TEOREMA MULTINOMIALE

Tre dimostrazioni

di Ezio Fornero

In algebra si presenta il problema seguente: data una somma di p termini (variabili) che denotiamo con x_i , $1 \leq i \leq p$, calcolare i coefficienti $C^{n,p}_{k1,k2,...kp}$ dei monomi $x_1^{k1}\, x_2^{k2}\, ...\, x_p^{kp}$ dello sviluppo di $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_p)^n$.

Per calcolare i coefficienti $C^{n,p}_{k1,k2,...kp}$, si può procedere come segue.

Lo sviluppo in somma di monomi è dato da $\sum_{k1,k2,...kp=0}^{n} C^{n,p}_{k_1,k_2...k_p} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_p^{k_p}$ dove il simbolo di somma va inteso nel senso che tutti gli esponenti variano da 0 a n , ma in ogni monomio almeno uno deve essere diverso da 0 e non più di uno può essere uguale a n .

I singoli coefficienti sono calcolati scegliendo in ognuno dei fattori $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_p)$ una delle variabili x_i . Se l'esponente di x_i è k_i , il numero di volte in cui x_i è stato scelto è uguale a k_i. Ogni coefficiente $C^{n,p}_{k_1,k_2,...k_p}$ del monomio $x_1^{k1}\, x_2^{k2}\, ...\, x_p^{kp}$ è dato dal numero delle possibili sequenze ordinate di n elementi ognuno dei quali compare k_i volte , con $k_1 + k_2 + ... + k_p = n$, appartenenti a p tipi diversi , con p uguale al massimo valore dell'indice i .

Quante sequenze costituite da n termini anche ripetuti si possono ottenere a partire da un insieme I_n di n elementi, dei quali k_1 sono del tipo A_1 , k_2 del tipo A_2 , ... k_p del tipo A_p ?

Cominciamo con un caso particolare.

Una sequenza di questo tipo può essere rappresentata da una serie come ABAACCBCAB... ammesso che i "tipi" distinti siano A B e C. Questa particolare sequenza può essere pensata come costituita da tre serie parziali, AAAA BBB e CCC i cui elementi sono distribuibili in modo variabile su 10 posti diversi (10 è il numero n). Immaginiamo ora di costruire la sequenza a partire dai termini A. Se la sequenza contiene 4 elementi A distribuiti su 10 posti, ogni diverso ordinamento dei termini associati al tipo A (per es. A_AA _ _ A_ A _ e AA_ _ _ _ _ _ _ AA) corrisponde a una diversa combinazione semplice di 10 elementi di classe 4. Proseguiamo ora coi termini B . Poiché 4 posti sono già stati occupati, il numero delle possibili distribuzioni dei tre elementi B è quello delle combinazioni semplici di 10 – 4 = 6 elementi di classe 3 , che è uguale a quello delle possibili combinazioni di C . Il numero totale delle sequenze è il prodotto del numero delle serie contenenti solo gli A per il numero delle serie contenenti solo i B , o del primo per il numero delle serie di soli C , o il prodotto del numero delle serie di soli B o di soli C, a seconda di quale sia il tipo con cui si inizia a costruire la sequenza. In generale, se p è il numero dei tipi distinti, il numero delle sequenze possibili è il prodotto del numero di tutte le serie composte da elementi dello stesso tipo meno una – non importa quale.

Vediamo ora di ragionare in generale. Supponiamo di considerare sequenze contenenti k_i termini del tipo A_i , tali che $k_1 + k_2 + k_3 = n$ e $\max\{i\} = p$. Costruendo la sequenza a partire dai termini del primo tipo, il numero delle sequenze si ottiene per iterazione: si calcola il numero delle serie contenenti k_1 elementi A_1 che è uguale a $C_{n\,,\,k1}$ cioè $\binom{n}{k_1} = \frac{n!}{(n-k_1)! \cdot k_1!}$ per il numero delle serie contenenti k_2 elementi A_2 che è dato da $C_{n\,-\,k1\,,\,k2} = \binom{n-k_1}{k_2} = \frac{(n-k_1)!}{(n-k_1-k_2)! \cdot k_2!}$ ... per il numero delle serie di k_i elementi A_i cioè $C_{k\text{-}Si\,,\,ki} = \binom{n-S_{i-1}}{k_i} = \dfrac{(n-S_{i-1})!}{(n-S_i)!\cdot k_i!}$ dove con S_i indichiamo la somma $k_1 + k_2 + ... k_i$, posto $S_0 = 0$, fino a $i = p$. Facendo il prodotto tra due fattori consecutivi $\dfrac{(n-S_{i-1})!}{(n-S_i)!\cdot k_i!}\cdot\dfrac{(n-S_i)!}{(n-S_i-k_{i+1})!\cdot k_{i+1}!}$ si semplifica il numeratore del fattore i –esimo con l'identico termine al denominatore del fattore precedente, per cui il numeratore del prodotto di tutti i fattori sarà $n!$ in quanto il numeratore del primo fattore non può venire semplificato. L'ultimo fattore corrisponde a $i = p$, per cui al denominatore $n - S_p = 0$ con $0! = 1$, mentre al numeratore si ottiene $(n - S_{p-1})! = (n - k_1 - k_2 - ... - k_{p-1})! = k_p!$ che si semplifica con $k_p!$ al denominatore, coerentemente col fatto per cui il calcolo dipende dai primi $p - 1$ termini. Formalmente viene conservato nella formula generale del coefficiente multinomiale, in quanto permette di esprimerlo in forma simmetrica rispetto a tutti i valori assunti dall'indice i , compreso p. Quindi il denominatore totale sarà il prodotto $k_1!\, k_2! \dots k_p!$ Si ottiene infine che il numero delle sequenze è dato da

