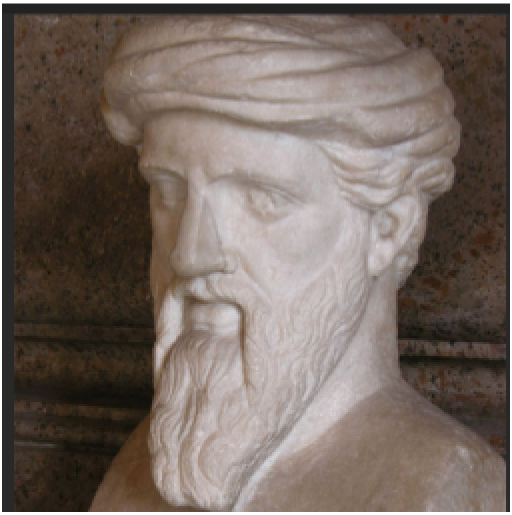
INDAGINE SULLE ORIGINI DELLA MATEMATICA

PROPOSTE PER COMPRENDERE IL PROBLEMA

di

E.F. Scriptor



ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

INDICE

Introduzione	p. 6
Definizione del problema	12
Le premesse	16
La funzione della ‘sintesi’	20
Funzione degli ‘schemi’	24
Gli sviluppi iniziali	28
Teoria e pratica	30
L’algebra	32
La ‘logistica’ di Archita	39
Detti attribuiti ad Archita	42
Logistica, aritmetica, geometria, numero pitagorico	47
La dimostrazione e l’eccezione greca	50
All’origine delle teorie matematiche	54
Simmetria e regolarità	58
Le trasformazioni e gli invarianti	62
Verso la dimostrazione	65
Matematica e dialettica	69
Accrescimento e arresto	77
Il rapporto dei Greci con le culture preelleniche	80

Idee del XX secolo sull'eredità delle culture preelleniche 90

Algebra geometrica 98

Pitagora 110

Il Commento di Proclo al primo libro di Euclide 131

Filosofia e matematica 137

Scoperte attribuite ai pitagorici 160

Una ricostruzione della geometria pitagorica: 164
il teorema dei due retti
altre spiegazioni
postulati dei pitagorici secondo il Reghini
teorema di Pitagora
applicazione delle aree e sezione aurea

Filosofia e matematica pitagoriche: 173
numeri figurati
considerazioni sugli argomenti trattati
quadrati e terne pitagoriche
applicazione delle aree
poliedri regolari
altre considerazioni
medie e proporzioni
analisi numerica
metodi algebrici

Talete e la dimostrazione 230

La matematica babilonese 246

I testi cuneiformi 255

Altri aspetti e risultati delle civiltà mesopotamiche 263

Calcolo delle terne pitagoriche 265

Analisi numerica e numeri figurati 273

Gli Egizi 282

La Grande Piramide 298

Altre proprietà della Grande Piramide 304

Il teorema di Pitagora 308

Evidenze storicamente accertate del teorema di Pitagora 321

Le grandezze incommensurabili 328

La sezione aurea 341

Pentagono e pentagramma 357

Matematica ed estetica 376

I solidi platonici 382

Matematica e armonia: 395
importanza della musica nell'antichità
la scala del 'Timeo'
l'armonia secondo Filolao
l'armonia secondo Proclo
rapporto tra filosofia neoplatonica e pitagorismo
uno schema dell'evoluzione della filosofia matematica presso gli antichi Greci
armonia e moti planetari

il De animae procreatione di Plutarco
Considerazioni sull'aritmetica del 'Timeo' 427
Osservazioni conclusive sui rapporti con le civiltà dell'oriente 439
L'universo immateriale 451
La connessione con l'India 459
Astronomia e matematica nell'antica India 465
Antichi testi matematici indiani 477
Il Baudhāyana Śulbasūtra 481
Problemi aperti 514
Calcolo delle radici quadrate nei Śulbasūtra 520
Il Suàn Shù Shū 524
Il calcolo della radice quadrata nel Suàn Shù Shū 547
Numeri e simboli 551
Figure geometriche e simboli 557
Testi citati 567

Questo saggio non è una ricostruzione della storia della matematica occidentale, anche se in alcuni punti propone delle soluzioni ai problemi relativi ai contributi che i Greci avrebbero ricevuto dalle civiltà del vicino oriente. Il fine è quello di esaminare alcune questioni, delle quali alcune sono tuttora prive di risposte soddisfacenti, e che possono essere esplorate studiandole anzitutto come problemi di matematica.

Le ricostruzioni storico – filologiche lasciano nell'ombra questioni che possono essere meglio indagate attraverso un'analisi matematica. L'aritmetica ha una struttura oggettiva, e lasciandosi guidare da questa si può giungere almeno a formulare delle ipotesi in ambiti non sondabili dalle ricerche degli storici. Tutta la questione dei rapporti tra i Babilonesi e i Greci non può essere studiata se non confrontando i risultati raggiunti, alla luce dei metodi utilizzati soprattutto dagli studiosi del XIX e del XX secolo.

In certi campi, la ricerca storico - filologica è riuscita a fornire sia contribuiti essenziali sia incertezza e confusione, specie per quanto riguarda la figura di Pitagora. Tra le due posizioni estreme, l'accettazione di tutto quanto gli attribuiva la tradizione degli antichi, e il respingimento di quasi tutto ciò che questa accoglieva, la critica si è orientata fortemente verso la seconda, salvo poi ultimamente riconsiderare tutta la questione. In realtà, queste analisi non procedono oltre un certo limite, e forniscono meno informazioni di quante non possiamo ottenere esplorando gli scritti di Proclo e di Platone. Può essere che la continuità che i neoplatonici vedevano tra Pitagora, anzi da Orfeo, e Platone fosse una loro invenzione, ma se vogliamo comprendere perché i pitagorici vedevano nel numero il principio fondante del cosmo dobbiamo comprendere Proclo prima di valutarne la sua posizione rispetto a Platone, e anche, per quanto possibile, confrontarlo con quello che ci è giunto del pensiero di Filolao, il più vicino cronologicamente a Pitagora, seguito da Archita.

La matematica greca ci è ben nota da Euclide in poi. Delle opere scritte dai matematici precedenti sono rimaste frammenti e citazioni, dalle quali possiamo ricostruire un quadro generale abbastanza chiaro ancorché lacunoso, fino all'epoca di Platone; non possiamo valutare l'entità di queste lacune, ma possiamo seguire le ricerche di Eudosso e di altri e riconoscerne i contributi in base alle stesse testimonianze degli antichi. Invece, non sappiamo nulla di preciso sull'epoca precedente Platone, se non che si era giunti alla scoperta degli incommensurabili, cioè che la matematica greca aveva già una precisa struttura ed era andata ben oltre alle scoperte attribuite a Talete. Tutto ciò che precede Platone è essenzialmente congetturale, e questo vale anche per i viaggi di Pitagora e Talete, cui tradizionalmente si faceva risalire gli inizi sia della matematica che della filosofia in Grecia. Non c'è assolutamente nulla che provi che questi viaggi abbiano portato delle conoscenze matematiche in Grecia, e non ne sappiamo di più di quello che ne sapeva Diogene Laerzio.

Questo saggio si articola su alcuni dei problemi intorno all'origine della matematica, intesa come le fasi iniziali documentate degli studi condotti in modo sistematico dai matematici, specificamente geometria, aritmetica, armonia; non ho esplorato l'astronomia, che apparentemente non vi è direttamente implicata, ma che doveva avere avuto una funzione fondamentale; essendo però materia in possesso di sacerdoti o 'saggi', non ne troviamo tracce evidenti nei reperti babilonesi, orientati piuttosto a temi pratici, e nell'aritmetica pitagorica. Fa eccezione il *Timeo*, che merita un'analisi specifica.

Tra le questioni di interesse storico esaminate cito:

a. Il confronto tra 'geometria' e 'logistica' posto da Archita di Taranto. Il significato di questa contrapposizione non è stato chiarito, né mi pare vi siano gli strumenti per poterlo fare. Sono state date delle interpretazioni, ma queste riflettono l'impostazione metodologica dello studioso. Eppure sarebbe importante chiarirne il senso, perché sembra alludere a una separazione in atto tra diversi indirizzi della ricerca matematica greca, p. es. tra un orientamento pratico, 'gestionale' e uno teorico, fine a se stesso, che avrebbe condotto ad Euclide, ma si tratta di una proiezione dello studioso moderno sensibile alla distinzione tra teoria e pratica.

b. Il contributo da parte delle culture che si affacciavano sul Mediterraneo. Invece di guardare solo ai lontani Babilonesi e agli Egizi (delle cui competenze matematiche sappiamo quasi nulla), bisognerebbe porre attenzione a Fenici, Frigi, Lidi e popoli vicini. Bisogna accettare che la matematica greca aveva caratteri peculiari sin dagli inizi, se con questi intendiamo riferirci a Talete e poi Pitagora, e che per quanto riguarda i pitagorici la comune scienza della musica abbia avuto la funzione di collegamento.

c. L'ipotesi dell'algebra geometrica come *trait d'union* con i Babilonesi. Accettata da moltissimi studiosi, ha non pochi punti deboli. La mia impressione è che sia un artificio non documentabile, traente la sua forza dal fatto che ogni problema geometrico è traducibile in algebra; il passaggio opposto è molto meno ovvio. Ma può essere che sia un falso problema: non c'è chiara evidenza che le nozioni, relativamente molto avanzate, registrate nelle tavolette babilonesi del regno antico siano state tramandate fino all'epoca di Nabucodonosor e di Pitagora.

d. La figura stessa di Pitagora, in quanto oggetto di moltissime indagini condotte nel XX secolo, in seguito alle quali si è ulteriormente ridotta la quantità di cose che su di lui si potevano dare per certe o quasi. Ho ritenuto di dare spazio alla biografia di Diogene Laerzio, meno ricca di informazioni non accertabili rispetto a quelle di Porfirio e Giamblico; di quest'ultima ho tenuto conto attraverso il riassunto della Ferguson (2010).

e. L'analisi di alcuni punti qualificanti l'aritmetica nella Mesopotamia del II millennio a.C. Si tratta di un insieme di metodi non banali, che permettevano di risolvere equazioni algebriche facendo a meno del formalismo del calcolo letterale. L'aritmetica babilonese e la geometria greca sono vette che si elevano su un piano fatto di metodi più elementari, basati su scomposizioni e ricomposizioni di figure in geometria, di somme e differenze di frazioni in aritmetica, che troviamo anche tra Greci e Babilonesi, ma che sembrano essere il limite raggiunto nell'India vedica e – forse – in Egitto. Si tratta di orientamenti affatto diversi.

f. L'analisi della matematica pitagorica, intendendo con questo termine i numeri figurati, le proporzioni, le tre medie originarie, i solidi cosmici. I suoi confini sono incerti; Proclo vi inseriva anche l'applicazione delle aree, ma tra l'epoca di Proclo e quella di Pitagora vi è un intervallo di ca. nove secoli.

f. L'analisi dei passi matematici del *Timeo* di Platone, testo fondamentale nel quale si riconoscono aritmetica e cosmologia di matrice pitagorica, forse risalenti a Filolao. Merita attenzione la costruzione della serie numerica che struttura l'anima del cosmo, per l'utilizzo di progressioni geometriche, metodo seguito molti secoli dopo da Pappo, e forse da altri prima di quest'ultimo, per il calcolo delle medie aggiunte alle tre originarie.

Infine, ho dedicato un certo spazio all'astronomia e alla matematica indiana dell'età vedica. Non vi è speranza alcuna di ravvisare nei *Śulba Sūtra* qualche relazione con la matematica greca o quella babilonese, anche se alcuni metodi sono in comune inclusi quelli degli Egizi, ma è inevitabile che culture arrivate a un certo grado di sviluppo (scomposizione di figure piane e solide, frazioni con numeratore unitario, somme e differenze) abbiano elaborato procedure simili. Queste significano solo che la matematica ha carattere universale. A parte considerazioni su contatti culturali insondabili, la matematica vedica è interessante per il suo legame con gli altari sacrificali, o 'altari del fuoco' in funzione della cui edificazione fu elaborata. Bisogna ammettere che pur attraverso procedure elementari riusciva a ottenere risultati di un certo livello, come il calcolo approssimato della radice quadrata di 2.

