbiamo 
$$x^2 + \frac{a^2}{x^2} = b \Rightarrow x^4 - bx^2 + a^2 = 0$$
 con le soluzioni  $x = \pm \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}}$ .

Nei problemi di Geometria però le soluzioni sono positive (perché denotano lunghezze) e quindi si prende solo il segno positivo.

Anche il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \quad \text{può essere ricondotto al primo, con la trasformazione}$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2xy \quad \text{da cui si deduce il sistema}$$

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2xy = a^2 - b \end{cases}$$

Si può ottenere la soluzione anche ricavando  $y$  dalla prima equazione, e sostituendo nella seconda:

$$y = a - x \Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b^2 \Rightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$$

$$\text{con le soluzioni } x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}$$

I problemi sulle figure circoscritte hanno un notevole interesse, perché in generale presentano un grado di difficoltà superiore a quelli sulle figure inscritte, ma soprattutto perché la loro risoluzione passa, nei casi più significativi per chi intenda apprendere la Matematica, attraverso l'impostazione di sistemi in due incognite del genere sopra esaminato.

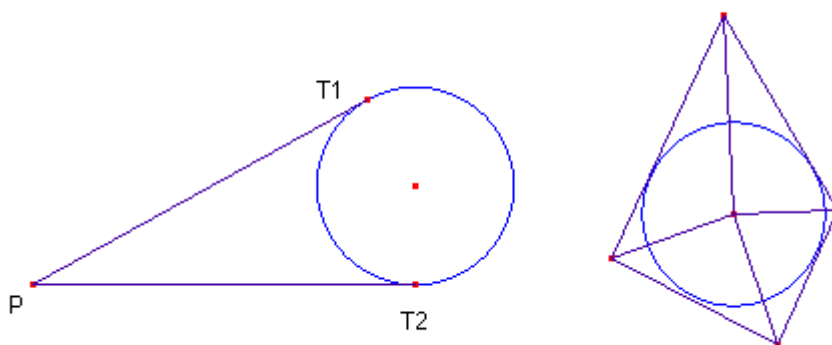
Chi studia la Matematica – e, in generale, le materie scientifiche – dovrebbe imparare a distinguere tra *problemi che si risolvono mediante schemi risolutivi* (e che hanno un carattere fortemente algoritmico) e *problemi per i quali non è dato a chi tenta di risolverlo uno schema risolutivo a priori*. La conoscenza personale della materia, almeno in una certa misura, consiste nel ridurre l'estensione della seconda classe di problemi a favore della prima. Perciò è essenziale che il discente – e il docente – siano consapevoli della strutturazione secondo schemi generali contenenti parametri, la cui variabilità è quindi inessenziale alla ricerca della risoluzione, essendo questa dipendente solo dallo schema, e non dai numeri che il problema fornisce come dati.

### Premessa geometrica

I poligoni circoscritti a un cerchio godono di due proprietà fondamentali:

- i segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una crf sono congruenti
- l'area di un poligono circoscritto a un cerchio è data dal prodotto del raggio per il semiperimetro

Questa seconda proprietà deriva dal fatto che, unendo i vertici del poligono col centro del cerchio in esso inscritto, il poligono è suddiviso in triangoli le cui basi sono tangenti al cerchio, da cui deriva che i raggi congiungenti il centro con i punti di tangenza sono le altezze.



## Limiti

In tutti i problemi di Geometria le grandezze incognite e gli eventuali parametri soddisfano delle limitazioni (p.es. devono essere positive), che possono essere

a) limiti *geometrici* delle incognite. Nelle figure circoscritte, generalmente una lunghezza non ha limite superiore, ma ci deve essere un limite inferiore (di solito, 0) che non è, di solito, un *minimo*, nel senso che detto limite inferiore non corrisponde a una costruzione possibile.

b) limiti *aggiunti* di tipo algebrico. Sono limiti non deducibili da considerazioni geometriche. P.es. risolvendo un'equazione del tipo  $\sqrt{f(x)} = g(x)$ , il limite algebrico derivante dalla condizione  $g(x) \geq 0$  non coincide generalmente con limitazioni geometriche.

c) limiti dei parametri. Se una grandezza è soluzione di un'equazione parametrica di secondo grado, il discriminante deve essere positivo o nullo; ciò può implicare una limitazione ai valori del parametro. Tuttavia, considerazioni algebriche di questo tipo non sono generalmente sufficienti per determinare i limiti di eventuali parametri, che possono essere determinati mediante la *discussione* del problema.





casi particolari : se l'ipotenusa vale  $5r$ , abbiamo 
$$\frac{5r + 2r \pm \sqrt{25r^2 - 20r^2 - 4r^2}}{2} = \begin{cases} \frac{7r+r}{2} = 4r \\ \frac{7r-r}{2} = 3r \end{cases}$$

se i cateti sono uguali, deve essere  $a^2 - 4ar - 4r^2 = 0 \Rightarrow a = 2r \pm \sqrt{4r^2 - 4r^2} = 2r$   
e quindi  $x = y = r\sqrt{2}$

NOTA – si poteva giungere al sistema anche in base alla regola per cui l'area di un poligono circoscritto a un cerchio è data dal prodotto del raggio per il semiperimetro. Poiché in un triangolo rettangolo il prodotto dei cateti  $xy$  è il doppio dell'area, deve essere  $xy =$  al perimetro per il raggio, cioè

$$xy = r(x + y + a)$$

che può essere messa a sistema con l'equazione

$$x + y = a + 2r.$$

**Determinare le misure dei lati del triangolo rettangolo circoscritto sapendo che l'area è uguale a  $k r^2$**  (la formulazione del problema esprime il fatto che l'area è il quadrato di una lunghezza)

L'area può essere calcolata come semiprodotto dei cateti o come prodotto del semiperimetro per il raggio del cerchio inscritto nel triangolo.

Abbiamo quindi due espressioni per il doppio dell'area:

$$\begin{cases} xy = 2kr^2 \\ xy = (x + y + \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot r \end{cases}$$

La risoluzione di questo sistema è una questione di impostazione tecnica. Conviene, usando anche la prima equazione, isolare il radicale della seconda equazione. Abbiamo i seguenti passaggi

$$\begin{aligned} 2kr^2 - r(x + y) &= r \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \\ 4k^2 r^4 - 4kr^3(x + y) + r^2(x + y)^2 &= r^2 \cdot (x^2 + y^2) \\ 4k^2 r^4 - 4kr^3(x + y) + r^2(x^2 + y^2 + 2xy) - r^2(x^2 + y^2) &= 0 \end{aligned}$$

semplificando e utilizzando di nuovo la prima equazione, abbiamo

$$4k^2 r^4 - 4kr^3(x + y) + 4kr^4 = 0 \quad \text{dividiamo ancora per } 4kr^3 \text{ e ricaviamo } x + y$$

$$x + y = (k + 1)r$$

quindi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} xy = 2kr^2 \\ x + y = (k + 1)r \end{cases} ; \quad x > 2r \quad \text{e} \quad y > 2r$$

La cui risolvete porta all'equazione

$$z^2 - (k + 1)r \cdot z + 2kr^2 = 0$$

con le soluzioni 
$$z_{1,2} = \frac{(k + 1) \cdot r \pm \sqrt{r^2 + k^2 r^2 - 6kr^2}}{2}$$

che rappresentano i due cateti.

