

UN PARADOSSO DI ZENONE

Achille e la Tartaruga

Ezio Fornero

Forse i paradossi di Zenone sono i più famosi della storia. In generale, filosofi e storici della Matematica li hanno intesi come *paradossi contro il movimento*, nel senso che Zenone e la scuola di Elea li avrebbero utilizzati per negare la realtà del moto, dimostrando la sua impossibilità da un punto di vista logico (il movimento di per sé implicherebbe contraddizioni logiche). Se le cose stessero così si potrebbe dedurre che il mondo "*reale*" non potrebbe essere compreso dal pensiero razionale, o che la verità sarebbe puramente ideale e i fenomeni sarebbero solo fuorvianti apparenze, ecc, ma non è questo il problema dei paradossi di Zenone contro il movimento. Alcuni hanno preso sul serio le argomentazioni di Zenone (e lo fanno al giorno d'oggi, pure, di modo che di tanto in tanto qualcuno se ne viene fuori con una soluzione del *paradosso di Achille e della Tartaruga*, come se il problema fosse giustificare il movimento - non la ricerca di qualche errore nel ragionamento ...).

Prima di procedere, vediamo *Achille e la Tartaruga*.

Achille (un campione delle gare di corsa) sta rincorrendo la Tartaruga, alla quale ha concesso un vantaggio iniziale. Egli raggiunge il punto dal quale la Tartaruga ha iniziato la corsa, ma nel frattempo questa ha percorso un certo tratto. Achille copre questa distanza e di nuovo, nel frattempo, la tartaruga percorre un'ulteriore distanza. Così, quando Achille arriva ad una posizione già raggiunta dalla Tartaruga, questa raggiunge una posizione ancora più avanzata, e Achille non potrà mai superare la Tartaruga.

Questo ragionamento equivale a costruire una serie infinita di punti, tale che se ABC sono tre punti consecutivi della serie, la Tartaruga copre la distanza BC , mentre Achille percorre AB . Chiamiamo "*successione di Zenone*" questa infinita serie di punti, e *punti di Zenone* e *istanti di Zenone* i punti e i corrispondenti istanti appartenenti alla successione.

Per semplicità, supponiamo che sia Achille sia la Tartaruga corrano a velocità costante.

Per discutere l'argomento è meglio stabilire alcune ipotesi. In effetti, un paradosso è o una contraddizione, o un enunciato in disaccordo con il senso comune o con l'evidenza. Ciò significa che non necessariamente un paradosso contraddice formalmente una proposizione che abbiamo stabilito o dimostrato esser vera col ragionamento, ma può essere anche frutto di una discussione logicamente corretta e completa in conflitto con l'evidenza o col senso comune. Quindi dobbiamo chiarire quali sono le premesse da cui iniziare la discussione. L'infinito è implicito nelle argomentazioni di Zenone, e io interpreto ciò come un'ammissione che lo spazio e il tempo sono *continui* nel senso moderno del termine, o almeno che entrambi sono *densi* (un insieme ordinato è *denso* se tra ogni due elementi distinti dell'insieme ce n'è un terzo). Inoltre, spazio e tempo contengono unità minime indivisibili equivalenti fra loro, come punti e istanti. In breve, sembra che la formulazione del paradosso di Zenone richieda [almeno] queste due premesse generali, e che la distanza tra Achille e la Tartaruga diminuisca in modo uniforme nel tempo.

Dovrebbe essere chiaro che *sotto queste ipotesi* non vi è alcun paradosso, perché *il ragionamento di Zenone non prova la conclusione affermata*. Per dimostrare che Achille non supera la Tartaruga è necessario dimostrare che *non tutte le posizioni da lui raggiunte durante l'inseguimento appartengono a un segmento finito*, o che non esista un istante seguente ogni istante in cui Achille raggiunge una posizione che la Tartaruga abbia già superato. I matematici direbbero che *la successione di Zenone dovrebbe divergere all'infinito* per dimostrare che Achille non raggiungerà

mai la Tartaruga. *Non è sufficiente che i punti e gli istanti di Zenone (definiti come sopra) siano infiniti.* Questo è un punto solitamente trascurato.