$$C^{n,p}_{k1,k2,\dots kp} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!}$$

Ne segue

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{ki=0}^{n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} x_1^{ki} x_2^{k2} \dots x_p^{kp} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{p} k_i = n \text{ e } p = \max\{i\}$$

Questa formula è nota come *Teorema multinomiale.*

Il termine $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!}$ è solitamente indicato col simbolo $\dbinom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p}$.

Una **seconda dimostrazione**, variante della precedente, è la seguente.

Il metodo più semplice è probabilmente quello di calcolare i coefficienti $C^{n,p}_{k1,k2,\dots kp}$ dei monomi $x_1^{k1}\, x_2^{k2} \dots x_p^{kp} = \prod_{i=1}^{p} x_i^{k_i}$ in base al numero delle permutazioni semplici di una lista di n posti, avendo a disposizione un totale di n oggetti non tutti identici, distribuiti tra p sottoinsiemi A_i in modo tale che k_i oggetti appartengano ad A_i e $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$. Dimostriamo che i singoli monomi, calcolati in base alla proprietà distributiva, sono in corrispondenza biunivoca con le permutazioni di un insieme di n elementi. Infatti, ogni monomio corrisponde alla scelta di una sola delle x_i da ognuno dei fattori identici

$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i$; ogni scelta equivale a una lista di n caselle ognuna delle quali può essere occupata da una sola delle x_i . Per esempio, sviluppando $(x_1 + x_2 + x_3)^5$ si ottiene $x_1^2 x_2^1 x_3^2$ con la scelta [ogni casella corrisponde ad uno dei fattori $(x_1 + x_2 + x_3)$]

x_1	x_3	x_2	x_1	x_3

oppure con

x_2	x_3	x_3	x_1	x_1

In ciascuna di queste liste ognuno dei termini x_i può comparire k_i volte, con $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$. Due liste contenenti gli stessi elementi distribuiti secondo ordini differenti sono due permutazioni distinte dello stesso insieme di n elementi. Se questi elementi fossero tutti identici, il numero delle permutazioni sarebbe $n!$. Nel nostro caso, k_i elementi sono uguali a x_i e quindi indistinguibili. Una lista contenente k_i elementi x_i si trasforma in se stessa scambiando tra di loro due variabili con lo stesso indice i, p.es. [x_1 x_1 x_2 x_3] non varia se scambiamo tra di loro i due termini x_1, mentre si genera una lista distinta scambiando tra di loro due variabili x_i e x_j contrassegnate da indici diversi: p.es. [x_1 x_1 x_2 x_3] è distinta da [x_1 x_2 $x_1 x_3$] ma entrambe le liste corrispondono allo stesso monomio.

Il numero delle liste distinte contenenti k_i elementi identici x_i tali che $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$ è il rapporto tra il numero di tutte le possibili permutazioni di un insieme $\boldsymbol{I_n}$ contenente n termini identici e il numero di tutte le permutazioni dei k_i elementi di ciascuno dei p sottoinsiemi la cui unione è $\boldsymbol{I_n}$, che è dato dal prodotto di tutti i fattoriali $k_i!$ con $1 \le i \le p$, per cui si ottiene

$$C^{n,p}_{k1,k2,...kp} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_p!} \quad ; \sum_{i=0}^{p} k_i = n \text{ e } p = \max\{i\}$$

Una terza **dimostrazione di tipo ricorsivo** è la seguente. Consideriamo la somma di p variabili x_i come somma delle prime $p - 1$ scelte arbitrariamente e dell'ultima:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n \quad = \quad [(x_1 + x_2 + ... + x_{p-1}) + x_p]^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sum_{i=1}^{p-1} x_i)^k \cdot x_p^{n-k}$$

Poniamo $(\sum_{i=1}^{I} x_i)^k \quad = \quad P_I^k$ e cerchiamo una formula ricorsiva di $(\sum_{i=1}^{p} x_i)^n = P_p^n$.