Tuttavia, era possibile evitare calcoli relativamente complicati usando anche la proprietà per cui *i segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una circonf. sono congruenti* (vedi premesse geometriche all'inizio), per cui otteniamo l'equazione (vedi disegni precedenti e calcoli di pag. 4)

$$(x-r) + (y-r) = a \Rightarrow a = x + y - 2r$$

Dove  $a$  è la misura dell'ipotenusa; nel nostro caso, la seconda equazione del sistema risolvibile diventa (eliminando  $a$ , come se fosse una terza incognita esprimibile rispetto ai cateti)

$$xy = (2x + 2y - 2r) \cdot r$$

e quindi

$$xy = 2(x + y - r) \cdot r$$

che conduce al sistema

$$\begin{cases} xy = 2kr^2 \\ xy = 2(x + y - r) \cdot r \end{cases}$$

Per confronto, abbiamo l'equazione lineare ottenuta dopo le dovute semplificazioni

$$x + y - r = kr \Rightarrow x + y = (k+1)r$$

come già ottenuto prima. I calcoli che seguono sono gli stessi già eseguiti prima.

**Determinare i lati sapendo che il perimetro è  $kr$ .**

Come nel problema precedente, "k" è un parametro che in questo caso rappresenta il rapporto perimetro / raggio.

Assumendo come incognite  $x$  e  $y$  i due cateti, avremo l'equazione di secondo grado

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

la relazione lineare sarà quella dedotta dalla regola dei segmenti di tangente (vedi pag. 2 e calcoli di questa pagina), per cui l'ipotenusa è data da

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y - 2r$$

Otteniamo il sistema (di quarto grado)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = kr - x - y \\ \sqrt{x^2 + y^2} = x + y - 2r \end{cases}$$

Per confronto, eliminando il radicale, otteniamo

$$x + y - 2r = kr - x - y \Rightarrow 2(x + y) = kr + 2r$$

la seconda equazione, quadrando e riducendo, porta a

$$xy - 2rx - 2ry + 2r^2 = 0$$

per cui

$$xy = 2r(x + y) - 2r^2 = kr^2$$

l'equazione associata sarà

$$z^2 - \frac{kr + 2r}{2}z + kr^2 = 0$$

Per fare i calcoli, poniamo  $k = 2k'$ , per cui

$$z^2 - (k'+1) \cdot r \cdot z + 2k'r^2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{k'+1 \pm \sqrt{(k')^2 - 6k' + 1}}{2} \cdot r$$

Per es., nel caso di un triangolo con lati =  $5r$  (ipotenusa),  $4r$  e  $3r$  (cateti), si avrebbe il perimetro =  $12r$  e quindi

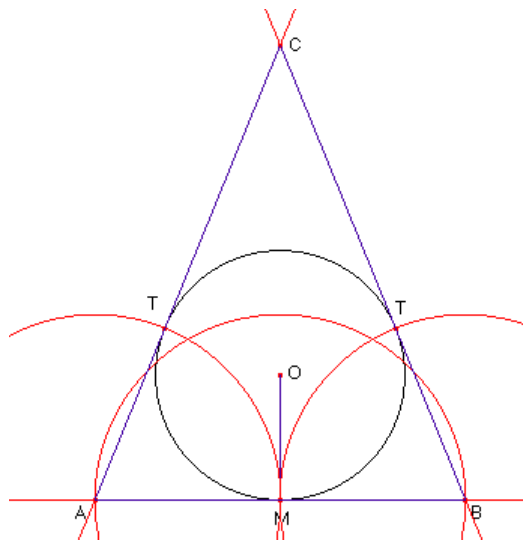
$$k' = 6. \text{ Le soluzioni dell'equazione, cioè i cateti del triangolo, sono quindi } \frac{6+1 \pm \sqrt{36-36+1}}{2} r = \frac{7 \pm 1}{2} r =$$

$$\begin{cases} 3r \\ 4r \end{cases}$$

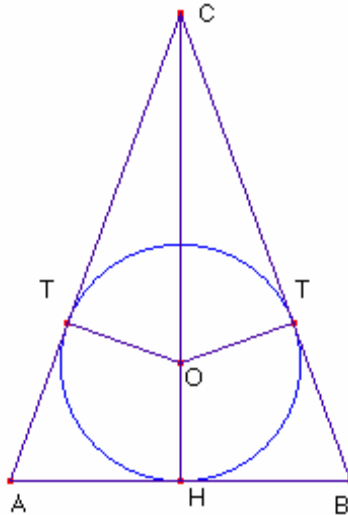
Il lettore attento non si lascerà sfuggire che la soluzione trovata per il problema del perimetro assegnato è uguale a quella dell'area assegnata, anche se scritta in modo un po' diverso (per es., il raggio  $r$  in quest'ultima è stato messo in evidenza). In effetti, come abbiamo già visto, nei poligono circoscritti a un cerchio l'area è data dal raggio per il semiperimetro, quindi determinare il triangolo rettangolo circoscritto al cerchio di area =  $k r^2$  equivale a trovare quello il cui semiperimetro è uguale a  $k r$ . Nei calcoli prima eseguiti, essendo il perimetro =  $k r$ , il semiperimetro equivale a  $k' r$ , e questo spiega l'equivalenza delle due formule.

### Triangolo isoscele circoscritto a un cerchio di raggio assegnato

Cominciamo con esaminare la costruzione geometrica della figura. Si può iniziare con una crf  $C$  di raggio arbitrario, e un segmento che nel suo punto medio  $M$  è tangente a  $C$  e che sarà la base del triangolo. I lati obliqui contengono segmenti di tangente, ed essendo congruenti i segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una crf, la distanza tra il punto di tangenza  $T$  del lato obliquo con  $C$  e il vertice comune a lato obliquo e base ( $A$  o  $B$ ) deve essere uguale a metà della base (ricordare che la base è tangente alla crf nel suo punto medio  $M$ ). La costruzione completa è la seguente



Come già visto prima, si può anche costruire il triangolo isoscele e poi la crf inscritta. Esaminiamo ora la figura ottenuta, a prescindere dai passaggi della costruzione.



I problemi su questa figura possono essere impostati con una sola incognita, o due. Nel primo caso, bisogna cercare di esprimere la base, l'altezza e il lato obliquo in funzione della stessa grandezza  $x$ . Il lato obliquo può essere determinato con Pitagora a partire dall'altezza e dalla base, o come somma  $CT + BT$ , quindi l'incognita  $x$  può essere l'altezza o la base (meglio la metà). La chiave risolutiva del problema può essere la proporzione

$$OC : OT = BC : HB$$

dove  $OT$  è il raggio  $r$ , e  $OC$  può essere  $x$ , con la limitazione  $x > r$ . A questa proporzione possiamo aggiungere il Teorema di Pitagora che esprime il lato obliquo, quindi è utile considerare  $HB$  provvisoriamente come una seconda incognita  $y$ , con la limitazione  $y > 0$ .