Ho dedicato un capitolo all'esplorazione dei rapporti numerici contenuti nella Piramide di Cheope. Questo argomento non è generalmente ritenuto serio, a causa soprattutto del proliferare in proposito di teorie fantasiose per lo più inconsistenti, a partire da quelle di Piazzi Smyth; ma realisticamente dobbiamo tener conto della precisione con cui fu edificata, e dobbiamo chiederci perché le fu data proprio quella forma e non altre, e concludere che tale scelta – a meno d'ammettere che fosse affatto casuale o ispirata da qualche divinità – implicava che la sua costruzione dovesse rispettare qualche rapporto numerico.

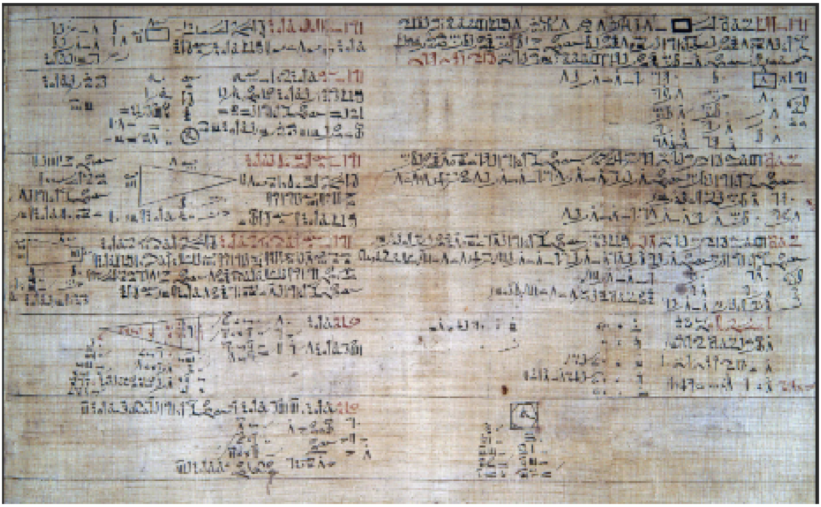
Ho integrato il tutto con alcune osservazioni sugli elementi fondanti della stessa matematica (schemi, simmetrie, regolarità ecc.) che non hanno alcuna pretesa di un'indagine afferente alle scienze cognitive. Si tratta solo di richiamare l'attenzione sugli aspetti non deduttivi e non computazionali che comunque hanno una precisa funzione nella formazione dei concetti matematici e nella possibilità di comprendere la materia.

Ringrazio il sign. Dario Chioli per i suoi preziosi suggerimenti.

Torino, 2 Dicembre 2025.

Ancor prima di indagare se, nella storia, si possa identificare chiaramente un punto di inizio della matematica, è opportuno esaminare se un inizio vi sia, o cosa si intenda. Se per 'matematica' intendiamo un'attività specifica, avente inizialmente scopi ben definiti di tipo amministrativo, commerciale o comunque pratico come la definizione di calendari e l'architettura, si può ravvisare un 'inizio' in epoche variabili a seconda delle culture, quando le abilità e le nozioni di aritmetica e di geometria raggiunsero un sufficiente grado di efficienza. I più antichi reperti giunti fino a noi provengono dall'antico impero babilonese (fin verso il 2000 a.C.) e testimoniano un sistema di calcolo abbastanza avanzato da indurre gli studiosi a descriverlo come 'algebra geometrica'. Di conseguenza dovremmo identificare questo inizio con il sorgere delle antiche civiltà del vicino oriente, dell'India e della Cina, e associarlo alla pratica della scrittura e allo stabilirsi di un sistema di segni utile allo svolgimento dei calcoli. Questa definizione può andar bene, anche perché connessa alla formazione di esperti nel calcolo e nella geometria nei quali possiamo riconoscere i primi matematici. Possiamo osservare che gli oggetti delle matematiche più antiche sono figure che molto difficilmente, o per niente, si riscontrano in natura, come quadrati, rettangoli e poligoni regolari (si possono trovare nei cristalli), ma fondamentali in architettura, agrimensura ecc.; nell'India vedica, la geometria venne sviluppata per la costruzione di altari. Da un punto di vista matematico, l'inizio andrebbe allora posto nel momento in cui gli elementi fondamentali (le direzioni, gli angoli, le distanze, la grandezza, la molteplicità, lo stesso spazio, l'ordine ecc.) sono stati isolati dalla loro presenza negli oggetti sensibili, e considerati in sé prescindendo dall'oggetto materiale, quando un dato grado di organizzazione sociale ha imposto che fossero strumentalmente composti, elaborati, in schemi più complessi. In sostanza, lo sviluppo della matematica sarebbe stato inizialmente incentivato dalla necessità di elaborare una 'scienza della grandezza' applicabile in campi diversi, dal calendario all'agrimensura all'architettura ecc. di per sé non deducibile dalla sola osservazione dei fenomeni naturali. Resta il problema di quali sarebbero gli 'elementi' in questione. Veramente le forme geometriche o il contare sono strutture e attività sviluppate su una base fatta di punti, linee, numeri? La domanda sorge spontanea, quando si osservi che l'ordinamento logico della geometria e dell'aritmetica presuppone una assiomatizzazione, cioè un elenco finito di definizioni e assiomi o postulati, dai quali si possa dedurre tutto il resto, ma che è possibile solo in uno stadio avanzato, e se si pone il problema di una riorganizzazione su basi logiche della materia. Esiste forse una convincente dimostrazione che le forme geometriche più semplici o l'intuizione della successione di unità distinte presuppongano altri elementi più semplici, o non piuttosto che siano espressione della capacità umana di immaginare figure, simmetrie, relazioni di ordine ecc. salvo poi – con l'analisi – riconoscere in esse componenti apparentemente più elementari quali linee, punti ecc. che in realtà sono astrazioni o puri intelligibili? La domanda è filosofica, ma la risposta che possiamo intravedere nella matematica più antica è che questo genere di questioni non venivano poste, dato che i problemi che i matematici dovevano risolvere erano di ordine pratico. In effetti, nelle tavolette babilonesi e nei papiri non troviamo formule o giustificazioni dei metodi spiegati mediante esempi. È infatti estremamente probabile che inizialmente l'arte del calcolo e il disegno fossero parte della manifattura e dell'architettura, oltre all'astronomia, o fossero comunque in stretta relazione con quelle, in funzione 'ancillare'. L'organizzazione e la sistematizzazione della geometria seguirono verosimilmente il metodo dell'*economia di pensiero* fino a quando qualcuno (in Grecia) non cominciò a riflettere sul fondamento dei risultati ottenuti. Intanto però le scienze utilizzavano nozioni accessibili a pochi, generalmente scribi e sacerdoti, che *ipso facto* si distinguevano dal resto in società organizzate gerarchicamente. Il mito assegna l'inizio di questo sapere 'costruttivo' agli dei, ma è chiaro che la scrittura e il disegno ne sono i presupposti necessari. Le attività di tipo matematico (compresa l'architettura *in primis*) hanno carattere ricorsivo: ogni passo compiuto presuppone un risultato precedente. Ma questo va fissato nella memoria, ed è estremamente difficile memorizzare una successione di passaggi in aritmetica o in geometria, specie se si stanno esplorando nuovi campi di indagine; bisogna riflettere su ciò che è stato ottenuto fino ad un certo momento, per farne un nuovo punto di partenza. Non è un caso che la classe delle funzioni calcolabili (eseguibili da un processo meccanico quale la macchina di Turing) coincida con quella delle funzioni ricorsive, questo principio (*Tesi di*

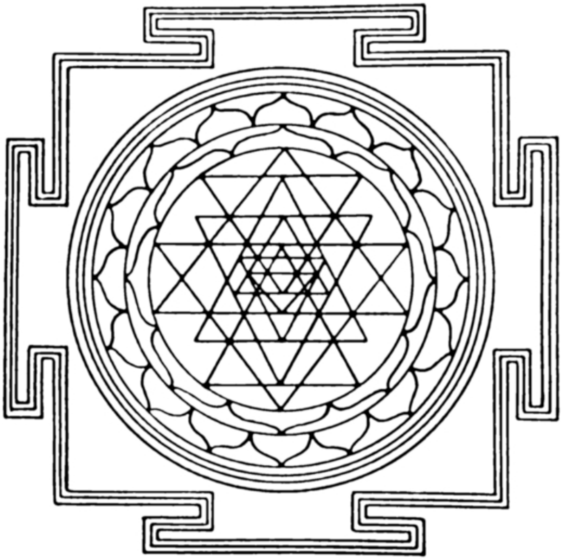
Church-Turing) in fondo descrive il procedere di ogni costruzione, progettazione, ragionamento articolato.



Porzione del papiro Rhind, ora al British Museum.
Rhind papyrus Britannica

Quindi il problema delle origini storiche della ‘matematica’ intesa come attività costruttiva (non nel senso materiale del termine) oltre che ordinatrice di ciò che osserviamo attraverso l’astrazione richiama quello dell’individuazione dei punti di partenza i quali, essendo espressione di specifiche capacità intellettive, vanno ricercati negli strumenti intellettivi di cui i primi ‘matematici’ potevano disporre all’inizio del percorso che avrebbe condotto ad Euclide ed oltre, o, meglio ancora, alle ‘facoltà’ mentali che potenzialmente e realmente, se opportunamente stimolate, condussero ai primi risultati. Infatti le nozioni iniziali non sono sufficienti; i progressi in matematica, e in qualsiasi scienza, non sono passi di una procedura prefissata. Sono necessari un interesse specifico, motivato p.es. da finalità pratiche; ma non è affatto certo che queste fossero le sole. È certo che non era così per i pitagorici. Tuttavia, di questo genere sono i reperti egizi, sumeri e babilonesi, non però i *Śulbasûtra* vedici; ma certi indizi, in particolare gli sviluppi dell’algebra babilonese, denotano un possibile superamento della motivazione puramente utilitaristica. *Erodoto* spiega la nascita della geometria in Egitto con la necessità di misurare i terreni per ristabilire i confini delle proprietà cancellati dalle periodiche inondazioni del Nilo. Infatti la parola greca γεωμετρία significa ‘misura della terra’, ma con questo termine si potrebbero denotare anche la planimetria, o la tassellatura (p. es. per la pavimentazione). Anzi, proprio questa attività implica il disegno corretto di rettangoli, quadrati, esagoni regolari.

L’architettura e la progettazione di città sembrano assai più indicate della definizione dei confini dei terreni a porre attenzione alle figure rettilinee più semplici. Invece *Aristotele* (che però è posteriore ad Erodoto di un secolo), nella *Metafisica*, affermava che la matematica fu sviluppata dai sacerdoti ‘perché alla classe sacerdotale era concesso il tempo libero’; l’affermazione, compatibile con i contatti che Talete e Pitagora avrebbero avuto con costoro, individuerebbe nella ricerca disinteressata la condizione primaria dello sviluppo della matematica presso i Greci, e soprattutto suggerisce che in origine fosse una scienza sacra, patrimonio della classe sacerdotale. Questa congettura trova parziale conferma nell’atteggiamento che i pitagorici avevano verso il numero e la geometria. Certi aspetti del pitagorismo – il culto della *tetractýs*, il simbolo del pentagramma, la segretezza, e in generale il legame con i misteri – difficilmente possono essere spiegati solo con l’entusiasmo prodotto dai risultati conseguiti. Alcune figure regolari, come l’*esagramma* (la stella a sei punte), fanno parte di simboli mistico-religiosi come la *stella di Davide*, l’*anahata* indù, e gli *yantra.* Questi ultimi – oggetti di meditazione o amuleti – possono essere di una complessità notevole, pur essendo costituiti da figure elementari:

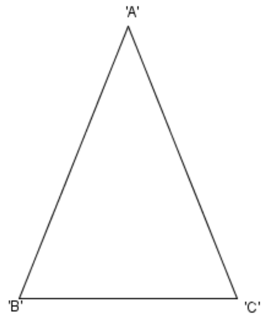


Lo *Śrīyantra* o *Śrīcakra* proprio del culto della dea indù Tripurasundarī. Da Wikipedia.

Per quanto significativi, gli elementi finora evidenziati – la ricorsività, l'utilità, eventualmente la sacralità – non sono affatto sufficienti per individuare quella particolare funzione, o piuttosto sistema di competenze intese come 'abilità matematiche' in un senso non ulteriormente precisabile, che per effetto di circostanze storiche ha innescato tutto il processo. La prima esprime la struttura intrinseca della matematica, non una qualche specifica 'competenza'. La seconda, ovviamente, presuppone la trattabilità, che a sua volta esige abilità tecnica e ingegnosità. L'ultimo aspetto, la valenza religiosa, è invece affatto indipendente dalle strutture proprie della geometria o dell'aritmetica, ma piuttosto si esprime attraverso quelle. In ogni caso, i fondamenti della matematica – non nell’accezione che a questo termine è oggi è attribuita – vanno ricercati nell’intelligibilità degli schemi quali sono figure, con riferimento allo spazio, e procedure, con riferimento al tempo. All’origine di tutto vi sono riconoscimento di forme e relazioni e immaginazione, che fanno parte del potenziale cognitivo umano, non solo in ambito matematico. Le modalità per le quali dalla potenzialità si è pervenuti alla costruzione del sistema euclideo e di tutto il resto (i risultati di Archimede, Apollonio di Perga, Diofanto e altri) non sono compiutamente riconoscibili, se non nella dimensione della cronistoria.