Nel considerare questo paradosso, di solito si concentra l'attenzione sulla serie infinita di distanze che Achille deve coprire rincorrendo la Tartaruga. Le serie di posizioni, distanze, istanti e intervalli di tempo che possiamo prendere in considerazione sono banali: è ovvio che ciascuna di queste serie è composta da infiniti termini, perché qualsiasi distanza o intervallo di tempo contiene infiniti punti, o, rispettivamente, istanti. Questo è vero anche per l'intero segmento che Achille deve percorrere prima di superare la Tartaruga. Questo paradosso non è più paradossale che coprire qualsiasi distanza, passando attraverso infiniti punti [privi di estensione].

Ancora più banale è che il punto in cui Achille raggiunge la Tartaruga non può appartenere alla successione di Zenone: questa contiene solo i punti che la Tartaruga ha già superato precedendo Achille ed è chiaro che Achille non raggiunge la Tartaruga se si considerano solo questi: l'assurda conclusione di Zenone è già implicita nella scelta di una serie adeguata di punti. Così, il paradosso di Zenone ha una natura *dialettica*: esso appartiene alla retorica. Nel contesto storico della Grecia antica non vi era una chiara distinzione tra logica [formale] e dialettica, e la discussione fra le parti procedeva solitamente come nei dialoghi di Platone, dove un punto di vista (quello di Socrate, ovviamente) vince sull'altro, mostrando che quest'ultimo conduce ad una contraddizione. La definizione di una chiara distinzione sistematica tra ragionamento corretto e sofisma è evidente in Aristotele; prima, dialettica e ragionamento deduttivo convivono mescolandosi assieme.

Da questo punto di vista, i paradossi contro il movimento sembrano avere anche un *carattere psicologico*. Il paradosso è uno strumento fondamentale del metodo dialettico.¹

Tuttavia, vi è anche un aspetto matematico che implica di per sé qualcosa di paradossale, perché l'argomento di Zenone coinvolge *somme di infiniti termini tendenti a zero*.

Al fine di chiarire tale questione, prendiamo in considerazione il problema da un punto di vista matematico. Abbiamo iniziato prendendo in esame la successione di *punti* tale che il suo primo punto è la posizione da cui la Tartaruga parte, il secondo quella che la Tartaruga raggiunge quando Achille arriva alla precedente, *e così via*. Sia x_n la posizione della tartaruga nel momento in cui Achille raggiunge x_{n-1} , quindi per tutti i termini abbiamo $x_n > x_{n-1}$. Ci sono infiniti termini x_n , e questo è l'unico risultato dell'argomentazione di Zenone, e sembra terribilmente banale. Come si è visto prima, per provare la sua conclusione paradossale deve essere $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$, che non si può ottenere solo sapendo che Achille deve superare infiniti punti per raggiungere la tartaruga.

Ogni punto x_n corrisponde ad un certo istante t_n , così abbiamo anche una successione (intendendo con successione un insieme infinito in corrispondenza biunivoca con i naturali) di termine generale t_n . Inoltre, abbiamo anche una successione di distanze consecutive δx_n con $\delta x_n = x_{n+1} - x_n$ e una successione di intervalli di tempo consecutivi $\delta t_n = t_{n+1} - t_n$. Se Achille non può superare la Tartaruga, come Zenone afferma, allora la somma di tutti i termini di entrambe le successioni deve essere infinita (la distanza che Achille copre prima di raggiungere la Tartaruga sarebbe infinita), altrimenti entrambe le somme devono essere finite. *Per provare la conclusione di Zenone, il che sarebbe effettivamente un paradosso, bisogna che si verifichi il primo caso.* Qui sembra esservi effettivamente una difficoltà matematica, perché può apparire strano che una somma di infiniti termini possa essere finita, anche quando la successione di questi termini è decrescente. In realtà, anche questo problema è facilmente risolvibile (a proposito: c'è una tendenza molto comune ad impiegare la nozione di limite di una serie numerica per risolvere i paradossi di Zenone. Non vi è alcuna reale necessità di procedere in questo modo, ma in molti casi l'infinito implica paradossi effettivi, quindi può essere utile avvalersi di nozioni avanzate in modo da eliminare qualsiasi dubbio).