Passando alle lettere, la proporzione può essere espressa come

$$x : r = \sqrt{(x+r)^2 + y^2} : y$$

che permette di esprimere  $y$  in funzione di  $x$ .

I calcoli portano a:  $xy = r \cdot \sqrt{(x+r)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 y^2 = r^2 \cdot (x^2 + y^2 + 2rx + r^2) \Rightarrow (x^2 - r^2) \cdot y^2 = r^2 \cdot (x+r)^2$  e infine si ottiene

$$HB = y = r \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$$

Per il lato obliquo, applicando appunto Pitagora si ottiene

$$BC = \sqrt{(x+r)^2 + r^2} \cdot \frac{x+r}{x-r} = \sqrt{\frac{(x+r) \cdot [(x+r)(x-r) + r^2]}{x-r}} = x \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$$

Risultato che si può ottenere anche dalla proporzione

$$OC : OT = BC : HB \Rightarrow x : r = BC : r \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}, \text{ ecc...}$$

Vediamo ora problemi sul triangolo isoscele circoscritto risolti con due incognite

**Determinare l'altezza e la base del triangolo isoscele circoscritto a un cerchio di raggio 'r' sapendo il lato obliquo 'l'.**

Questo problema porta ad un'equazione di terzo grado, generalmente non risolvibile. Infatti dall'equazione

$$x \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}} = l$$

si ottiene  $x^3 + rx^2 - l^2x + l^2r = 0$ , con  $x > r$

Lo stesso vale per il problema:

**Determinare altezza e base del triangolo isoscele circoscritto sapendo il perimetro o l'area** (i due problemi sono identici, come visto prima).

Detto  $p$  il semiperimetro, abbiamo, per le formule trovate prima,

$$p = x \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}} + r \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}} = (x+r) \cdot \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$$

da cui si trova l'equazione

$$(x+r)^3 = p^2(x-r)$$

È più semplice prendere come incognita "x" l'altezza del triangolo: in tal caso l'equazione diventa

$$x^3 = p^2(x-2r)$$

Se invece è assegnata l'area  $A$ , avremo

$$x^3 = \frac{A}{r^2}(x-2r)$$

Equazioni generalmente non risolvibili, salvo casi particolari.

**Determinare il lato del triangolo equilatero circoscritto a un cerchio di raggio 'r'**

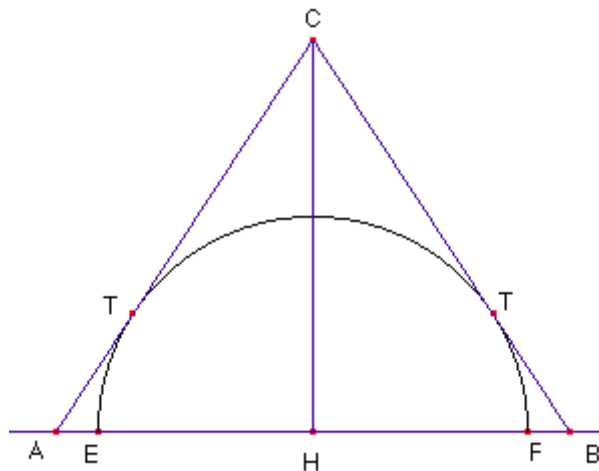
È un problema elementare.

La soluzione più semplice è considerare che l'altezza è  $= \frac{\sqrt{3}}{2}$  del lato. Si può sfruttare la relazione  $A = r \cdot p$ .

Essendo  $A = \frac{1}{2}l \cdot h$  abbiamo l'equazione

$$2rp = l \cdot h \Rightarrow 3rl = \frac{\sqrt{3}}{2}l^2 \Rightarrow l = 2r\sqrt{3}$$

**Triangolo isoscele circoscritto a un semicerchio di raggio 'r'**



**Determinare il triangolo isoscele circoscritto a un semicerchio di perimetro assegnato**

Indichiamo con '  $p$  ' il semiperimetro.

Dato che  $p = AH + AC$ , poniamo  $AH = x$  e  $CH = y$  e cerchiamo  $AC$ . Il doppio dell'area del triangolo rettangolo AHC (cioè l'area di ABC) può essere calcolata sia come prodotto dei cateti  $AH \cdot HC = x \cdot y$  sia come prodotto del lato obliquo  $AC$  per il raggio, per cui abbiamo l'equazione

$$AC \cdot r = x \cdot y \Rightarrow AC = \frac{xy}{r}$$

Perciò abbiamo una prima equazione  $x + \frac{xy}{r} = p$

La seconda equazione può essere quella che deriva dal teorema di Pitagora, per cui

$$AC = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + y^2} = p,$$

Otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} xy = r(p-x) \\ \sqrt{x^2 + y^2} = p-x \end{cases}$$

Elevando al quadrato la seconda equazione, e riducendo, si ottiene

$$y^2 = -2px + p^2$$

risostituendo nella prima, abbiamo

$$x \cdot \sqrt{p^2 - 2px} = r(p-x)$$

E infine si ottiene l'equazione (di terzo grado)

$$2px^3 + (r^2 - p^2)x^2 - 2r^2px + p^2r^2 = 0$$

E quindi il problema non è in generale risolubile.

Invece, è possibile

**Determinare il triangolo isoscele di area assegnata  $k r^2$  circoscritto a un semicerchio.**

Il doppio dell'area può essere calcolato come semiprodotto di base per altezza, cioè  $x \cdot y$  (vedi figura), o come prodotto del lato obliquo per il raggio, quindi  $r \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = k r^2$  da cui si ottiene  $x^2 + y^2 = k^2 r^2$

Perciò si ottiene il sistema

$$\begin{cases} xy = k r^2 \\ x^2 + y^2 = k^2 r^2 \end{cases}$$

Tenendo presente l'identità

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

la seconda equazione si può scrivere

$$(x+y)^2 = 2kr^2 + k^2r^2$$

Da cui  $\begin{cases} xy = k r^2 \\ x+y = r \cdot \sqrt{k^2 + 2k} \end{cases}$

Come già visto prima, l'equazione associata

$$z^2 - r \cdot \sqrt{k^2 + 2k} \cdot z + k r^2 = 0$$

le cui soluzioni sono 
$$\frac{r\sqrt{k^2 + 2k} \pm r\sqrt{k^2 - 2k}}{2} = \frac{\sqrt{k^2 + 2k} \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2} \cdot r$$

se invece indichiamo l'area con una sola lettera  $A$ , avremo il sistema (identico a quello trovato prima, salvo la diversa notazione)

$$\begin{cases} xy = A \\ x^2 + y^2 = \frac{A^2}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = A \\ x + y = \sqrt{\frac{A^2}{r^2} + 2A} \end{cases}$$