Delle difficoltà al riguardo era ben consapevole il grande filosofo tedesco *Immanuel Kant* (1724 – 1804), che nella sua *Critica della ragion pura* riconobbe l’importanza della ‘sintesi’ nella formulazione dei giudizi matematici. ‘La retta è la linea più breve’ (nella geometria euclidea; Kant non ne considerava altre) è un esempio di *giudizio sintetico a priori*. Il filosofo tedesco esaminò il problema dal punto di vista cognitivo con particolare riferimento alla formulazione dei giudizi, sostenendo che i ‘giudizi matematici’ siano sintetici a priori, cioè non deducibili dall’analisi dei concetti matematici stessi e indipendenti dall’osservazione. Ma se consideriamo la ‘sintesi’ non tanto come l’unione di soggetto e predicato, ma come una sorta di funzione cognitiva primaria, che consente di scoprire intuitivamente relazioni e proprietà, senza dedurle logicamente da altro, la tesi kantiana per la quale la matematica è fondamentalmente sintetica sul piano cognitivo mi pare assai verosimile, specie considerando che gli esempi che il filosofo porta a sostegno della sua tesi si appoggiano all’autoevidenza (senza l’intuizione non è possibile la sintesi). Nello svolgimento di una dimostrazione non troppo complicata in geometria, eseguita rigorosamente passo a passo, quanto viene capito è una successione di evidenze parziali, cioè di percezioni, mentre il ragionamento deduttivo è la connessione di tutte queste evidenze; peraltro, la stessa costruzione di una dimostrazione non può essere generalmente dedotta, e si parla di ‘intuizione’ senza poter chiaramente precisare cosa si intenda con questo termine.

Cerco di rendere chiaro il concetto testé formulato attraverso un esempio. Una delle difficoltà che i giovani studenti di geometria incontrano è la necessità di dimostrare (nel senso euclideo del termine) alcune proprietà che sembrano così evidenti da non non aver bisogno i dimostrazione. E in effetti, talvolta non sono meno chiare degli stessi assiomi (a parte il quinto, che è un po' particolare). Forse, il caso più eclatante è quello del triangolo isoscele.



Un teorema, cioè una implicazione dimostrabile a partire da assiomi e postulati (concetti distinti da Euclide), afferma che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali, AB = AC $\rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Ma l'uguaglianza degli angoli alla base viene percepita immediatamente dall'osservatore. Idem per altre proposizioni elementari, come l'uguaglianza dei due semicerchi tagliati da un diametro, o degli angoli opposti al vertice.

Al concetto di 'autoevidenza' implicito nei precedenti esempi possono opporsi alcune obiezioni a prima vista convincenti: p.

es. ciò che è evidente per qualcuno, può non esserlo per altri. Era ‘evidente’ agli antichi e anche ai moderni fino a Copernico e anche dopo che il Sole gira intorno alla Terra, specie se si fa riferimento al moto diurno. Tuttavia, questo è un genere di evidenza un po’ diverso, basato sull’osservazione ripetuta, sulla ciclicità del fenomeno, sulla forza di ciò che viene considerato vero dalla gran maggioranza; gli esempi in matematica implicano l’immediatezza, la coincidenza di percezione e cognizione. Ciò che intendo significare è il momento in cui la percezione è conoscenza. Socrate ci insegna (nel *Teeteto*) che vanno distinte, ma talvolta sono indistinguibili. ‘Vedo’ significa spesso ‘constato’, ‘so da questo momento’, ‘comprendo, capisco’. ‘Idea’ è connesso a *video*, οἶδα, e l’’idea’ è la radice della conoscenza in Platone. In ambito matematico la soggettività non sembra giuocare un ruolo significativo. Ovviamente, la capacità di comprensione è individuale, dipendendo da molti fattori non solo individuali; però lo sviluppo della matematica non esige l’universalità e l’uniformità delle competenze, ma la possibilità di procedere per sintesi, che al livello più semplice è strettamente connessa all’autoevidenza, o percezione immediata.

A questa possiamo aggiungere l’*insight* (l’*èureka* di Archimede) e, più semplicemente, la congettura fortunata, la nuova idea che può intervenire talvolta in forma improvvisa a diversi livelli: nella soluzione di un problema particolare pratico, o nel creare qualcosa di veramente nuovo. In questo caso si rende palese la capacità di ‘immaginazione attiva’ che non si inserisce in una catena deduttiva, ma sembra insorgere senza derivare da niente altro, e che è il vero fattore di avanzamento in una scienza che non dipende da osservazioni intorno a fenomeni sensibili. Porre l'accento sull'importanza della dimostrazione può dar l'impressione che tutto dipenda da catene deduttive, ma la stesura di una dimostrazione non è essa stessa parte di una catena di deduzioni. Tutti questi fenomeni cognitivi, in ultima analisi legati alla percezione e all'immaginazione, sono punti di partenza, o svolte decisive, o soluzioni di problemi. *Hamilton* comprese come la sua teoria dei quaternioni poteva essere coerente quando gli apparve che il prodotto delle tre unità immaginarie doveva essere uguale a -1. Rivelazioni improvvise potrebbero aver rafforzato presso i pitagorici, e forse presso i sacerdoti, la credenza che la matematica avesse origini divine. Forse, in quegli ambienti di iniziati i sogni, o profonde meditazioni, furono all'origine di molte scoperte; comunque, i progressi più significativi furono intesi come doni degli dei, come dobbiamo ammettere sia per quanto sappiamo dei pitagorici, sia per la testimonianza del sacrificio che fu offerto come ringraziamento per la scoperta del teorema di Pitagora (DIOGENE LAERZIO, *Vite dei filosofi*).

Un elemento importante è lo ‘schema’, inteso come una rappresentazione ideale, un’immagine mentale, o anche una regola, che sostituisca una molteplicità indefinita di casi particolari, secondo un principio di ‘economia di pensiero’. Lo schema, inteso in questo senso, funge da mediatore tra la generalità di un concetto, e più in generale, di una relazione tra concetti, e la particolarità degli elementi (concreti o ideali) rispetto ai quali quel concetto è predicato, ma la sua reale funzione è di quella di raggruppare una molteplicità indefinita riconducendola ad una unità. Questa funzione cognitiva, o piuttosto della rappresentazione, è fondamentale. Vediamo cosa si intende con esempi, presi dall’aritmetica e dalla geometria. Si considerino le seguenti proposizioni: ‘una moneta e un’altra moneta fanno due’; ‘un oggetto e un altro oggetto sono due oggetti’; ‘1 + 1 fa 2’ o, più correttamente, $1 + 1 = 2$. La seconda è una generalizzazione della prima. L’ultima differisce non poco dalle prime due, *manca ogni riferimento alle cose* o, per dirla in altro modo, non descrive le situazioni reali o possibili dove due cose sono messe insieme, ma la forma generale di queste situazioni rimuovendone l’aspetto concreto, empirico. Se l’argomentazione non convince, si osservi come svolgiamo i calcoli. Questi possono riferirsi a questioni concrete (di denaro, per esempio), ma nell’esecuzione del computo non ha alcuna importanza il contesto, pratico o meno, nel senso che il risultato – a prescindere dal significato che possa avere dato il contesto – non dipende da questo, o, detto ancora diversamente, le cifre sono trattate in base alle regole aritmetiche, senza riguardo a ciò che possano significare. Tutte le regole aritmetiche sono vere a prescindere dal contesto, cioè sono puramente sintattiche, anche quando ci limitiamo alle tabelline.

Retrocedendo nella serie delle astrazioni, sono schemi gli stessi numeri cardinali. Essi come base del calcolo sono considerati indipendenti dalle collezioni di oggetti cui sono associati. Nel caso degli ordinali, lo schema è la successione bene ordinata dei distinti, a prescindere dalla specifica loro realtà. Procedendo verso ulteriori astrazioni, sono schemi le proprietà associativa e commutativa. Si può andar oltre, e sostituire ai numeri delle indeterminate, generalmente delle lettere. A partire da schemi di livello inferiore, si possono ottenere schemi di livello superiore, ancor più astratti fino ad abbandonare il dominio dell'intuizione immediata.

In geometria: tutte le figure geometriche sono schemi. Quelle 'primitive' sono elencate nei postulati di Euclide (almeno, così pensavano i matematici fino ad epoche non lontane) e hanno tutte carattere costruttivo eccetto il V postulato, in conformità ai metodi dimostrativi degli *Elementi*. Esse sono intermedie tra i concetti e le immagini sensibili, cioè i disegni e gli oggetti la cui forma richiama per approssimazione gli schemi. Senza lo *schematismo*[1] (funzione che postuliamo per individuare la ca-

[1] In Kant l'espressione *schematismo trascendentale* o *s. dei concetti puri dell'intelletto*, indica, nella *Critica della ragion pura*, l'uso da parte dell'intelletto, ai fini della conoscenza, degli schemi dell'immaginazione, cioè di rappresentazioni pure mediatrici tra sensibilità e intelletto, «omogenee da un lato con le categorie, dall'altro con i fenomeni.

pacità di riconoscere e utilizzare schemi) la matematica (e non solo) è inconcepibile: non vi sarebbe neppure aritmetica. In compenso, lo schematismo trasferisce in un mondo non materiale di modelli astratti ciò che percepiamo e le operazioni che facciamo nell'universo materiale, e viceversa consente di organizzare ciò che percepiamo o immaginiamo e operare in questo attraverso quei modelli. È così conveniente passare attraverso gli schemi, da farli apparire più 'reali' degli oggetti sensibili, che appaiono come esempi, casi soggetti ai condizionamenti di spazio tempo ecc., in un certo senso provvisori. Questo accade nelle fasi di formazione del pensiero matematico, forse non solo in Grecia, e prima ancora che in Grecia.

Inoltre, gli schemi, forme geometriche astratte o relazioni come quelle d'ordine, sono sintesi di proprietà, quali le relazioni tra lati, angoli, rapporti, ecc. ovvero in termini attuali contengono informazione che va esplicitata mediante l'analisi. Questo lavoro, condotto 'a ritroso', è utile alla formulazione degli assiomi o principi dai quali si svilupperà il sistema euclideo e il resto della matematica antica, ed è un'attività che richiede conoscenze e abilità particolare, insomma necessita di 'specialisti'. Si osservi che una forma geometrica definisce un concetto, nella misura in cui le proprietà necessarie e sufficienti per identificare un dato schema – cioè, in pratica, per costruirne un'immagine grafica, o anche solo pensata – identificano una data classe di oggetti. Nel caso di un triangolo, sono necessari e

A mio avviso, gli schemi possono considerarsi parte integrante della matematica, che noi siamo in grado di riconoscere e applicare; non vedo come diversamente la matematica possa avere qualsiasi applicazione.

sufficienti tre punti non allineati, e altrettanti segmenti che uniscono questi punti a due a due. Per una circonferenza, l'equidistanza di tutti i suoi punti dal centro.

Ma, soprattutto, lo schema – da un certo momento in poi – accentra su di sé l'attenzione. Ragionare su schemi consente di non dover più ricorrere sistematicamente alle sole osservazioni, alla costruzione di modelli, alla continua ricerca della prova empirica. Si scopre che regole certe possono essere ottenute trattando gli schemi. Seguendo gli sviluppi di questi processi di astrazione, i matematici greci giunsero ben oltre i risultati ottenuti fin allora, soprattutto perché svincolandosi dal dominio del calcolo e della misura, cioè dall'utilitarismo, fecero della matematica una ricerca disinteressata.

In estrema sintesi: condizioni storiche necessarie agli sviluppi della matematica nell'antichità furono 1. L'affermarsi di un interesse specifico; 2. la conservazione e trasmissione dei risultati ottenuti. Ma, 'prima' dei predetti fattori, vi sono riconoscimento di forme e relazioni, e immaginazione. Possiamo immaginare forme e relazioni, e studiarle. Il vero fondamento va riconosciuto nell'intelligibilità degli schemi, che fa parte del potenziale cognitivo umano.