Sappiamo che $P_p^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot P_{p-1}^k \cdot x_p^{n-k}$; dopo un numero di passaggi uguale a i si ottiene

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{p-1}^k \cdot x_p^{n-k} \quad = \quad \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{k_1} ... \sum_{k_i=0}^{k_{i-1}} \binom{n}{k_1} \cdot \binom{k_1}{k_2} \cdot ... \cdot \binom{k_{i-1}}{k_i} \cdot P_{p-i}^{k_i} \cdot x_p^{n-k_1} \cdot x_{p-1}^{k_1-k_2} \cdot ... \cdot x_{p-i+1}^{k_{i-1}-k_i}$$

al secondo membro, k è stato sostituito da k_1 , k_2 ecc...

Formalmente, nello sviluppo passo a passo di P_p^n l'ultimo coefficiente binomiale a destra $\binom{k_{i-1}}{k_i}$ è associato a P_{p-i}^{ki} , cioè all'i-esimo passo, e al fattore $x_{p-i+1}^{k_{i-1}-k_i}$.

Il calcolo si arresta quando si arriva a $P_1^{k_{p-1}} = x_1^{k_{p-1}}$ cioè a $i = p - 1$, generando la formula

$$\sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{k_1} ... \sum_{k_{p-1}=0}^{k_{p-2}} \binom{n}{k_1} \cdot \binom{k_1}{k_2} \cdot ... \cdot \binom{k_{p-2}}{k_{p-1}} \cdot P_1^{k_{p-1}} \cdot x_p^{n-k1} \cdot x_{p-1}^{k1-k2} \cdot ... \cdot x_2^{k_{p-2}-k_{p-1}}$$

ma per evidenti ragioni formali sostituiamo a $P_1^{k_{p-1}}$ il suo valore $x_1^{k_{p-1}}$ e finalmente si ottiene

$$P_p^n \quad = \quad \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\dots\sum_{k_{p-1}=0}^{k_{p-2}}\binom{n}{k_1}\cdot\binom{k_1}{k_2}\cdot\ldots\cdot\binom{k_{p-2}}{k_{p-1}}\cdot\cdot x_p^{n-k1}\cdot x_{p-1}^{k1-k2}\cdot\ldots\cdot x_2^{k_{p-2}-k_{p-1}}\cdot x_1^{k_{p-1}}$$

Si può notare che la somma di tutti gli esponenti delle x_i è $n - k_1 + k_1 - k_2 + \ldots + k_{i-1} - k_i + k_i + \ldots = n$.

Per eseguire il calcolo, consideriamo il prodotto dei coefficienti binomiali. Abbiamo

$$\binom{n}{k_1}\cdot\binom{k_1}{k_2} \quad = \quad \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{k_1!}{(k_1-k_2)!} \quad = \quad \frac{n!}{(n-k_1)!\cdot(k_1-k_2)!}$$

; quindi, tutto il prodotto

$$\binom{n}{k_1}\cdot\binom{k_1}{k_2}\cdot\ldots\cdot\binom{k_{p-2}}{k_{p-1}}$$

con $k_{i+1} \leq k_i$ è uguale a

$$\frac{n!}{(n-k_1)!(k_1-k_2)!\cdot\ldots\cdot(k_{p-2}-k_{p-1})!}$$

Ponendo ora $n - k_1 = j_1$, $k_1 - k_2 = j_2$, $k_{i-1} - k_i = j_i$ e $k_{p-1} = j_p$ otteniamo

$$P_p^n \quad = \quad \sum_{j_1=n}^{0}\sum_{j_2=n-j_1}^{0}\dots\sum_{j_{p-1}=n-S}^{0}\frac{n!}{j_1!j_2!\ldots j_{p-1}!}\cdot x_p^{j_1}\cdot x_{p-1}^{j_2}\cdot\ldots\cdot x_2^{j_{p-1}}\cdot x_1^{j_p}$$

nella quale S è la somma di tutti gli esponenti da j_1 a j_{p-2} incluso.
Infatti le differenze $k_{i-1} - k_i$ sono comprese tra un minimo = 0 e un massimo = n e lo stesso vale per l'esponente di x_i , cioè j_p . La forma del risultato può essere migliorata sostituendo gli indici inferiori p $p-1$ .. .2 1 rispettivamente con 1 2 ... $p-1$ p , cioè sostituendo i con $p - i + 1$ e ponendo nelle sommatorie 0 come indice inferiore e n come indice superiore, con la limitazione $j_1 + j_2 + \ldots + j_k \leq n$ per $k < p$ o $\sum_i^p j_i = n$.

Utilizzando il simbolo $\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ per i coefficienti multinomiali, abbiamo infine

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n \quad = \quad \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots j_p=0 \\ \sum j_i = n}}^{n}\binom{n}{j_1, j_2, \ldots j_p}\cdot\prod_{i=1}^{p}x_i^{j_i}$$