Le cui soluzioni, ottenute dall'equazione

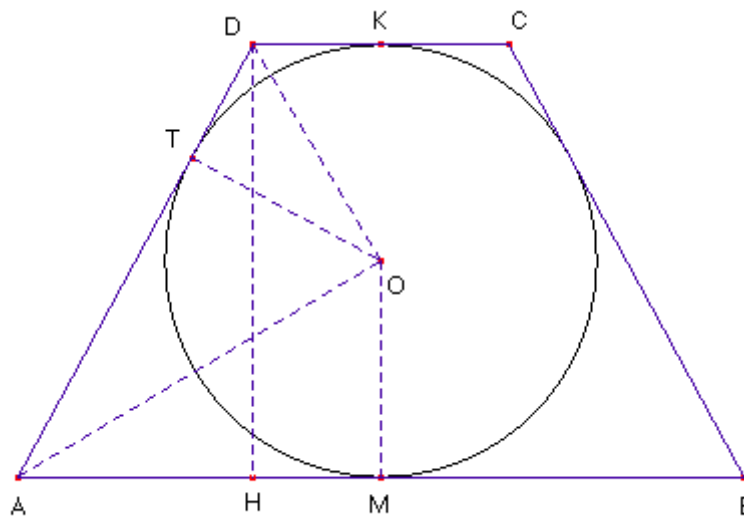
$$z^2 - \sqrt{\frac{A^2}{r^2} + 2A} \cdot z + A = 0$$

sono

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{\frac{A^2}{r^2} + 2A} \pm \sqrt{\frac{A^2}{r^2} - 2A}}{2}$$

### Trapezio isoscele circoscritto a un cerchio di raggio $r$ assegnato

È una delle figure più interessanti



Procediamo cercando le relazioni tra gli elementi della figura in funzione dell'altezza, che evidentemente misura  $2r$ . Per la congruenza dei segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una crf, *il lato obliquo è equivalente alla semisomma delle basi*, per cui (Relazione 1)

$$AD = AH + DK.$$

L'area è equivalente al prodotto del raggio per il semiperimetro.

Dalla prima relazione deduciamo che l'intero perimetro  $2p$  (somma dei lati obliqui e delle basi) è quattro volte il lato obliquo, per cui  $2p = 4l$  e quindi  $p = 2l$ . (Relazione 2)

Dalla seconda, in base anche a questa conseguenza, deduciamo che l'area è il doppio prodotto del raggio per la misura del lato obliquo. (Rel. 3),  $A = 2rl$ .

La differenza tra la base maggiore e la base minore può essere calcolata col Teorema di Pitagora, per cui, applicandolo alla semidifferenza delle basi  $AM - DK$ , otteniamo

$(AM - DK)^2 = AH^2 = AD^2 - HD^2 = AD^2 - 4r^2$   
 Per la relazione  $AD = AM + DK$  trovata prima, abbiamo  
 $AH^2 = (AM - DK)^2 = (AM + DK)^2 - 4r^2$   
 Da cui, sviluppando i calcoli, otteniamo  $-2 \cdot AM \cdot DK = 2 \cdot AM \cdot DK - 4r^2$  cioè, semplificando,  
 $AM \cdot DK = r^2$  [ Rel. 4 ].

Tenendo presente che  $AM = AT$  e  $DK = DT$  (per la rel. 1 ), otteniamo ancora

$$AT \cdot DT = r^2 \quad [\text{Rel. 5}].$$

Questa relazione, ricavata con una serie di calcoli, può ottenersi anche in base a un ragionamento geometrico diretto. Infatti, se consideriamo che l'altezza relativa al lato obliquo AD equivale al raggio  $r$ , essa corrisponde al 2° teorema di Euclide applicato al triangolo AOD, come se fosse un triangolo rettangolo nel centro O. Finora non abbiamo dimostrato che AOD è rettangolo, ma possiamo arrivarci per via sintetica.

*Dimostrazione – il triangolo AOD è rettangolo in O.*

Gli angoli MAD e ADK sono supplementari. I segmenti OA e OD appartengono alle bisettrici degli stessi angoli, rispettivamente (lo si deduce dalla congruenza delle coppie di triangoli rettangoli AOM e AOT, e DOT e DOK). Quindi gli angoli OAD e ODA sono la metà rispettivamente degli angoli MAD e ADK, e la loro semisomma è la metà della semisomma di MAD e ADK, cioè un angolo retto. Ne segue che l'angolo AOD è retto, e che la rel. 5 è vera.

**Determinare le misure dei lati di un trapezio isoscele di perimetro  $2p$  assegnato circoscritto a un cerchio**

Dette  $x$  e  $y$  le metà della base maggiore e minore rispettivamente, abbiamo i limiti  $x \geq r \geq y > 0$ . [ il caso limite  $x = r = y$  corrisponde al quadrato ].

In base alla *relazione 1* (vedi prima), il semiperimetro è il doppio del lato obliquo, che a sua volta è la somma delle semibasi. Abbiamo quindi l'equazione lineare  $x + y = \frac{p}{2}$  alla quale possiamo aggiungere l'equazione  $xy = r^2$ , ottenendo il sistema

$$\begin{cases} x + y = \frac{p}{2} \\ xy = r^2 \end{cases}$$

che conduce all'equazione  $z^2 - \frac{p}{2}z + r^2 = 0$

con le soluzioni  $z_{1,2} = \frac{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4r^2}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 16r^2}}{4}$

Questa soluzione contiene anche, implicitamente, il limite inferiore per il semiperimetro  $p$ . Infatti le soluzioni sono reali solo se  $p \geq 4r$ . Il caso  $p = 4r$  è quello del quadrato circoscritto al cerchio di raggio  $r$ .

**Determinare le misure dei lati di un trapezio isoscele di area  $k r^2$  circoscritto a un cerchio.**

L'impostazione è identica al caso precedente, essendo l'area data da  $p \cdot r$ ; quindi, la soluzione espressa rispetto al parametro  $k$  si ottiene dalla precedente sostituendo  $p$  con  $k r$ .

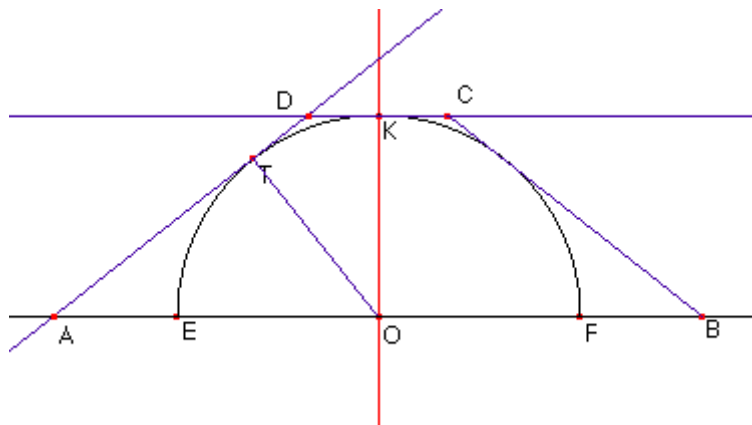
Otteniamo  $z_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 16}}{4} \cdot r$

Se invece indichiamo l'area con  $A$ , otteniamo la formula  $z_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 16 \cdot r^4}}{4r}$

(ricordare che  $z$  rappresenta le metà delle basi).