Come questo potenziale sia stato realizzato storicamente, è questione risolvibile fino ad un certo punto. Le informazioni attendibili pervenuteci sono spesso scarse e frammentarie, e non è facile discriminare tra testimonianze veridiche e aneddotiche. Proclo, Giamblico, Porfirio sono scrittori tardi; la *Storia della matematica* di Eudemo da Rodi (IV – III sec. a.C.) alla quale avrebbero attinto Proclo e altri (BOYER 1991) e un suo compendio non ci sono pervenuti. Diogene Laerzio non sempre è attendibile, e così pure Erodoto, benché abbia scritto nel V sec. Più vicini all'età pitagorica sono Aristotele e contemporanei, e anche Platone attraverso alcuni dialoghi, quali il *Menone* e il *Teeteto*, offre qualche utile informazione. La quasi totalità delle opere originali precedenti Euclide sono andate perdute, ma abbiamo un certo numero di testimonianze sui progressi compiuti a partire dal V sec. in poi. Euclide non serve, se si vuol ricostruire la matematica del VI sec., essendo i suoi *Elementi* un compendio nel quale il materiale è stato riordinato a scopo didattico e di ordinamento logico. Non vi è certezza riguardo all'ipotesi che i primi libri trattino delle questioni che si sarebbero presentate per prime tra i Greci. La similitudine, p. es., con la teoria delle proporzioni, è oggetto del VI libro, ma è impensabile che sia stata storicamente elaborata dopo, e non prima, degli argomenti trattati nei libri precedenti – si pensi all'aneddoto su Talete che misura l'altezza della Grande Piramide. L'interpretazione del II libro come 'algebra geometrica' è controversa. In breve, il procedere della matematica greca è abbastanza noto a partire da Platone in poi, ma è assai ragionevole supporre che tra quanto non è giunto a noi vi siano molte nozioni, e forse anche interi campi d'indagine, di cui nulla sappiamo.

Sono ampiamente documentati i risultati cui pervennero i Babilonesi, grazie alle traduzioni della gran quantità di tavolette d'argilla conservatesi fino a oggi, dalle quali possiamo sapere il grado di conoscenza da essi raggiunto già all'epoca dell'antico impero: in particolare, la soluzione delle equazioni di secondo grado (verosimilmente, possedevano un metodo generale; BOYER) e anche di casi di grado superiore. Ma non possiamo sapere cosa sia stato perduto perché scritto o disegnato su supporti deperibili, forse la maggior parte, forse i risultati più interessanti: il contenuto delle tavolette potrebbe consistere per lo più di esercizi o semplici esempi. È il caso, per altro verso, delle piramidi, o di Stonehenge: la pietra suggerisce che vi siano un sapere ed un fine, ma quali siano sono oggetto di congettura. P. es., i disegni, assolutamente necessari in geometria piana, potevano essere eseguiti anche sulla sabbia, o su supporti deteriorabili; in geometria si fa molto disegno, servono disegni facilmente cancellabili. Lo stesso possiamo presumere per modelli in legno, utilissimi in geometria solida: non è buon metodo assumere, in mancanza di qualsiasi indizio, che a certi risultati si pervenga per pura intuizione dello spazio. Si veda la dimostrazione eseguita da Socrate nella seconda parte del *Menone*: verosimilmente Socrate tracciava figure nella sabbia.

Le testimonianze degli scrittori antichi (scarse per i secoli precedenti il V, ma assai più numerose per quelli seguenti) e dei reperti (assai numerose, almeno per quanto riguarda la matematica mesopotamica) ci dicono che le conoscenze precedenti l'epoca di Talete e Pitagora avevano per lo più fini utilitaristici, come le procedure di calcolo aritmetico e la misurazione, sia tra i Semiti che tra gli Egizi. Lo stesso valeva per la matematica indiana dell'era vedica, che era in funzione della costruzione degli 'altari del fuoco'. Le cose procedettero diversamente presso i Greci. I pitagorici giungevano al punto di considerare sacra la loro τετρακτύς (*tetractýs*) e la decade. Anche le notevoli capacità di calcolo sviluppate dai Babilonesi potrebbero indicare un superamento della fase utilitaristica; ma la distinzione tra 'teoria', elaborazione intellettuale, e 'strumento utile', indirizzata a un risultato concreto, se elevata a regola universale è un'astrazione, non sempre e ovunque è applicabile. Tale distinzione sarebbe stata rivendicata secoli dopo da Euclide, con il famoso episodio dove avrebbe offerto tre monete ad un tale che gli chiedeva cosa avrebbe ricavato di utile dallo studio della geometria (STOBEO, *Antologia*; V sec. d.C. L'aneddoto è anteriore, ma è presumibile che esprima sentimenti di un'età assai posteriore a quella di Euclide). In realtà si pensa ai Greci come a un popolo di idealisti e teorici, in base ad un concetto superficiale del carattere di quel popolo. La rappresentazione della geometria greca come una creazione 'ideale', che sarebbe ascesa ai livelli più elevati avendo abbandonato gli aspetti tecnici, come se fosse avvenuta un'opera di purificazione, è da ascriversi principalmente agli ambienti neoplatonici (p. es., Aristotele avrebbe attribuito ai pitagorici un concetto del numero più legato al mondo sensibile, come se ne fossero le particelle costituenti; questa descrizione corrisponderebbe bene ai numeri figurati e alle figure cosmiche, e Archita considerava la 'logistica' – l'arte di applicare l'aritmetica ai casi concreti – superiore alla geometria) e andrebbe corretta ammettendo che da una certa epoca in avanti si fossero stabilite condizioni particolari, che stimolarono ricerche non più funzionali alle necessità pratiche, ma rivolte all'esplorazione dei principi e delle loro conseguenze, procedendo dal generale al particolare. Matematica e filosofia greca ebbero l'origine in comune, e nel platonismo procedettero insieme. Questo presuppone necessariamente un certo grado di astrazione, nella ricerca tesa a perfezionare la dimostrazione. Basterebbe considerare l'opera di Archimede per definire correttamente il nesso tra 'teoria' e 'pratica'; ma ben prima di Archimede, le figure di Talete e di Pitagora, così come sono state tramandate nell'antichità, non hanno nulla a che vedere con quella di sapienti estranei alle vicende del mondo e agli aspetti pratici. Archita risolse il problema della duplicazione del cubo ma ricoprì importanti incarichi di governo a Taranto. Platone non era un metafisico perso nella contemplazione; si interessava moltissimo di politica, sia pure con scarsa fortuna.

Abbiamo visto che i matematici babilonesi sapevano risolvere equazioni di secondo grado (BOYER, NEUGEBAUER 1952, 1969, *et al.*). Questo è un punto importante, per il modo in cui vi erano riusciti, e per le possibili conseguenze sullo sviluppo della matematica greca. Dai reperti risulta che essi sapevano calcolare le soluzioni di questi tre tipi di equazioni:

1) $x^2 + px = q$;   2) $x^2 = px + q$;   3) $x^2 + q = px$,
dove p e q sono numeri positivi, anche frazionari. Vi sarebbero esempi di tutti e tre i tipi in testi risalenti fino a 4000 anni fa (BOYER). Il terzo era trattato come equivalente al sistema delle due equazioni in due incognite

$$x + y = p \quad \text{e} \quad xy = q$$

È provato che riuscissero a risolvere equazioni nelle quali i coefficienti sono numeri assegnati, secondo procedure conformi alla formula risolutiva generale delle equazioni di secondo grado. A partire dall'età moderna, salvo i casi notevoli dell'equazione monomia $ax^2 = b$, o della spuria $ax^2 + bx = 0$, o qualora si voglia far uso del completamento del quadrato del binomio (metodo sempre applicabile, ma di solito meno conveniente rispetto all'applicazione della formula risolutiva dell'equazione completa), si sostituiscono i coefficienti assegnati al posto delle lettere *a b* c nella formula risolutiva generale già dimostrata una volta per tutte facendo uso del calcolo letterale, e poi si procede con l'esecuzione dei calcoli numerici, conservando il radicale nell'espressione della soluzione. Come si vede, si tratta di un metodo semplice come procedura risolutiva, che non richiede alcuno sforzo mentale salvo il possesso di una certa tecnica di calcolo, ma formalmente alquanto sofisticato con l'impiego di formule completamente letterali, e di simboli che indicano le radici quadrate senza calcolarne il valore. Questo metodo esige un'algebra dei radicali che consenta di trattarli senza dover calcolare i loro valori approssimati, e di operare anche su parametri rappresentati da lettere. Ciò implica l'applicazione di tecniche di calcolo letterale, che in quanto tali prescindono dal loro significato come rappresentanti dei numeri reali. Questo è un punto importante, perché i numeri reali non sono i numeri naturali, o razionali, i soli sui quali si operava nell'antichità ancora prima dei Greci. Vi sono quindi due discontinuità tra la l'algebra odierna e la matematica antica, l'ampliamento dell'insieme dei numeri ai numeri reali e l'unificazione di tutti i numeri nel campo reale, e l'impiego di lettere per denotare le indeterminate.

Gli studiosi del XX secolo, impressionati dal livello dei risultati raggiunti paragonato a quello dell'algebra moderna, hanno sbrigativamente applicato il termine 'algebra' alla tecnica adottata dai Babilonesi, trascurando le differenze tra il modo nel quale li ottennero e i moderni procedimenti; tuttavia, è necessario essere più precisi su questo punto. In matematica il metodo è importante almeno quanto il risultato, ed è assai più significativo di questo per valutare il grado di abilità raggiunto.

'Algebra' deriva dall'arabo *Kitab al-jabr wal mukabala* ovvero *Libro dell'aggiustamento e del porre accanto*, opera del grande matematico *al-Khwārizmī* (IX sec. d.C.), e all'origine consiste nelle regole di trasporto di un termine da un membro all'altro di un'equazione, di cancellazione dei termini uguali presenti a primo e secondo membro e – nella versione moderna – nel calcolo letterale e nell'impiego di numeri reali. Di per sé, le soluzioni proposte dai babilonesi non hanno i caratteri specifici dell'algebra, pur risolvendo problemi che si risolvono con l'algebra moderna. Quando oggi parliamo di algebra, intendiamo non soltanto il significato originario secondo al-Khwārizmī, ma vi comprendiamo il calcolo letterale ed altro: le regole generali del calcolo, i relativi teoremi, tra i quali quelli sulle equazioni algebriche in generale, da cui discendono i metodi per la soluzione dei casi particolari, secondo la modalità *top-down.* Gli antichi matematici preellenici operavano per algoritmi piuttosto che per formule, anche se conoscevano regole che possiamo esprimere mediante formule. Per quanto si possano ottenere gli stessi risultati sia con l'impiego di formule letterali sia attraverso algoritmi con l'impiego solo di numeri, i due metodi non sono la stessa cosa, e appartengono a modi di pensare affatto diversi; se la formula implica parametri e variabili, ed è applicabile alla soluzione di classi di problemi, l'algoritmo consiste di una successione ordinata di passi, e la sua esecuzione implica solo l'utilizzo di numeri; è una categoria aritmetica piuttosto che algebrica.

Le tecniche algebriche sono strettamente connesse alle quantità negative, che i Greci non conoscevano affatto, né sembra le conoscessero i Babilonesi, e alle operazioni con i radicali. Tuttavia, questi ultimi possedevano un rudimento di calcolo letterale, o, meglio, il loro lessico ammetteva che nella stessa espressione si sommassero volumi, aree, segmenti, intendendo evidentemente denotare il cubo, il quadrato di una quantità, la quantità incognita stessa. Si vede bene come il lessico si riferisse immediatamente alla figura o meglio alla sua misura rispetto a quella del lato, e fosse ‘stirato’ al massimo per operare ad un grado di astrazione superiore. È assai probabile che, date le limitazioni dovute all’associazione stretta tra numeri e quantità, non fossero mai giunti ad esprimere la formula risolutiva dell’equazione di II grado, e anche altre, relative al calcolo di aree ecc. ma avessero scoperto come arrivare al risultato mediante una procedura generale, un algoritmo equivalente alla formula. Probabilmente, essi erano partiti dal metodo del completamento del quadrato; in termini moderni, mediante la trasformazione

$$x^2 + px = q \quad \rightarrow \quad (x + \frac{p}{2})^2 = q + \frac{p^2}{4}$$

almeno nel primo caso. È però evidente che il secondo e il terzo possono essere immediatamente ricondotti al primo, come risulterebbe dal fatto che sapevano ridurre l’equazione generale

$$ax^2 + bx = c$$

alla forma normale $y^2 + by = ac$ mediante la sostituzione $y = ax$. (BOYER)

Queste tecniche rivelano una notevole capacità di manipolazione numerica, e un elevato grado di astrazione, il che fa supporre che già durante l'antico regno, nel II millennio a.C., avessero superato la fase di una matematica utilitaristica – sempre ammesso che vi sia stata un'epoca nella quale fosse limitata alla sola dimensione pratica. Se è così, Babilonesi e Greci avrebbero avuto in comune il punto di vista per cui la matematica è degna d'essere considerata di per sé. Tuttavia, l''algebra' babilonese sembra essere un'opera incompleta, un perfezionamento del calcolo aritmetico basato su metodi brillanti ma mancante di generalità: "… presso i Babilonesi non troviamo uno studio sistematico e generale delle equazioni algebriche, né alcuna giustificazione esplicita dei metodi applicati: si procedeva dunque esaminando i singoli casi, e solo raramente, nella risoluzione di equazioni, i Babilonesi si mostrarono in grado di cogliere legami concettuali e analogie significative tra i diversi problemi'" (FRANCI e TOTI RIGATELLI 1979; BOTTAZZINI; FREGUGLIA e TOTI RIGATELLI 1992).