In questo caso, l'infinito implica la seguente domanda: come può Achille raggiungere la Tartaruga, se è costretto a passare attraverso infiniti punti? La nostra mente si concentra sull'infinito e si perde in se stessa immaginando che Achille debba attraversare infinite posizioni per raggiungere la Tartaruga ... come se dovesse eseguire una procedura, in cui ogni passo ha bisogno di tempo. Achille non costruisce lo spazio o il tempo - i punti x_n e gli istanti t_n già esistono e nessuno deve costruirli, i singoli termini della successione di Zenone non sono passi di una procedura eseguibile. *L'unica cosa che dobbiamo verificare è se una somma di infiniti termini può essere finita.*

Si pensi ad una serie di segmenti consecutivi sulla stessa linea, in modo tale che ogni segmento sia la metà dell'immediato predecessore. La somma di tutti i segmenti non può essere superiore al doppio del primo. In Matematica si dimostra facilmente che nel caso di una serie infinita la somma di tutti i segmenti è solo il doppio del primo, facendo uso della nozione di limite, dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0}^n \frac{1}{2^n} = 2.$$

La nozione di limite è implicita anche nell'idea di una quantità sempre più

piccola, cioè *tendente a zero*, come i matematici dicono; infatti, impiegando i limiti tutte le successioni e le serie che abbiamo sopra considerato convergono a limiti finiti, in modo da concludere la questione. Ma è chiaro che, se la somma di un numero finito di distanze δx_n percorse da Achille è in ogni caso inferiore al doppio della prima, la somma di tutte le distanze (che sono una infinità) non può essere infinita.

Tuttavia, anche di recente qualcuno ha cercato di risolvere il paradosso, proponendo soluzioni originali. Una di queste consiste nel discutere la struttura dello spazio su scala estremamente ridotta. La difficoltà potrebbero sorgere nel momento in cui si ammette che lo spazio è indefinitamente divisibile, perché ciò dovrebbe implicare l'infinito, ma in realtà lo spazio non è un *continuum*, e noi non avremmo bisogno di risolvere il paradosso. Ora, è ragionevole supporre che su dimensioni estremamente piccole le proprietà dello spazio siano diverse dagli assiomi che i matematici e i fisici comunemente usano, ma non è questo il nucleo della questione, dal momento che *la divisibilità indefinita dello spazio non implica le conclusioni di Zenone*, mentre, al contrario, *l'argomentazione di Zenone esige la divisibilità indefinita dello spazio.*

Tuttavia, può essere che il significato di questo pseudo-paradosso sia alquanto diverso dall'interpretazione tradizionale. Se l'infinito è il problema e dato che l'infinito è implicato dalla divisione indefinita dello spazio, allora può essere che gli argomenti di Zenone contro il movimento avessero *anche* lo scopo di opporsi alla nozione di divisibilità indefinita. In realtà, gli antichi matematici greci evitavano di introdurre l'infinito, per quanto possibile. E' molto probabile che i paradossi di Zenone avessero uno stretto rapporto con la scoperta degli *incommensurabili* dovuta ai Pitagorici, e - da questo punto di vista - avrebbero avuto una funzione niente affatto trascurabile in Matematica.

Perché i Greci evitavano di impiegare l'infinito? La risposta più probabile è nel *carattere costruttivo dei loro metodi*. La Geometria ebbe origini pratiche; pur considerando che la nascita del pensiero astratto e della dimostrazione è relativamente antica, per molti secoli i Greci furono legati alla rappresentazione visiva delle figure e i loro metodi consistevano prevalentemente in costruzioni geometriche. Ora, una costruzione consiste sempre di un numero finito di passi, anche se è possibile *in linea di principio* ripetere un passo tante volte quante vogliamo: così, possiamo *operativamente* dividere un segmento in due parti, e bisecare entrambe n volte, ma non possiamo farlo infinite volte. Tuttavia, nulla vieta di immaginare che un segmento sia composto da una serie *infinita*, il primo segmento della quale è la metà dell'intero segmento, il secondo metà del primo, ... l' n -esimo la metà del suo predecessore. Così l'intero segmento è *idealmente* diviso in parti infinite, ma ovviamente è impossibile realizzare *materialmente* una tale costruzione. Vi è una forte somiglianza

tra costruzioni geometriche e algoritmi: un algoritmo deve essere una *procedura finita*, eseguibile tramite un numero finito di istruzioni in un tempo finito. La divisione indefinita è operativamente impossibile, e in ogni caso sembra priva di senso. Tuttavia, le quantità incommensurabili dimostrano che un segmento minimo non esiste, quindi *per evitare contraddizioni* lo spazio deve essere costituito da infiniti punti privi di estensione. Ciò è paradossale, dato che non è possibile costruire una linea mettendo insieme oggetti privi di estensione. Percorrendo una distanza, dobbiamo passare attraverso infiniti punti, ma non è come contare fino ad infinito in un tempo finito, o come eseguire le infinite istruzioni di una procedura non terminata, perché *punti e istanti non hanno dimensione*. Il paradosso sta nel comporre infiniti termini in un risultato finito. La divisione indefinita dello spazio, i punti senza estensione e le somme finite di infiniti termini sono inevitabili per formulare il paradosso di Achille e della Tartaruga e sono, inoltre, gli strumenti per risolverlo.