## Trapezio isoscele circoscritto a un semicerchio di raggio assegnato

Riporto la costruzione della figura:



*1 Metodo - Partendo dalla semicirconferenza iniziando dal lato obliquo:*

Dati diametro EF e semicirconferenza, per tracciare il lato AD, che deve essere tangente alla semicrf, si può prendere un punto T arbitrario sulla semicrf e unirlo col centro O. La retta ortogonale al raggio suddetto in T è evidentemente tangente alla semicrf. L'intersezione di questa retta con il prolungamento del diametro è il punto A. Tracciando la perpendicolare al diametro in O e intersecando la semicrf in K, si costruisce la parallela in K al diametro. Intersecando con la retta AT già costruita si ottiene D. I punti B e C si possono ottenere per simmetria assiale a partire da A e D.

*2 Metodo – Partendo dalla semicrf iniziando dalla base maggiore:*

Poiché il triangolo ATO è rettangolo in T, costruire la crf ausiliaria con centro nel punto medio del segmento OA. L'intersezione tra questa crf e la semicrf data è il punto T.

*3 Metodo – Partendo dal trapezio, costruire la semicirconferenza inscritta:*

Tracciata la perpendicolare alla base nel punto medio, il raggio della semicrf è il segmento che unisce le intersezioni delle basi con la suddetta perpendicolare.

La proprietà chiave di questa figura si deduce dalla congruenza tra i triangoli rettangoli AHD e ATO, che sono simili in quanto hanno in comune il vertice A con rapporto di similitudine uguale a 1 perché  $OT = DH$  (vedi figura sotto), dove con H intendiamo la proiezione ortogonale di D sulla base maggiore AB.

Ne segue la congruenza tra il lato obliquo e la metà della base maggiore.

Questa relazione può essere dedotta anche uguagliando le formule del calcolo dell'area, che è data sia dalla regola generale dell'area del trapezio sia dalla regola per cui l'area di un poligono circoscritto a un cerchio equivale al prodotto del raggio per il semiperimetro. Consideriamo il poligono (esagono) ottenuto come unione tra il trapezio e il suo simmetrico rispetto al diametro del semicerchio inscritto; l'area del trapezio è la metà dell'area dell'esagono. Quindi è

data dalla metà della somma dei lati esclusa la base maggiore (che non è lato dell'esagono), cioè  $\frac{2 \cdot AD + CD}{2} \cdot r$ .

Otteniamo quindi

$$\frac{AB + CD}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot AD + CD}{2} \cdot r$$

(l'altezza è equivalente al raggio  $r$ ) da cui  $AB = 2 \cdot AD$ .

La seconda proprietà fondamentale deriva dal teorema di Pitagora applicato al triangolo AHD, che pone in relazione le due basi, secondo lo stesso schema del trapezio isoscele circoscritto a un cerchio. In questo caso, abbiamo

$$AH^2 = (OA - DK)^2 = AD^2 - r^2$$

Poniamo  $OA = x$  e  $DK = y$ ; tenendo presente che  $AD = OA$  per le proprietà viste prima, otteniamo

$$(x - y)^2 = x^2 - r^2 \Rightarrow 2xy - y^2 = r^2$$

**Determinare i lati del trapezio isoscele di dato perimetro  $2p$  circoscritto a un semicerchio di raggio  $r$**

Il semiperimetro è dato dalla somma  $AO + DK + AD$ ; secondo quanto già visto,  $AD = AO$ . Posto  $x = AO$  e  $y = DK$ , con i limiti  $x \geq r \geq y > 0$ , otteniamo l'equazione

cui si deve aggiungere l'equazione  $2xy - y^2 = r^2$  trovata prima.

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = p \\ 2xy - y^2 = r^2 \end{cases}$$

Ricaviamo  $y$  in funzione di  $x$  dalla prima eq.:  $y = p - 2x$  e sostituiamo nella seconda

$$2px - 4x^2 - 4x^2 + 4px - p^2 - r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 - 6px + p^2 + r^2 = 0$$

con le soluzioni  $x_{1,2} = \frac{3p \pm \sqrt{p^2 - 8r^2}}{8}$

per la metà della base minore, si ottiene  $y = \frac{2p \mp 2\sqrt{p^2 - 8r^2}}{8} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 8r^2}}{4}$

come nel caso del trapezio isoscele circoscritto a un cerchio, anche in questo caso otteniamo il limite inferiore del valore del semiperimetro, cioè  $p = 2r \cdot \sqrt{2}$ , cui corrispondono i valori  $\frac{3r\sqrt{2}}{4}$  e  $\frac{r\sqrt{2}}{2}$  risp. per la metà della base maggiore (e lato obliquo) e la metà della base minore.

**Determinare il trapezio isoscele di area assegnata  $kr^2$  circoscritto a un semicerchio di raggio  $r$**

L'impostazione è la stessa. Poniamo la metà della base maggiore e della base minore uguali a  $x$  e  $y$  rispettivamente, con i limiti  $x \geq r \geq y > 0$ . Possiamo utilizzare anzitutto la regola generale dell'area di un trapezio, per cui  $(x + y) \cdot r = kr^2$

Inoltre, applicando il Teorema di Pitagora al triangolo AHD (vedi i calcoli fatti per il calcolo del trapezio di perimetro assegnato) si ottiene

$$2xy - y^2 = r^2$$

Il sistema risolvibile è

$$\begin{cases} x + y = kr \\ 2xy - y^2 = r^2 \end{cases}$$

Ricavando la  $y$  dalla prima si ottiene  $y = kr - x$ , sostituendo nella seconda abbiamo

$$2krx - 2x^2 - x^2 + 2krx - k^2r^2 - r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 4krx + (k^2 + 1)r^2 = 0$$

Le cui soluzioni sono  $x_{1,2} = \frac{2kr \pm \sqrt{(k^2 - 3) \cdot r}}{3}$ , e per la  $y$  si ottiene

$$y_{1,2} = \frac{kr \mp \sqrt{k^2 - 3} \cdot r}{3}$$

I problemi sul trapezio isoscele circoscritto possono essere impostati anche con una sola incognita, p.es. la metà della base maggiore  $x$ . La base minore può essere espressa in funzione della  $x$  in base al teorema di Pitagora applicato al triangolo AHD, in quanto  $AD^2 = AH^2 + HD^2$  che, tenendo presente  $AD = x$ , conduce all'equazione

$$x^2 = (y-x)^2 + r^2$$

$$\text{da cui deriviamo } y - x = \pm \sqrt{x^2 - r^2} \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - r^2}$$