I reperti, babilonesi e anche egizi, "contengono soltanto casi e problemi specifici, senza alcuna formulazione di teoremi o di regole di carattere generale" (BOYER). L'approccio, per quanto non banale, era quindi essenzialmente euristico e non deduttivo, ma risolveva quelle classi di problemi che hanno applicazioni pratiche: "Tuttavia, il fatto che non sia sopravvissuta nessuna formulazione di queste regole non significa necessariamente che la generalità delle regole o dei principi fosse assente dal pensiero antico. Senza una regola generale, sarebbe difficile spiegare la similarità dei problemi” (ibid.). Forse, Babilonesi ed Egizi si erano resi conto che per risolvere problemi dello stesso tipo si deve cercare un metodo generale per ogni data classe di problemi; ciò che troviamo nei reperti sono illustrazioni di regole generali attraverso la soluzione di casi particolari, o esercizi.

Una prova indiretta sta nell’assenza nella documentazione pervenutaci dell’utilizzo di formule algebriche da parte dei matematici greci. È difficile pensare che uno strumento così potente per la risoluzione dei problemi di geometria sia stato trascurato da chi ne fosse venuto a conoscenza. Si consideri anche solo che la soluzione generale dell’equazione di secondo grado offre un metodo semplicissimo e universale per stabilire se un problema dato abbia o no soluzioni reali. Una formula risolutiva generale permette di avere la risposta mediante una regola universale. Questo tipo di problema non è affatto astruso, al contrario permette di selezionare i problemi che ammettono soluzioni reali: ma forse i Greci non se lo posero, perché in aritmetica erano interessati ai numeri interi. Ma, soprattutto, era affatto diverso il modo in cui concepivano il numero. Tra la filosofia matematica dei Greci e quella dei Babilonesi vi è una distanza immensa, e grandissimo è anche l’intervallo di tempo tra l’antico regno babilonese e il VI sec. a.C. Non solo; i Greci impiegarono sempre e solo metodi sintetici in geometria, sviluppando al massimo la tecnica della dimostrazione. La distanza doveva essere assai minore se ci limitiamo ai metodi di calcolo in possesso di architetti, ingegneri, costruttori di navi, insomma dei tecnici in generale. Ma la loro attività era ritenuta indegna da chi indagava le sfere superiori della conoscenza e perciò le relative competenze non meritevoli d'esser conservate per i posteri, per cui ci è giunta molta filosofia matematica, e poca informazione in ambito tecnico. Non vi sarebbe stata trasmissione del sapere tra matematici e tecnici.

Tale ipotesi è insostenibile, e si basa sulla posizione di Platone, autorevole ma non generalmente condivisa, per cui non vi doveva essere commistione tra geometria e meccanica: non è confermata dagli sviluppi moderni, ed è contraddetta dall'opera di Archimede, da riferimenti nella *Metafisica* e negli *Analitici Secondi* di Aristotele, dalla figura di *Archita* di Taranto, al quale l'essere un pitagorico non impediva affatto di svolgere attività politica e dare importanti contribuiti alla meccanica, dalle ricerche di *Erone* e (molti secoli dopo) da esempi quali l'edificazione di *Hagia Sophia* a Costantinopoli che Giustiniano commissionò a due matematici e architetti, *Isidoro* di Mileto e *Antemio* di Tralle. Era però condivisa dai seguaci di Platone e soprattutto dai neoplatonici, cui dobbiamo in grandissima misura la descrizione della filosofia greca del numero. Probabilmente le nozioni tecniche erano trasmesse all'interno delle corporazioni in quanto 'segreti' professionali, e la maggior parte di ciò che era stato messo per iscritto si perse dopo la fine dell'età antica. Inoltre, scrittori e storici riportano preferibilmente testimonianze e aneddoti, non trattati di carattere tecnico e conoscenze pratiche.

Presso i Greci, non sono neppure attestati chiaramente i metodi ‘algebrici’ babilonesi. L’algebra greca è confinata nelle forme della geometria, a meno che metodi equivalenti a quelli in uso presso i Babilonesi non si nascondano nella ‘logistica’ di cui parla Archita di Taranto (V – IV sec. a.C.). Il termine λογισμός ha una pluralità di significati, se tradotto in una lingua moderna: computo e concetti connessi, facoltà di giudicare, concludere, dedurre, insomma: uso della ragione, del λόγος, corretto ragionamento. L’interesse per la corretta interpretazione del termine λογιστικά è motivato soprattutto dall’affermazione, ad Archita attribuita, secondo cui ‘la logistica sembra assai superiore alle altre arti con riguardo alla sapienza (σοφία)’. Questo sembra contrastare con il significato di “una disciplina separata, che trattava del computo delle cose” (BOYER) rispetto all’aritmetica vera e propria, che trattava del numero in sé, attribuitogli da Platone nel *Gorgia* e altrove. Una formulazione più decisa è che la logistica “produce dimostrazioni dove la geometria non può”. Si direbbe che possa significare ‘ragionamento dimostrativo’, ‘dimostrazione corretta e completa’ quando il concetto non era ancora chiaramente definito. Il problema è che non è chiaro se questa ‘logistica’ sia nient’altro che l’uso sapiente della ragione, superiore al mito, alle opinioni date per certe, al perseguimento degli interessi personali, senza le limitazioni imposte dall’astrazione, eventualmente in relazione alla realizzazione di progetti o compiti amministrativi, o se seguendo Platone debba intendersi più restrittivamente come un campo d’indagine specifico afferente alla computazione. In questo secondo senso si esprimono molti studiosi; “I primi pitagorici avevano enfatizzato il numero come il concetto fondamentale, e Archita […] affermò che l’aritmetica soltanto, non la geometria, potesse offrire prove soddisfacenti” (KLINE 1972); ma i matematici greci, dopo Platone, svilupparono soprattutto la geometria sintetica. I famosi problemi della trisezione di un angolo, della duplicazione del cubo, della quadratura del cerchio furono esaminati e risolti con metodi geometrici. La stessa posizione è sostenuta dalla *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2003), per cui Archita “vedeva l'obiettivo finale delle scienze come la descrizione delle singole cose nel mondo in termini di rapporto e proporzione e di conseguenza considerava la logistica, la scienza del numero e della proporzione, come la scienza principale. Anche il calcolo razionale e la comprensione delle proporzioni erano le basi dello stato giusto e della buona vita di un individuo. Diede definizioni di cose che tenevano conto sia della loro materia che della loro forma…”; si trattava dunque di aritmetica, ma applicata ad un orizzonte assai ampio. Così pure *Neugebauer* (cit. da BOYER). *De Santillana* (1961) traccia un ritratto che ne evidenzia lo spirito pragmatico, proprio dell’ ‘uomo d’azione’, quasi compensasse l’ingegno speculativo del suo contemporaneo Platone. “Archita ci appare come il primo esempio di scienziato di professione”. Diede contributi notevoli alla teoria musicale, che è connessa con le proporzioni, e risolse il problema della duplicazione del cubo. Una delle possibili interpretazioni di λογισμός è ‘proporzione’, che rammenta il latino ‘ratio’ = ‘rapporto’ e rimanda a ‘misura’ (una misura è un rapporto alla grandezza scelta come unità di misura), il che suggerisce uno stretto nesso tra teoria della proporzione e 'giusta misura', corretta valutazione ecc. Lo strumento di Archita non è quindi l'aritmetica contemplativa, ma quella applicata al di là della speculazione teorica, fino ad essere la base della giusta condotta di governo: "Il giusto calcolo, una volta scoperto, controlla la lotta civile e fomenta la concordia; infatti, dove lo si sia raggiunto, non può esservi eccesso di guadagno, e regna l'uguaglianza" (DE SANTILLANA, che riporta i frammenti di Archita). Si tratterebbe comunque di 'aritmetica', ma alla luce del concetto pitagorico per cui 'tutto è numero' o, data l'importanza assegnata all'acustica e alla musica, 'tutto deve essere armonico'.

Sembra quindi che la 'logistica' di Archita, in quanto superiore alla differenza tra teoria e pratica, non debba riferirsi specialmente all'algebra, o a quell'aspetto della geometria che è stato definito 'algebra geometrica'. Piuttosto, in ambito teorico includeva l'utilizzo di metodi che Platone invitava a respingere perché connessi al mondo sensibile; p. es., la duplicazione del cubo era ottenuta introducendo e muovendo tre superfici (MARCACCI 2004; BOYER 1980; HEATH 1921). Possiamo concludere che, molto probabilmente, l'algebra delle equazioni di secondo grado o superiore non ebbe un ruolo significativo nella matematica greca, mentre questo sarebbe spettato, in misura maggiore di quanto documentato per la scarsa considerazione in cui erano tenuti dagli scrittori greci, ai metodi di aritmetica applicata e 'gestionale' alla base del concetto di 'logistica'.

Riporto frammenti raccolti da M. R. Johnson in *Sources for the Philosophy of Archytas* (*Ancient Philosophy* 28), 2008.

Da *Porfirio* (framm. 2):

“Ci sono tre medie nella musica: una è l'aritmetica, la seconda geometrica e la terza subcontraria (che chiamano ‘armonica’). La media è aritmetica, ogni volta che tre termini sono in proporzione superandosi a vicenda…”.

Secondo il Johnson, ‘queste distinzioni sono centrali nella filosofia di Archita, e catturano il significato profondo (‘*insight*’) della ‘logistica’.

Da *Stobeo*[2] (framm. 4):

“La logistica (*logistikà*) sembra essere davvero di gran lunga superiore alle altre arti per quanto riguarda la saggezza e in particolare per trattare ciò che desidera in modo più concreto (chiaro) della geometria. Di nuovo, sotto quegli aspetti in cui la geometria è carente, la logistica mette forza alla dimostrazione e ugualmente, se c'è qualche indagine sulle forme, anche rispetto a ciò che riguarda la forma.”

Il termine λογιστική significa anzitutto ‘computo’, ‘calcolo’.