Dobbiamo notare che Achille non può raggiungere la Tartaruga, se la sua velocità decresce rispetto a quella della Tartaruga secondo alcune particolari leggi orarie. È meglio trattare il caso come un movimento decelerato, assumendo la Tartaruga in quiete mentre Achille le corre incontro. Si supponga che la sua velocità relativa V sia inversamente proporzionale al tempo elevato ad α , con

$$0 < \alpha < 1: \quad V = \frac{k}{t^\alpha}$$

$$\text{Lo spazio che Achille copre nel tempo } t \text{ è } = \int_0^t \frac{k}{x^\alpha} dx = \frac{k}{1-\alpha} t^{1-\alpha} . \text{ Il } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k}{1-\alpha} t^{1-\alpha} = \infty \text{ se}$$

$0 < \alpha < 1$, quindi in questo caso Achille non raggiunge la Tartaruga.

Infine, prendiamo in considerazione il problema della struttura dello spazio da un punto di vista concettuale. Storicamente, le nostre idee sullo spazio derivano dall'osservazione e dalla Geometria. Fino ad un certo punto, le proprietà matematiche dello spazio riflettono l'esperienza comune, ma alcune hanno un fondamento teorico. E' il caso della divisibilità indefinita dello spazio, che possiamo definire con l'assioma della divisibilità, secondo il quale, data una grandezza Q e per ogni numero [naturale] n , vi è un sottomultiplo S di Q tale che $n S$ è uguale a Q . In breve, non esiste un sottomultiplo minimo di una determinata quantità, quindi qualsiasi quantità è divisibile all'infinito (ciò si riferisce a segmenti, superfici, volumi, angoli ... in Fisica abbiamo quantità discrete come la carica elettrica, ecc.). Dobbiamo ammettere la divisibilità infinita dello spazio al fine di evitare contraddizioni con l'esistenza di quantità incommensurabili, come il rapporto tra diagonale e lato del quadrato.

Naturalmente, tutti i concetti geometrici sono enti ideali: punti, linee, superfici in Geometria descrivono le proprietà degli oggetti materiali, ma sono in sé ideali. Quindi, lo sviluppo della geometria e della matematica si è svolto secondo il *principio di non contraddizione*: la struttura dell'intero sistema è un insieme coerente di relazioni logiche. Cosa si intende realmente quando si parla di spazio? Ci riferiamo ad uno *spazio geometrico*, che è un modello di un sistema di assiomi, o allo *spazio fisico* le cui proprietà intrinseche non conosciamo completamente e che cerchiamo di descrivere con un modello geometrico? Sembra che la seconda risposta sia quella vera, dal momento che i fisici hanno sostituito lo spazio euclideo-newtoniano con lo spazio-tempo curvo della Relatività Generale per ottenere una migliore teoria della gravitazione; quindi, gli scienziati devono scegliere il miglior modello geometrico in base ai dati sperimentali. Questo conduce all'idea che lo spazio abbia una struttura intrinseca. Tuttavia, *in pratica*, proprio perché lo spazio fisico è inconoscibile in sé, possiamo solo studiare le proprietà dei modelli che utilizziamo per approssimare

lo spazio reale. Inoltre, in ogni caso le proprietà, la struttura, le relazioni, ecc sono *esseri ideali*, anche se si fa riferimento a qualcosa di "reale".