(il segno negativo è imposto dalla condizione  $y < x$ )

Se si tratta di determinare il trapezio di perimetro assegnato  $2p$ , dalla relazione  $OA + AD + DK = p$  deduciamo che

$$x + x + (x - \sqrt{x^2 - r^2}) = 3x - \sqrt{x^2 - r^2} = p \text{ cioè, isolando il radicale,}$$

$$\sqrt{x^2 - r^2} = 3x - p$$

Per l'area, si ottiene p.es.

$$x + (x - \sqrt{x^2 - r^2}) = 2x - \sqrt{x^2 - r^2} = kr \text{ e alla fine}$$

$$\sqrt{x^2 - r^2} = 2x - kr$$

### **Determinare i lati del trapezio isoscele di lato obliquo "l" circoscritto a un semicerchio di raggio r**

In questo caso, per quanto stabilito prima, si conosce anche la metà della base maggiore, che è congruente al lato obliquo. Quindi il problema ha una sola incognita.

Si tratta quindi di determinare la base minore  $x$ . I limiti sono  $0 \leq x \leq r$ . Si può utilizzare il Teorema di Pitagora per cui la differenza tra le basi AH (vedi figura, sopra), il lato obliquo  $AD = OA$  e l'altezza  $DH = r$  sono collegate dalla relazione

$$AH^2 = AD^2 - DH^2$$

$$\text{Per cui, passando alle lettere, } (x - l)^2 = l^2 - r^2 \Rightarrow x = l \pm \sqrt{l^2 - r^2}$$

In realtà solo la soluzione col segno meno è accettabile, perché generalmente deve essere  $l \geq r$ .

### **Trapezio rettangolo circoscritto a un cerchio di raggio assegnato**

La costruzione della figura, a partire dalla circonferenza di raggio e centro arbitrari, è simile a quella illustrata a pag. 4. Per prima cosa si traccia la retta della base maggiore, come perpendicolare al raggio OH essendo H scelto arbitrariamente sulla crf inscritta. Allo stesso modo si traccia la retta della base minore (la base come segmento, dopo). Il lato verticale AD si trova dopo aver tracciato la parallela alle basi condotta per il centro, e intersecandola con la crf in L. Il lato verticale si costruisce come perpendicolare alle basi condotta per il punto L. La parte non banale della costruzione consiste nel tracciare il lato obliquo, che deve essere tangente alla circonferenza. Si prende un punto arbitrario B sulla base maggiore (con distanza da A maggiore del diametro) e si traccia la crf ausiliaria (in rosso nella fig. seguente) avente centro nel punto medio M del segmento OB. Il lato obliquo deve passare per il punto T di intersezione tra la crf data e questa crf ausiliaria. Infatti il triangolo ATC, essendo inscritto in una semicrf, è rettangolo nel vertice T opposto all'ipotenusa OB. Si traccia la retta per B e T; l'intersezione tra BT e la retta della base superiore fornisce il vertice C.



$$\frac{AB + CD}{2} \cdot AD = \frac{AB + CD + 2BC + AD}{2} \cdot r$$

Che, passando alle lettere, diventa

$$\frac{x + y + 2r}{2} \cdot 2r = \frac{(2BC + x + y + 2r + 2r)}{2} \cdot r$$

E quindi, riducendo,

$2x + 2y + 4r = 2BC + x + y + 4r$ , che conduce a  $BC = x + y$  cioè alla prima relazione trovata.

**Determinare i lati di un trapezio rettangolo di perimetro  $2p$  circoscritto a un cerchio di raggio  $r$ .**

Il perimetro è dato da  $AB + BC + CD + DA = (x + r) + (x + y) + (y + r) + 2r =$

$2x + 2y + 4r = 2p$  (tener presente che  $HB = x$  e  $CK = y$ ), e infine

$x + y = p - 2r$

Il sistema risolvete è quindi

$$\begin{cases} x + y = p - 2r \\ xy = r^2 \end{cases},$$

sistema che possiamo confrontare con quello risolvete il trapezio isoscele circoscritto:

$$\begin{cases} x + y = \frac{p}{2} \\ xy = r^2 \end{cases}$$

L'equazione risolvete è ora  $z^2 + (2r - p) \cdot z + r^2 = 0$ , con le soluzioni

$$z_{1,2} = \frac{p - 2r \pm \sqrt{p^2 - 4pr}}{2}$$

contenente il limite  $p \geq 4r$  imposto dalla realtà delle soluzioni.

Questo limite corrisponde al caso del quadrato circoscritto (il cui perimetro è quattro volte il diametro cioè  $8r$ );  $x$  e  $y$  cioè le basi meno il raggio sono equivalenti al raggio.

**Determinare i lati di un trapezio rettangolo di area assegnata circoscritto a un cerchio di raggio  $r$**

L'area può essere data nella forma  $k \cdot r^2$  essendo  $k$  un parametro positivo. Possiamo sfruttare il risultato già ottenuto,

essendo  $A = r \cdot p \Rightarrow p = \frac{A}{r} = k \cdot r$  e quindi la soluzione è data da

$$\frac{k - 2 \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \cdot r$$

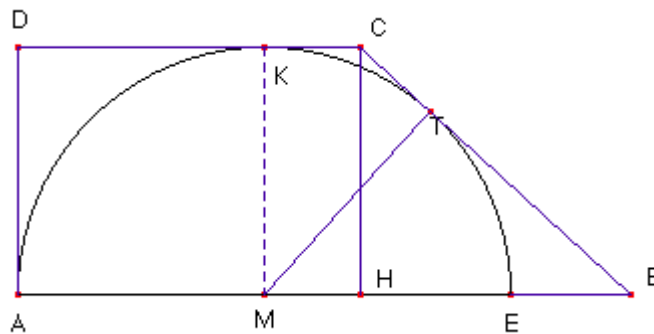
Una soluzione indipendente (lo stesso vale per il trapezio isoscele circoscritto) può essere trovata partendo dalla formula dell'area, per cui

$$\frac{(x + r) + (y + r)}{2} \cdot 2r = k r^2 \Rightarrow x + y = k r - 2 r$$

L'equazione di secondo grado è sempre  $xy = r^2$

Il sistema che si ottiene è, evidentemente, lo stesso di prima, salvo il parametro  $k$ .

### Trapezio rettangolo circoscritto a un semicerchio di raggio assegnato



La proprietà chiave della figura è la congruenza dei triangoli rettangoli MTB e CHB, per cui  $MB = BC$ . Anche questa figura può essere risolta in due incognite; la scelta più conveniente potrebbe essere

#### Determinare i lati del trapezio rettangolo di perimetro $2p$ circoscritto a un semicerchio

L'impostazione principale consiste nel porre la base maggiore  $AB = x$  e la base minore  $DC = y$ , con i limiti  $x \geq 2r$  e  $0 < y \leq r$ .