Platone osserva che “sia l'arte del calcolo (λογιστική) sia l'aritmetica (ἀριθμητική) riguardano il numero... Ma l'arte del calcolo (λογιστική) è solo propedeutica alla vera scienza; coloro

2 Giovanni Stobeo, V sec. d.C., compilò una raccolta di estratti da autori greci.

che devono governare la città devono acquisire una comprensione della λογιστική, non nel senso popolare con l'obiettivo di usarla nel commercio, ma solo a scopo di conoscenza, fino a quando non saranno in grado di contemplare la natura del numero in sé solo con il pensiero.” Secondo *Heath* (1921), Archita intendeva la ‘logistica’ allo stesso modo. *Gemino* (I se. a.C.), citato da Proclo nel *Commento al I Libro di Euclide* [HEATH 1921] conferma: “Per quanto riguarda la λογιστική, essa non considera le proprietà dei numeri in sé, ma con riferimento a oggetti sensibili; e per questa ragione applica loro nomi tratti dagli oggetti misurati…”; così anche lo scoliaste al *Carmide* di Platone [*Ibid.*]: “La logistica è la scienza che si occupa delle cose numerate, non dei numeri; non prende il numero nella sua essenza, ma presuppone 1 come unità e l'oggetto numerato come numero, ad esempio, considera 3 come una triade, 10 come una decade, e applica i teoremi dell'aritmetica a tali casi (particolari). Così è la logistica che indaga da un lato ciò che Archimede chiamava il problema ‘dei buoi’ [*problema bovinum*]… e in altri tipi indaga anche i numeri dei corpi sensibili, trattandoli come assoluti. Il suo oggetto di studio è tutto ciò che è numerato. I suoi rami includono i cosiddetti metodi greci ed egiziani nelle moltiplicazioni e divisioni, le addizioni e le scomposizioni delle frazioni; metodi che utilizza per esplorare i segreti della teoria dei numeri triangolari e poligonali con riferimento alla materia di problemi particolari.” Questo passo mette insieme operazioni elementari e un problema attribuito ad Archimede, nel quale si chiede il numero di capi di un gregge del dio Sole dato un insieme di condizioni. Si tratta di un problema di *analisi diofantea*, un insieme di tecniche che cerca le soluzioni intere date certe condizioni. Non è chiaro se lo scoliaste si rendesse conto della differenza di abilità tra l'aritmetica elementare e l'analisi diofantea; basta osservare che il problema 'dei buoi', scoperto in un manoscritto nel 1773, fu risolto nel 1880: non sembra dunque essere molto semplice, e sarebbe assai sorprendente se fosse stato risolto nell' antichità, dato i numeri estremamente elevati coinvolti. Per quanto riguarda la 'logistica', si direbbe che con questo termine lo scoliaste intendesse la tecnica del calcolo aritmetico, contrapposta alla teoria del numero, a prescindere dalla sua difficoltà o meno. Inoltre, Diofanto di Alessandria visse nel III-IV sec. d.C., ben dopo Archimede, e infine, può essere seriamente presa in considerazione l'ipotesi che i Greci lo sapessero risolvere? Comunque sia, abbiamo la prova che i Greci, e non solo Archita, distinguevano tra la scienza del numero in sé e la tecnica del calcolo. Quest'ultima non era omogenea quanto a difficoltà e scopo, e in parte doveva essere patrimonio comune dei Greci e dei non Greci.

Tutto ciò non sembra perfettamente coerente con la soluzione del problema della duplicazione del cubo attribuita proprio ad Archita, che è di tipo geometrico, anche se non eseguibile con riga e compasso. Essa è la rappresentazione nello spazio della proporzione continua $a : x = x : y = y : 2a$, dalla quale otteniamo $x = a\sqrt[3]{2}$. Secondo *Heath* (1921) e *Boyer* (1980) la soluzione è data dall'intersezione di tre superfici nello spazio, un cono circolare retto, un cilindro circolare retto con asse ortogonale a quello del cono passante per il suo vertice, e un toro con diametro interno nullo.

Da *Giamblico* abbiamo tre frammenti, non universalmente ritenuti autentici:

“In tutte le altre attività umane, la saggezza si distingue, proprio come il vedere proviene dai sensi del corpo, e come l'intelligenza dall'anima, e come il sole viene dalle stelle...”

“La persona umana è nata e costituita per osservare e contemplare la ragione (θεωρῆσαι τὸν λόγον) dell'intera natura. E così la saggezza ha la funzione di osservare l'intelligenza di tutte le cose che esistono.”

“Poiché il bene della saggezza diventa più evidente man mano che diventa comune ed esteso a tutte le cose, così anche l'esortazione ad esso diventa più completa attraverso le seguenti [parole di Archita]: la sapienza non si occupa di qualcosa di particolare tra le cose che esistono, ma di tutte le cose che esistono, assolutamente; ed è necessario che all'inizio non ne scopra i principi caso per caso, ma piuttosto ciò che è comune alle cose che esistono; perciò la relazione tra saggezza e tutte le cose che esistono è come la visione delle cose visibili. È nativo della sapienza sia percepire che osservare e contemplare (θεωρῆσαι) tutti gli attributi universali, ed è così che la sapienza scopre i principi di tutte le cose che esistono.”

“In tutte le altre attività umane, la saggezza si distingue, proprio come la vista proviene dai sensi del corpo, e come l'intelligenza dall'anima, e come il sole viene dalle stelle.”

L’importanza di Archita consiste nell’essere, tra gli autori greci, vicino ideologicamente ai primi pitagorici, e nello stesso tempo non esser troppo lontano da essi nel tempo, in modo da poter trasmettere a Platone conoscenze preziose sulla loro dottrina. L’interesse per rapporti e proporzioni è compatibile con il principio per cui ‘tutto è numero’ in quanto questa affermazione ha senso solo nella misura in cui attraverso il numero si possano comprendere relazioni non provvisorie tra le cose. Se questa valutazione è corretta, per la scuola pitagorica l’aritmetica continuava ad essere fondamentale; anche se non riguardava la teoria del numero, la logistica ne dimostrava la presenza nella realtà e la maggior utilità nei confronti della più astratta geometria. La figura, piana o solida, interessava in quanto implicava rapporti e proporzioni. Si considerino il *Menone* e la classificazione dei numeri come ‘quadrati’, ‘oblunghi’ ecc. e si confronti col *Teeteto.* Le forme geometriche potevano fungere da immagini per indagare la natura del numero.

Qualunque sia stata l'esatta interpretazione che Archita assegnava alla 'logistica', è chiaro che sotto questo termine possiamo comprendere ciò che non troviamo nella geometria e nell'aritmetica dei seguaci di Platone e dei neoplatonici, includendo invece ciò che i Greci potevano avere appreso dai popoli vicini, Egiziani, Fenici ecc., come appunto il calcolo applicato al commercio, all'amministrazione, all'ingegneria ecc. Se Talete, Pitagora e soprattutto i commercianti e i navigatori avevano appreso qualcosa altrove, questo era verosimilmente ciò che più a loro interessava dal punto di vista pratico.

Heath (1921) svolge interessanti considerazioni sui contenuti della 'logistica': "Inoltre, si trattavano problemi riguardanti cose come pecore (o mele), ciotole, ecc.; e qui non abbiamo difficoltà a riconoscere problemi simili a quelli che troviamo negli epigrammi aritmetici inclusi nell'antologia greca. Diversi di essi sono problemi di divisione di un certo numero di mele o noci tra un certo numero di persone; altri trattano dei pesi di ciotole, o di statue e dei loro piedistalli, e simili; di regola, comportano la risoluzione di equazioni semplici con un'incognita, oppure di facili equazioni simultanee con due incognite; due sono equazioni indeterminate di primo grado da risolvere in numeri interi positivi. Dalle allusioni di Platone a tali problemi è chiaro che la loro origine risale, almeno, al V secolo a.C…" Seguono riferimenti a problemi, enunciati attraverso un lessico che utilizza oggetti concreti come incognite, che si possono risolvere mediante equazioni e che coinvolgono numeri triangolari, quadrati, poligonali.

Gli ‘epigrammi aritmetici’ sopra nominati sarebbero i poemi aritmetici conservati nel Libro *XIV* dell'Antologia Palatina, una raccolta di epigrammi attribuiti a una cinquantina di poeti greci compilata a Bisanzio intorno alla metà del X secolo. Essi sfidano i lettori a risolvere problemi risolvibili con semplici sistemi di più equazioni in più incognite, per lo più riconducibili a una sola, a differenza del problema ‘dei buoi’. I poemi costituiscono una raccolta strana: la loro paternità, data e scopo sono tutti contestati. Attribuiti a un *Metrodoro* di difficile identificazione, sono preceduti da indovinelli e oracoli.

“Non ci può esser dubbio che l’*Aritmetica* di *Diofanto* (III-IV sec. d.C.) appartenga alla Logistica.” [*Ibid.* p. 16]. L’analisi indeterminata è un ramo della matematica antica, analizzato da Diofanto in particolare, affatto estraneo alla geometria, ma a pieno titolo appartenente all’aritmetica, sia sotto l’aspetto teorico, sia pratico. Non risulta sia stata trattata dai Babilonesi, ma è connessa ai problemi di costruzione degli altari trattati nei *Śulba Sūtra* (vedi). Vi appartengono anche le soluzioni intere delle sette medie aggiunte alle tre originarie dei pitagorici.

“Va aggiunto che alla distinzione tra aritmetica e logistica corrispondevano (fino al tempo di Nicomaco, verso la fine del IV se. a.C.) diversi metodi di trattazione. Con rare eccezioni, come il crivello di Eratostene, un metodo per trovare i numeri primi, la teoria dei numeri veniva trattata solo in connessione con la geometria, e per tale ragione si utilizzava soltanto la forma geometrica della dimostrazione, sia che le figure assumessero la forma di punti che tracciavano quadrati, triangoli, gnomoni, ecc. (come con i primi Pitagorici), sia che fossero linee rette (come in Euclide VII-IX); perfino Nicomaco non abolì completamente le considerazioni geometriche dal suo lavoro, e nel trattato di Diofanto sui numeri poligonali, di cui rimane un frammento, si utilizza la forma geometrica della dimostrazione."

Queste affermazioni evidenziano come l'aritmetica greca, non solo agli inizi, si appoggiava per le dimostrazioni alla rappresentazione estensionale del numero; in un certo senso faceva parte della geometria o almeno non era da questa distinguibile, a differenza della 'logistica'. Ciò pone un problema filosofico, dato che i pitagorici, contrariamente alla subordinazione del numero alla figura implicita in questo metodo, ponevano il numero all'origine di tutto. Apparentemente, la stretta connessione tra numero ed estensione è estranea a quella tra numero ed armonia, il cui studio era considerato molto importante dai primi pitagorici. Ma il numero – non quello impiegato nel calcolo, ma la forma della quale, secondo i pitagorici, quest'ultimo è una sorta di immagine – trascende le singole manifestazioni della sua presenza, come possiamo constatare dalle sue connessioni con la quantità, l'ordinamento, i rapporti aritmetici, le grandezze divisibili ecc. Si tratta di filosofia, non di calcolo. Sotto questo aspetto la matematica greca era radicalmente diversa da quella delle civiltà vicine già all'inizio.

La discussione precedente suggerisce che molto più importante del tema del rapporto dei Greci con l'algebra fu l'aver preso coscienza dell'importanza della 'dimostrazione', intesa come argomentazione convincente nella dialettica e nella retorica, e in matematica come prova inoppugnabile non perché convince, ma in quanto riflette un ordinamento oggettivo del mondo e di averla sviluppata fino alle estreme conseguenze per quanto possibile. A questo secondo aspetto, quello che identifichiamo come 'prova inoppugnabile' contro l'opinione, il mito, il falso ragionamento, si rivolsero filosofi e matematici. Vi è quasi universale convergenza su questo particolare carattere della matematica greca, sia nel suo sviluppo ideale, astratto, come lo vediamo nell'opera di Euclide, che è stato considerato un maestro di logica insieme ad Aristotele, sia nella prospettiva più ampia di un Archita e dei pitagorici, quella originaria; la chiusura della ricerca nei confronti del mondo sensibile è effetto di una specializzazione affermatasi in un tempo successivo. Archita esaltò l'importanza del ragionare correttamente, ma ai fini del conseguimento della 'saggezza', e tenendone presente l'universalità. Il tema dell'elaborazione delle forme universali del ragionamento – nell'ambito dell'organizzazione dell'argomentazione in base a regole non fallaci – venne ampiamente trattato da Aristotele esaltandone però l'autonomia e la precedenza rispetto alle singole scienze; queste non sono possibili, se l'indagine non è condotta con lo strumento adeguato, per cui la logica diventa essa stessa oggetto di indagine scientifica. La dimostrazione è veramente tale, e non efficace solo sul piano psicologico, se 'conserva la verità', vale a dire se da premesse date riesce a dedurre le dovute conseguenze: la ricerca del carattere della corretta inferenza non poteva non esser stato determinante nel corso del V sec. a.C, e anche prima, per lo sviluppo sorprendentemente rapido della geometria greca tra il VI e il IV sec. Questo sviluppo, per la fiducia riposta nel ragionamento deduttivo e nell'esser riusciti a definirlo e applicarlo correttamente, ancor più per la qualità e quantità dei risultati, distingue la matematica greca da quelle di altre culture. Per quanto notevoli e originali siano le loro conquiste, non raggiungono il grado di organizzazione, precisione e profondità di un Euclide, di un Archimede, di Apollonio. Sulla funzione essenziale, non solo strumentale, dell'inferenza in matematica si veda la famosa definizione di 'matematica pura' data dal Russell, all'inizio dell'*Introduzione alla filosofia matematica.*

Certamente, l'idea che la matematica greca e in generale la civiltà greca siano stati fenomeni eccezionali, meravigliosi, riflette anche un senso di superiorità da parte degli Occidentali e l'eredità del neoclassicismo e del romanticismo. Ma a sua volta questo stesso sentimento trovava giustificazione nella consapevolezza di possedere mezzi superiori, e questi erano il prodotto della civiltà greca. L'eccezionalità greca fu riconosciuta anche dagli Arabi, dai quali, come dai Bizantini, gli europei trassero le nozioni di geometria e aritmetica verso la fine del medioevo.