Dobbiamo pensare lo spazio "reale" non come un oggetto definito, ma piuttosto come un sistema di proprietà o, meglio, di assiomi che possiamo stabilire evitando contraddizioni tra gli assiomi stessi e tra assiomi e osservazioni. Per esempio, il paradosso di Zenone ci mostra che il *continuum* è necessario per individuare il punto in cui Achille raggiunge la Tartaruga. Per definire questo punto (e l'istante corrispondente) si può usare il *postulato di Dedekind*; possiamo cioè definirlo come *elemento di separazione di due insiemi contigui di punti*. Il Postulato di Dedekind si applica agli insiemi continui e viceversa ogni insieme continuo (nel senso matematico del termine) lo soddisfa; secondo questo assioma la retta è l'unione di due semirette tali che non abbiano punti in comune, quindi la loro origine comune deve appartenere ad una sola delle due. Consideriamo la linea del moto. Si pensi alla semiretta che contiene *solo* tutti i punti di Zenone definiti come sopra e tutti i punti precedenti, escludendo tutti quelli che seguono tutti i punti di Zenone. Quindi, il punto in cui Achille raggiunge la Tartaruga non appartiene a questa semiretta: deve appartenere all'altra. Questo punto è l'unico elemento di separazione tra l'insieme dei punti in cui Achille insegue la Tartaruga e quello dei punti in cui la precede avendola superata. Possiamo anche notare come tale definizione non implica *esplicitamente* un limite, anche se il punto così definito è il punto limite della successione di Zenone, dato che un insieme continuo è costituito da tutti i suoi punti limite. Ma, da un punto di vista matematico, il nucleo della questione è il *continuum*, che è stato introdotto nella Geometria già con gli *incommensurabili*. Possiamo dire che *il paradosso di Zenone ebbe, per quanto riguarda lo spazio e il movimento, lo stesso significato del rapporto tra diagonale e lato del quadrato*.

Come risultato di questa analisi, possiamo concludere che ogni ragionamento sullo spazio, movimento, ecc. è fortemente influenzato dal sistema di assiomi che abbiamo, spesso implicitamente o involontariamente, utilizzato nella discussione. Tuttavia il sistema utilizzato non può essere arbitrario: esso deve soddisfare il principio di non contraddizione, e contenere tutte le premesse necessarie per definire in modo chiaro il problema. Come abbiamo visto sopra, il paradosso di Zenone esige l'infinito e non può essere esaminato senza le serie infinite e la divisibilità indefinita dello spazio. Ciò vale per ogni argomentazione nella quale sono coinvolte espressioni come "e così via ...", che implicitamente allude ad una serie infinita di passaggi senza usare la parola "infinito". L'argomentazione di Zenone si basa sull'infinito e la sua soluzione pure.

Il pensiero greco antico è in parte frainteso o sconosciuto, soprattutto nel caso dei Presocratici. Quindi è possibile che ci sfugga il senso di alcuni frammenti e, più in generale, il significato complessivo del pensiero più antico. Soprattutto, non sappiamo abbastanza sui veri scopi e implicazioni delle forme di conoscenza lontane dalla nostra mentalità. Quindi è lecito esprimere qualche dubbio sul significato dei paradossi e della dialettica nella Grecia antica. I paradossi di Zenone sono apparentemente così assurdi da far pensare che fossero solo dimostrazioni di abilità dialettica, per stupire il pubblico o per vincere gare verbali contro qualche sfidante, a meno di non ritenere per vera l'interpretazione tradizionale, secondo cui l'obiettivo di queste argomentazioni fosse solo dimostrare l'impossibilità del movimento ... la qual cosa è priva di senso, a meno che non ci ricordiamo quanto detto prima. Ma può essere - e comunque è molto ragionevole supporlo - che i paradossi avessero soprattutto lo scopo di mettere in discussione alcuni aspetti del pensiero razionale, se portato alle sue estreme conseguenze, per indurre l'ascoltatore a riflettere sul pensiero e sulla realtà. In ogni caso, proprio quello fu l'esito di questo metodo di ragionamento. In questo senso, i paradossi hanno dato un contributo decisivo allo sviluppo della Matematica.

Può essere utile anche la ricerca di analogie in altre civiltà sviluppatesi in parallelo, come quella indiana sotto l'influenza del Buddismo, ma per questa via si potrebbe giungere a conclusioni molto diverse. Dialettica e paradossi hanno avuto un ruolo importante nella tradizione indiana, con diversi obiettivi e risultati, come è avvenuto nella Grecia pre-classica. Alcune correnti di pensiero utilizzarono paradossi o esempi improbabili per condurre l'ascoltatore o il lettore di là del pensiero comune e della ordinaria percezione della realtà, secondo i metodi specifici del Buddismo e del Vedanta. Nagarjuna (2 ° secolo d.C.) impiegò diversi esempi paradossali per infrangere la struttura concettuale del senso comune. Si vedano, ad esempio, le sue *Stanze del Cammino di Mezzo*, dove cercò di distruggere le categorie razionali e i comuni abiti mentali, profondi e radicati, utilizzando solo gli strumenti del pensiero razionale.