Il lato obliquo può essere calcolato dalla congruenza (vedi prima) tra i triangoli rettangoli BHC e OTB, per cui  $BC = OB$  e quindi  $BC = x - r$ . Il perimetro è dato da

$$2p = x + (x - r) + y + r \Rightarrow 2x + y = 2p$$

Possiamo poi applicare il teorema di Pitagora al triangolo HBC per esprimere il lato obliquo, per cui

$$BC = x - r = \sqrt{(x - y)^2 + r^2} \Rightarrow x - r = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + r^2}$$

Quadrando e riducendo si ottiene

$$y^2 - 2xy + 2rx = 0$$

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2p \\ y^2 - 2xy + 2rx = 0 \end{cases}$$

Ricavando la  $y$  dalla prima eq. e sostituendo nella seconda otteniamo

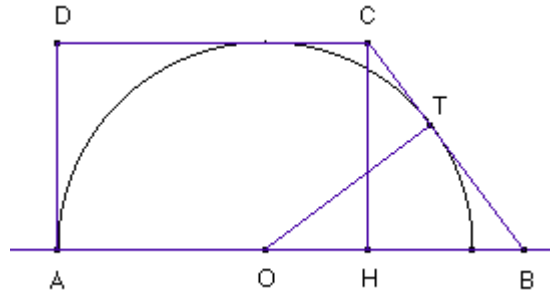
$$4p^2 + 4x^2 - 8px - 4px + 4x^2 + 2rx = 8x^2 + (2r - 12p)x + 4p^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 + (r - 6p)x + 2p^2 = 0, \text{ e infine otteniamo per l'incognita } x$$

$$x = \frac{6p - r \pm \sqrt{4p^2 - 12pr + r^2}}{8}$$

Possiamo considerare il caso notevole  $p = 3r$ , cui corrispondono le soluzioni

$$\begin{cases} \frac{17r + r}{8} = \frac{9}{4}r \\ \frac{17r - r}{8} = 2r \end{cases}$$

La seconda soluzione corrisponde al caso limite del rettangolo circoscritto a un semicerchio; il primo alla figura seguente



nella quale  $AH = \frac{3}{2}r$ ,  $HB = \frac{3}{4}r$ ,  $BC = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} \cdot r = \frac{5}{4}r$ .

Un metodo alternativo (con calcoli leggermente più complessi) consiste nel porre  $AH = DC = x$  e  $HB = y$ , con i limiti:  $r < x \leq 2r$  e  $y > 0$ .

La base maggiore è  $x + y$ , la base minore  $x$ , AD coincide con l'altezza  $r$  e il lato obliquo BC si calcola con il teorema di Pitagora, per cui

$$BC = \sqrt{HB^2 + HC^2} = \sqrt{y^2 + r^2}.$$

La condizione sul perimetro implica l'equazione

$$(x + y) + \sqrt{y^2 + r^2} + x + r = 2p \Rightarrow 2x + y + r - 2p = -\sqrt{y^2 + r^2}$$

Possiamo sfruttare la congruenza tra MB e BC, dalla quale, dato che  $MB = x + y - r$ , otteniamo

$$x + y - r = \sqrt{y^2 + r^2}$$

Sommando le due equazioni membro a membro si ottiene

$$3x + 2y = 2p$$

Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2p \\ x + y - r = \sqrt{y^2 + r^2} \end{cases}$$

La seconda equazione, quadrando e riducendo, implica

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2rx - 2ry + r^2 = y^2 + r^2 \Rightarrow 2xy + x^2 = 2r(x + y)$$

esplicitando  $y$  dalla prima equazione, otteniamo  $y = \frac{1}{2}(2p - 3x) = p - \frac{3}{2}x$

per cui, sostituendo nella seconda, abbiamo

$$2px - 3x^2 + x^2 - 2rx - 2rp + 3rx = 0 \quad \text{e quindi, riducendo e cambiando segni,}$$

$$2x^2 - (2p + r)x + 2rp = 0$$

e quindi per  $x$  si trova

$$\frac{2p + r \pm \sqrt{4p^2 - 12pr + r^2}}{4}$$

Un caso limite interessante è  $p = 3r$ , (vedi prima) che conduce alle soluzioni

$$\begin{cases} \frac{7r+r}{4} = 2r \\ \frac{7r-r}{4} = \frac{3}{2}r \end{cases}$$

## Appendice – le discussioni grafiche

La *discussione* è il procedimento attraverso il quale viene stabilito se e quante sono le soluzioni di un'equazione o di un sistema, al variare di un parametro detto appunto *parametro di discussione*, comprese entro i limiti imposti. Generalmente, il problema di cui il sistema o l'equazione fornisce le soluzioni contiene una grandezza indeterminata ma considerata costante, detta *parametro di scala o di costruzione*. Nei problemi considerati il raggio della circonferenza inscritta è il parametro fisso. Qui siamo interessati ai sistemi, perché tutti i problemi esaminati sono stati risolti mediante sistemi.

Il caso più semplice è quello nel quale il parametro della discussione compare solo in una delle due equazioni. In questo caso, la discussione grafica è semplice, perché ha luogo attraverso il confronto tra una *curva fissa* (che rappresenta l'equazione contenente il parametro fisso) e una *curva variabile* nella cui equazione compare il parametro di discussione, che è appunto variabile.

Prendiamo il sistema (v. pag. 5)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = a + 2r \end{cases} \quad \text{con } x > 2r \text{ e } y > 2r$$

Nel problema che è risolto da questo sistema, il parametro fisso è  $r$ , mentre  $a$  è il parametro variabile. Osserviamo che tutte le rette sono parallele di  $x + y = 0$  e che entrambi i parametri sono positivi. Poiché il parametro variabile compare in entrambe le equazioni, avremmo due curve variabili, perciò dobbiamo modificare il sistema. Sostituiamo  $x$  e  $y$  con  $x = X + r$  e  $y = Y + r$ , con le nuove limitazioni  $X > r$  e  $Y > r$ . Il sistema diventa

$$\begin{cases} X + Y = a \\ (X + r)^2 + (Y + r)^2 = a^2 \end{cases}$$

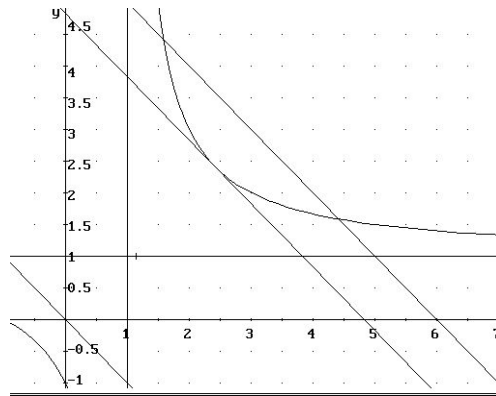
Per discutere, conviene che una delle due equazioni non contenga il parametro della discussione, cioè  $a$ . Perciò eliminiamo  $a$  nella seconda, sostituendo  $a^2$  con  $(X + Y)^2$  e quindi otteniamo, dopo alcuni passaggi, il sistema