Da questo punto di vista, storicamente la matematica 'nasce' in due momenti almeno: prima come una scienza euristica, in parte sperimentale, utilitaristica, costruttiva, fatta di un insieme di metodi applicabili a problemi che implicano calcoli; poi, l’affermarsi di questa come scienza autonoma che conduce alla σοφία. Questo passaggio fu attribuito a Talete e ai pitagorici. La ‘scoperta’ della dimostrazione nello stile di Euclide ne è una specializzazione, ma la radice è la stessa. Molto tempo dopo, con un movimento che origina già nel XVIII sec. (i tentativi di dimostrare il V postulato), si affermava nel XIX la necessità di definire rigorosamente la matematica come sistema deduttivo, per culminare nella formulazione dei problemi di Hilbert e nei teoremi di Gödel nel XX. Per quanto l’estrema formalizzazione raggiunta e l’impiego di logiche specializzate sembrino lontanissimi dagli inizi, questi ultimi contengono *in nuce* gli stessi elementi. In ultima analisi, la vera origine della matematica è nella matematica stessa, ovvero nel suo proprio ordinamento intrinseco. La dimostrazione si limita a svelarlo, ma il disegno c’è già, si tratta di riconoscerlo. La logistica – ammesso che l’interpretazione che ne abbiamo fornita sia corretta – è nello stesso tempo strumento di giudizio, di accrescimento del sapere, e di indagine sullo stesso ordinamento proprio della materia. Questo ordinamento è intelligibile, e perciò stesso deve essere esplorato, perché conduce alla comprensione dell’essere, di ciò che è eternamente. Vi fu, presso i Greci, chi era convinto che la ragione potesse condurre alle verità ultime, sia attraverso la dialettica, sia attraverso la matematica. Questa ‘ragione’, che inizialmente era sia facoltà umana, sia ordine del mondo (Anassagora), venne fissata in forme sempre più rigide (anche con il contributo di alcuni filosofi a partire da Aristotele) fino a produrre l’attuale formalismo che implica la distinzione (apparentemente astratta, perché irrealizzabile quando si pensa in matematica) tra la ‘sintassi’ – cioè l’insieme delle regole di composizione dei segni che costituiscono le formule correttamente formate – e la ‘semantica’, cioè il significato ovvero la relazione che il matematico riconosce tra formule e rappresentazione, immagine mentale o oggetto sensibile, ecc.

Questa distinzione, per quanto recente, solo apparentemente sembra completamente estranea alla matematica greca, perché questa distingueva tra rappresentazione e teoria aritmetica. La dimostrazione poi, compresa quella impiegata da Euclide, è necessariamente sintattica, anche se fa un uso minimale del formalismo. Lo è la stessa logica aristotelica, anzi in modo molto più evidente, tanto da far supporre che la ricerca di perfezione logica in matematica sia avvenuta attraverso un processo parallelo a quanto avvenuto in filosofia. Il compito di produrre una tecnica dimostrativa perfetta fu perseguito tra i Greci con singolare costanza, e questo aspetto conferisce – al di là dei risultati conseguiti – alla matematica ellenica un carattere particolare rispetto alle altre culture.

Intelligibilità, regola, necessità/ inevitabilità sono fattori cognitivi necessari al costituirsi di un sapere matematico. Il secondo sembra ovvio, ma dobbiamo considerare come la materia viene appresa oggi, in confronto con le scoperte più antiche. Consideriamo il problema della misura. Una regola accettata per convenzione è utile, ma ciò non è sufficiente ai fini della misurazione. L'unità di misura è convenzionale, e il criterio della scelta è l'opportunità, ma le misurazioni non debbono fornire risultati arbitrari; è necessario potersi basare su un insieme di regole che non sono accettate per convenzione come quelle delle aree, dei volumi ecc. Lo stesso vale per il calcolo numerico. Prima ancora che si sviluppassero metodi condivisi per le dimostrazioni, la matematica deve aver prodotto una sensazione di costrizione. Questa è maggiore se ci si allontana dall'osservazione e dal ragionare su cose concrete, cioè quando si raggiunge un certo grado di astrazione. Dimostrare qualcosa vuol dire far vedere che non può essere altrimenti. Forse le dimostrazioni per assurdo furono tra le prime, per l'evidenza della contraddizione, quando la matematica divenne oggetto di indagine di per sé oltre che strumento di misura e calcolo. La scoperta delle grandezze incommensurabili applicando alle frazioni irriducibili la distinzione dei numeri in pari e dispari, dovrebbe essere uno dei primi esempi – almeno tra i Greci; infatti non sembra che Babilonesi o altri ne fossero a conoscenza, o che abbiano indagato la questione. La dialettica stessa faceva largo uso dell'assurdo, della contraddizione. La scuola eleatica, e Zenone soprattutto, faceva uso del paradosso per confutare una posizione (Zenone definiva ‘attacchi’ le proprie argomentazioni), precedendo cronologicamente il suo impiego nei *Dialoghi* di Platone. L’analisi logica finì col prevalere sui metodi puramente costruttivi, spingendo i matematici alla ricerca di procedure che evitassero contraddizioni, non più soltanto per evitare contestazioni in un dibattito pubblico, ma per fondare una scienza su basi sicure.

Ma tutto ciò può essere scoperto e applicato attraverso gli ‘intelligibili’, le cose (schemi e relazioni tra schemi) che possiamo ‘vedere’ con la mente: l’immagine di un disco, p. es., ma anche la somiglianza di forma, e le figure geometriche rettilinee con pochi lati, ma anche l’ordinamento dei numeri, i confronti tra grandezze, ecc. Vi possiamo includere i ‘numeri figurati’ dei pitagorici, e in generale ciò che comprendiamo immediatamente, ma anche ciò cui possiamo arrivare non sul momento, ma in seguito. È chiaro che l’intelligibilità non è un concetto definibile per tutti in modo univoco: ciò che può essere evidentissimo per qualcuno, non lo è necessariamente per qualcun altro. Inoltre, non è assolutamente una proprietà degli oggetti matematici, ma è una competenza del soggetto conoscente. Infine, non è affatto ristretta al campo matematico. Ma nel presente discorso interessa per la sua immediatezza, è la particella minima di ogni dimostrazione. Formale o meno, una dimostrazione deve essere compresa, deve quindi ricondursi ad una decomposizione in un numero finito di momenti di comprensione. Ma deve anche essere ‘sicura’, irrefutabile, e questa sua certezza non può essere attribuita solo a qualche superiore abilità cognitiva, ma deve avere un fondamento in se stessa, non bastando la verifica empirica, che conduce all'opinione in quanto dipende da come si è condotta l'osservazione e dalla soggettività del giudizio. Questa può essere opinione vera, ma resta opinione, non è ancora conoscenza. Quest'ultima non può derivare dall'osservazione dei fenomeni del mondo sensibile, ma dalla contemplazione del soprasensibile. Ma il fondamento della certezza in matematica non può essere cercato in indagini nell'ambito cognitivo. Doveva essere chiaro già nelle prime riflessioni sull'aritmetica e sulla geometria che tale fondamento andava cercato nell'aritmetica stessa, nei rapporti tra i numeri; quelli che si impiegano nei calcoli e nelle misure non collegano solo ciò che possiamo osservare nei fenomeni del mondo sensibile, ma riflettono i rapporti tra i numeri intelligibili (la monade, la diade ecc.), come cerca di far comprendere Proclo quando, nel suo *Commento al Timeo di Platone*, ci illustra il concetto di 'mezzo analogo', di cui la media geometrica è un esempio. Le medie, le proporzioni ecc. non collegano solo le cose del mondo sensibile, mettono in relazione i numeri stessi, anzi collegano le cose del mondo sensibile proprio in quanto legano tra di loro i numeri. Nel caso della geometria, il nesso va cercato nel corretto ragionamento. Ma questo è corretto solo nella misura in cui riflette l'architettura intrinseca di tutta la geometria. Questa non nasce dalla correttezza del ragionamento, ma al contrario l'inferenza è corretta è tale se e solo se è reale, se cioè riflette le connessioni logiche tra le proposizioni con le quali esprimiamo le proprietà delle figure e le loro relazioni (uguaglianza, similitudine, equivalenza…). La logica che il matematico applica è corretta se e solo se riflette la logica propria della geometria. Una qualche consapevolezza di tutto ciò, non ancora chiaramente espressa, non ancora organizzata, non ancora esplicitamente teorizzata, doveva essere presente ai Greci già nel VII-VI sec. a.C. Diversamente, non si comprende il senso dei successivi sviluppi.

Dobbiamo rivolgere l'attenzione alla figura regolare simmetrica. Proprio la simmetria, ovvero l'invarianza rispetto a rotazioni e rifessioni, è un principio di semplificazione, che a sua volta implica maggiore intelligibilità e memorizzazione. È molto più facile memorizzare la forma di un quadrato che non quella di un quadrilatero con angoli e lati non congruenti. Memorizzazione e intelligibilità vanno insieme, e il secondo termine comprende il primo. Forse, questa vicinanza tra l'ideazione e la memoria potrebbe essere l'origine di teorie come l'anamnesi socratica. Nella costruzione della geometria, ai poligoni regolari o facilmente ottenibili da questi dovrebbe spettare un posto speciale. Il triangolo isoscele evidenzia un asse di simmetria, il rettangolo gli angoli retti. Sono costruzioni semplici, scarsamente osservabili in natura, ma onnipresenti in architettura e in molte manifatture. Proprio questo contrasto fra la scarsa presenza di figure simmetriche o ad esse assimilabili in natura e la loro forte presenza, almeno nelle intenzioni, nella parte più intuitiva della geometria e nelle realizzazioni architettoniche prova che la geometria non ha le sue basi solo nell'osservazione passiva della 'realtà'. Rettangoli, quadrati, esagoni possono riempire un pavimento, e l'edificazione implica piani perpendicolari, stanze a pianta rettangolare, ecc. Forse non vi sarebbe bisogno di tutto ciò, ma già le civiltà antiche, stranamente, prediligevano l'ordine. Organizzazione e progettazione esigono la composizione di oggetti semplici, e la produzione in serie la ripetizione della stessa forma, imponendo l'adozione di schemi.

Ma l'economia non è l'unica causa, pur essendo forse la più potente.

Si possono tuttavia osservare forme regolari nei cristalli, negli alveari (esagoni, perché ottimizzano l'utilizzo di spazio e materiale), nell'astronomia. L'attenzione verso figure regolari o con proprietà notevoli dovette essere assai incentivata dalla possibilità di eseguire disegni precisi, utili per la progettazione.

Anche l'attività manifatturiera stimola l'ideazione. Non è possibile realizzare manufatti senza avere un'idea dello scopo e della forma che più loro conviene. Intervengono elementi estetici; un'anfora deve avere una forma regolare perché altrimenti è brutta, la forma rotonda è più elegante di quella cilindrica, ecc. Ogni costruzione o manufatto presuppone idee, che a loro volta evolvono e si perfezionano attraverso l'attività manifatturiera e la costruzione di edifici, di navi ecc. Si attua una forma di selezione, che raffina la sensibilità e sviluppa l'attività creativa, e anche la capacità di osservare, ecc.

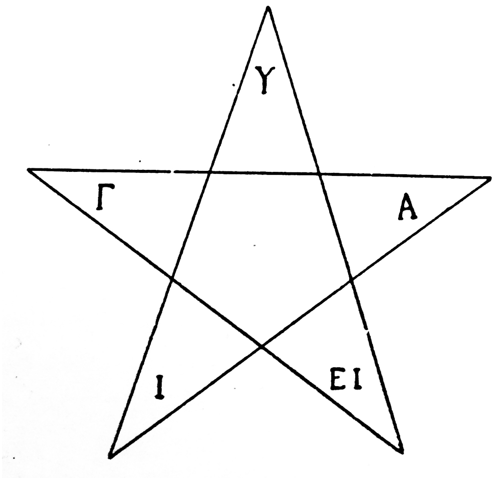
Prima ancora della figura geometrica semplice, abbiamo i suoi elementi costitutivi. La linea retta, le direzioni, gli angoli a cominciare dai retti, la circonferenza col suo centro, il punto, le distanze, precedono l'elaborazione geometrica.