$$\begin{cases} XY - rX - rY - r^2 = 0 \\ X + Y = a \end{cases}$$

che è discutibile graficamente, avendo ottenuto la separazione dei parametri nelle due equazioni. In questo caso, la curva fissa è una omografica di equazione esplicita

$$Y = \frac{X+r}{X-r} \cdot r$$

avente asintoti  $X = r$  e  $Y = r$ . Per la discussione, in base ai limiti vale solo il ramo superiore destro. Le soluzioni corrispondono alle intersezioni tra la retta variabile  $X + Y = a$  e l'iperbole; quindi, la chiave della discussione è la tangente, che corrisponde a  $a = (2 + 2\sqrt{2}) \cdot r$ . Poiché l'ordinata dell'intersezione tra retta e asse OY è funzione crescente di  $a$ , il problema ha due soluzioni distinte simmetriche per  $a > (2 + 2\sqrt{2}) \cdot r$ , coincidenti per  $a = (2 + 2\sqrt{2}) \cdot r$ , nessuna soluzione reale se  $a < (2 + 2\sqrt{2}) \cdot r$ .



Una situazione analoga si ha nel sistema

$$\begin{cases} xy = 2kr^2 \\ x + y = (k+1)r \end{cases} \quad \text{con}$$

(vedi pag. 7)

Proviamo a ricavare  $k$  dalla seconda equazione e a sostituire nella prima:  $k = \frac{x+y-r}{r} \Rightarrow$

$$yx = 2rx + 2ry - 2r^2 \quad \Rightarrow \quad y = 2r \cdot \frac{x-r}{x-2r}$$

Possiamo quindi discutere il sistema

$$\begin{cases} y = 2r \cdot \frac{x-r}{x-2r} \\ y = (k+1)r - x \end{cases}$$

Essendo gli asintoti della omografica  $x = 2r$  e  $y = 2r$ , per i limiti del problema (vedi sopra) la parte della curva che interessa la discussione è il ramo superiore destro.

La retta tangente alla curva corrisponde al caso  $x = y$  (lo si vede più chiaramente dal sistema non modificato) che

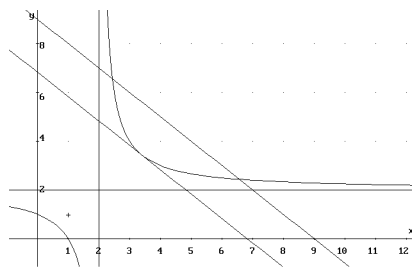
individua il punto di coordinate  $x = y = 2r + r\sqrt{2}$  ottenuto risolvendo l'equazione  $x = 2r \cdot \frac{x-r}{x-2r}$

$\Rightarrow x^2 - 4rx + 2r^2 = 0$  le cui soluzioni sono

$$x = y = 2r \pm \sqrt{2} \cdot r$$

si prende solo il valore col "+" (per i limiti). Sostituendo nell'equazione lineare troviamo il  $k$  della retta passante per

il punto, cioè  $k = \frac{x+y-r}{r} = 3 + 2\sqrt{2}$ .



Abbiamo quindi

2 soluz. ordinarie distinte se  $k > 3 + 2\sqrt{2}$

2 soluz. ord. coincidenti se  $k = 3 + 2\sqrt{2}$

nessuna soluz. reale se  $k < 3 + 2\sqrt{2}$

Interessante, ma molto difficile è anche il sistema (vedi pag. 12)

$$\begin{cases} xy = r(p-x) \\ \sqrt{x^2 + y^2} = p-x \end{cases}, \text{ con } x > r, y > r.$$

Se si eleva al quadrato la seconda equazione si ottiene

$$y^2 = -2px + p^2$$

cioè una parabola con asse parallelo a quello delle ascisse, vertice  $V(\frac{p}{2}; 0)$  e intersezioni con gli assi  $(0; \pm p)$  e il

vertice. La prima eq. può essere scritta come  $y = r \cdot \frac{p-x}{x}$  ed è ancora una omografica di centro  $C(0; -r)$ .

Questa discussione però è difficile (bisogna considerare la parabola fissa e l'omografica variabile, come se  $p$  fosse costante e  $r$  variabile). Perciò potrebbe essere conveniente considerare l'equazione risolvente (pag. 12)

$$2px^3 + (r^2 - p^2)x^2 - 2r^2px + p^2r^2 = 0$$

Si può migliorare la discussione ponendo  $p = kr$ . Poiché tutti i termini sono di quarto grado, dividiamo tutto per  $r^4$ , ottenendo un'equazione ridotta contenente un solo parametro  $k$ :

$$2k \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^3 + (1 - k^2) \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2 - 2k \cdot \left(\frac{x}{r}\right) + k^2 = 0$$

Sostituiamo  $X$  a  $\frac{x}{r}$  e otteniamo

$$2k \cdot X^3 + (1 - k^2) \cdot X^2 - 2k \cdot X + k^2 = 0$$

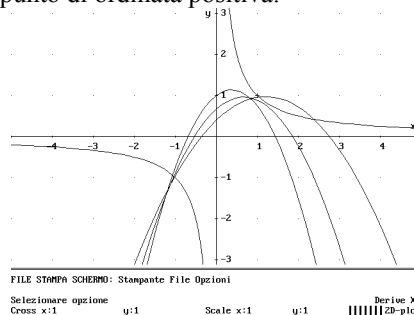
Se dividiamo tutti i termini per  $X$  e separiamo l'equazione otteniamo

$$2k \cdot X^2 + (1 - k^2) \cdot X - 2k = -\frac{k^2}{X}$$

Per ottenere un'iperbole fissa al secondo membro, dividiamo ancora tutto per  $-k^2$  e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} Y = -2 \cdot \frac{X^2}{k} + \frac{k^2 - 1}{k^2} \cdot X + \frac{2}{k} \\ Y = \frac{1}{X} \end{cases}$$

dove è importante osservare che deve essere  $k > 1$ , in quanto è  $p > r$ . La parabola mobile è sempre orientata verso il basso e interseca l'asse delle  $Y$  in un punto di ordinata positiva.



Le parabole in figura corrispondono a  $k = 2, 3, 5$ ; quest'ultima interseca l'iperbole in due punti distinti, le altre non la intersecano.

La discussione sarebbe completa se si riuscisse a determinare il valore di  $k$  che corrisponde alla tangenza. A questo scopo, possiamo ricorrere alle derivate: infatti nel punto di tangenza deve essere contemporaneamente

$$-2 \cdot \frac{X^2}{k} + \frac{k^2 - 1}{k^2} \cdot X + \frac{2}{k} = \frac{1}{X}$$

e

$$-\frac{4}{k}X + \frac{k^2 - 1}{k^2} = -\frac{1}{X^2}$$

che conduce a un'equazione di quarto grado. Non è quindi possibile completare questa discussione.