La planimetria, i pavimenti, le pareti divisorie devono suddividere lo spazio in modo semplice e riproducibile, in modo che il tutto si possa comporre con pochi schemi. Il geometra procede allo stesso modo, componendo disegni con i pochi elementi sopra enumerati, e utilizzando due strumenti, riga e compasso.

Infatti tutte le figure della geometria euclidea si possono ottenere tracciando rette e circonferenze.

In termini attuali, diremmo che i poligoni regolari hanno un minimo di informazione. Consideriamo un triangolo scaleno; per individuarlo, dobbiamo dare le misure dei tre lati, o un'informazione equivalente. Per uno isoscele, ne bastano due. Per uno equilatero, una. Al contrario, più semplice è la figura, più numerose sono le sue proprietà, cioè le relazioni identificabili tra i suoi elementi. Per es., in un triangolo equilatero tutti gli angoli sono un terzo dell'angolo piatto, in uno isoscele sappiamo solo che sono uguali gli angoli alla base, in uno scaleno che la loro somma è un angolo piatto. Se poi intendiamo definire solo la forma, le informazioni sono ancora di meno. Se poi consideriamo tutte le proprietà di un poligono, e tutte le relazioni tra gli elementi in esso definibili (i punti notevoli di un triangolo, le diagonali, ecc.), è chiaro che quelle di un poligono regolare sono molto più facilmente individuabili, e se i lati sono pochi sono immediatamente intelligibili. Mentre le informazioni che definiscono univocamente un poligono regolare sono in numero minore rispetto a uno irregolare, ciò che si può scoprire intorno al primo è molto di più di quello che possiamo ottenere studiando uno irregolare.

Perciò i poligoni regolari sono 'figure primarie', subito dopo segmenti angoli punti ecc. Difficilmente la costruzione del sistema della geometria greca può aver avuto inizio dalla formulazione di principi quali i postulati di Euclide, anche perché l'ordinamento logico-deduttivo presuppone un consistente insieme di risultati. Questo deve esser cercato in ciò che è utile e semplice da esaminare. Sia che si trattasse di desiderio di sapere, o di utilità, il punto di partenza più verosimile dovrebbe trovarsi nello studio dei triangoli e dei rettangoli, dei trapezi e poi dei poligoni regolari con pochi lati.



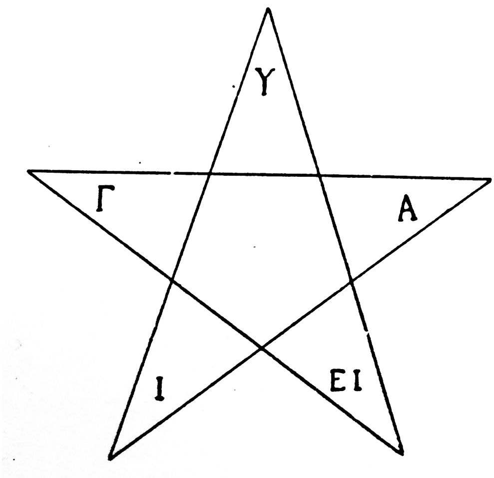
Il pentalfa pitagorico

Non solo; l’attenzione può orientarsi verso le trasformazioni da forme massimamente simmetriche a forme meno simmetriche. Dal triangolo equilatero al triangolo isoscele e infine allo scaleno, la generalizzazione si accompagna alla distinzione, alla classificazione. Questi passaggi sono paralleli alla separazione tra numeri ‘quadrati’ e ‘oblunghi’ illustrataci da Teeteto, che spiega i suoi progressi a Socrate. Lo sviluppo di un campo della matematica è necessariamente euristico nelle prime fasi dell’esplorazione, quando i principi non sono ancora ben sistematizzati, e in assenza di un definito metodo ipotetico-deduttivo, e così doveva essere per geometria, aritmetica, e armonia.

Soprattutto, la modifica di una figura induce a chiedersi cosa cambia e cosa non cambia. Abbiamo poligoni isoperimetrici, isogoni, isometrici, isomorfi (simili). Possiamo eseguire traslazioni e rotazioni, di per sé non interessanti perché non modificano la figura (sono congruenze), o trasformazioni che conservano l’estensione (isometrie). Queste ricerche implicano riflessione e discussione, nuove idee e confronto tra idee. La semplice intelligibilità più o meno immediata si evolve in indagini che intendono spingersi dall’osservazione di molti casi particolari a classi di figure definite da qualche semplice proprietà, ma che ne hanno altre deducibili da quelle. P. es., in ogni triangolo il lato maggiore è opposto all’angolo maggiore. Oppure, la somma degli angoli interni è un angolo piatto. Lo stesso accade per l’aritmetica: i numeri triangolari hanno certe caratteristiche, ecc. La figura si scinde nell’immagine e nel concetto, che è ciò che la definisce univocamente, senza ambiguità di significato; si esige precisione di linguaggio. Se in un primo momento si studia l'immagine, in un secondo su ragiona in modo più astratto. L'aritmetica, le proporzioni, le medie, soprattutto esigono il ragionamento. Nella realtà storica, forse i due momenti non furono così distinti nel senso cronologico, e forse neppure nella stessa attività di ricerca; ma, normalmente, l'immaginazione dovrebbe precedere il ragionamento. Si pensi ai numeri figurati.

La ricerca degli invarianti, di ciò che la trasformazione non cambia, è una scala ascendente che, in metafisica, condurrebbe all'idea dell'essenza al di là dei singoli fenomeni e cose. Ma la stessa forma particolare, attraverso la somiglianza, della quale la similitudine è un caso particolare, una relazione immediatamente intelligibile, rivela la relazione tra la forma stessa e gli oggetti nei quali è riconoscibile, o che possono essere fatti a sua immagine. Tale relazione è ambigua, in quanto la forma è opposta all'oggetto sensibile, benché quest'ultimo ne sia un esempio, ne rappresenti la realtà, e quella ne sia un'astrazione, ciò che resta quando l'oggetto sia privato della sua consistenza materiale.

In linea di principio, lo sviluppo della matematica deve ignorare queste relazioni con il mondo sensibile. Le scienze cognitive possono esplorare come le operazioni e le esplorazioni del soggetto conoscente possano condurre ai concetti matematici, ma la costruzione del sistema è possibile perché lo stesso sistema è fatto in un certo modo. Paradossalmente, il matematico costruisce ciò che è già dato, ma non ancora noto. Questa idea, espressa o meno, era già presente all’inizio della matematica greca, e – credo – di ogni matematica.



La dimostrazione esemplifica il carattere costrittivo della matematica. Essa ci obbliga a riconoscere la verità della tesi, così come Socrate costringeva l'interlocutore ad ammettere ciò che Socrate voleva. Deve essere chiaro che la dimostrazione matematica non è l'applicazione ad un definito campo di indagine di un metodo universale, che non esiste. Molti, famosi o meno, hanno creduto o credono di poter 'dimostrare' le loro tesi. S. Anselmo 'dimostrò' l'esistenza di Dio, Socrate l'immortalità dell'anima. *Bessel* avrebbe dimostrato il moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole (1838), eppure *Mach* non ne era convinto. È universale il bisogno di ottenere una 'prova', come previsto dalla giurisprudenza, che non si riduca alla testimonianza o al richiamo all'autorità. La prova si oppone all'arbitrio del potere più ancora che a una sapienza tramandata. L'esigenza di provare la tesi sostenuta è parte di una rivoluzione culturale che avvenne in massimo grado in Grecia, ma ciò non è sufficiente per spiegare la formazione della dimostrazione euclidea, o della logica aristotelica.

Per forzare il passaggio da un pensiero legato all'intelligibilità immediata o quasi, da ciò che si 'vede' sensitivamente o con l'immaginazione, a un sistema organizzato su basi deduttive, è necessario un complesso di condizioni sociali e culturali, espressioni della forma di vita di una comunità. È necessario che nasca l'esigenza di elaborare un metodo, o un insieme di metodi, condivisibile ed efficace, per stabilire se un'idea – un'intuizione, una tesi – sia vera a partire da alcune premesse.

La soluzione di questo problema in matematica non può esser dato solo dalla dialettica, o piuttosto da una dialogica che sia solo l'arte di ottenere ragione, anche se ritengo probabile che la pratica della dialettica abbia dato un consistente contributo. La discussione libera, che quasi è imposta dalla struttura politico-sociale della πόλις, può sembrare una premessa necessaria; non è però sufficiente. La città-stato è un modello diffuso in Grecia e non solo, ma non è così chiaro che sia anche solo una premessa necessaria; prova ne sia che i primi matematici che non fossero solo calcolatori o misuratori o ingegneri ecc. non sorsero contemporaneamente in ogni città, greca o fenicia. Il loro fiorire doveva esser legato a condizioni più particolari. Quel poco che sappiamo sulle origini della matematica in Grecia rimanda all'interesse sorto in qualcuno a comprendere la ragione ultima delle cose – che di per sé non ha particolare relazione con la πόλις – e soprattutto all'esistenza di una comunità nella quale la matematica fosse oggetto di particolare interesse. Tale comunità è esistita, ma la sua ideologia aveva poco a vedere con la struttura della πόλις, dato che comportava il segreto e un capo carismatico, e la sua sede era nell'Italia meridionale. Anzi, sembrerebbe che gli scopi di questa associazione non fossero affatto compatibili con il modo di far politica nelle πόλεις; democratiche o aristocratiche, erano rette in forma assembleare, ma l'ideale politico dei pitagorici era di tutt'altro genere. L'ambiente era quello di una setta misterica, non di una comunità di cittadini di pieno diritto aperta alla discussione e nella quale si poteva trovare chi ne perfezionasse il metodo, e quindi anche del ragionamento in generale. Infine, la matematica ha avuto contributi importanti in società diverse dalle città-stato, ed è stata spesso studiata nell'ambito di *scuole* iniziatiche. Anzi, l'approfondimento di una scienza può ben conciliarsi con l'apprendimento presso un Maestro, e con la trasmissione ai discepoli del sapere acquisito all'interno di una comunità ben distinta da tutto il resto. Infine, la matematica mesopotamica e quella indiana soprattutto giunsero a un buon livello pur sviluppandosi in tutt'altro contesto politico. La funzione della πόλις è molto più evidente nella nascita della dialettica rispetto alla matematica.

Piuttosto, l'identificazione del principio primo (ἀρχή) nel 'numero' sembra rientrare a pieno titolo nella ricerca dell'origine di tutte le cose da parte dei filosofi presocratici definiti come 'fisici'. Talete lo identificava nell'acqua, Anassimandro nell' ἄπειρον, Anassimene nell'aria. Sotto questo aspetto, i pitagorici compirono un passo assai significativo: sostituirono un elemento 'fisico' – non è chiaro cosa Anassimandro intendesse con il suo ἄπειρον – o che richiamava qualcosa di concreto, di sostanziale, le cui trasformazioni costituiscono il mondo sensibile, insomma una materia primordiale, con un elemento intelligibile, le cui proprietà sono indagabili. In un certo senso, i pitagorici erano più realistici: partirono da ciò che si può sapere e che possiamo riconoscere nelle attività umane, cioè nel potenziale creativo e ordinatore dell'uomo, piuttosto che da congetture su una realtà esterna. I pitagorici, non ostante le apparenze, erano pragmatici: le loro finalità erano etiche, politiche, educative. Tutto ciò lo troviamo nella figura di Archita. Anche l'importanza che questi poneva nell'armonia era condivisa dai pitagorici, anzi è assai verosimile che proprio la riflessione sulla natura del suono e sui rapporti tra le note abbia spinto Pitagora all'esame della proporzione e dei rapporti numerici. Vi è una ricerca della bellezza, dell'equilibrio, che va oltre l'aspetto meramente quantitativo. Il numero, non qualche sostanza, sarebbe l'elemento unificatore del sapere e della realtà. In Greco, mondo si dice κόςμος.

Gli inizi in Grecia sono quindi assai oscuri in quanto alle cause; sembrerebbe che l'esigenza della 'prova' sia sorta assai presto al fine di chiarire, di comprendere ciò che si era venuto a sapere da altre civiltà, insomma di ricostruirne la scienza cercandone le basi: non ci si accontentava delle informazioni ottenute, scarse e senza perché, ma se ne cercava questo perché.

Non più tramandato dal tempo di antichi saggi, ma sottoposto ad esame da parte di persone ad esso interessate vuoi in quanto tale, vuoi per fini pratici e politici, il sapere venne riformulato a partire dalla ricerca dei suoi fondamenti, fino a sfuggire al controllo dei saggi che fungevano da guide morali e legislatori tra i quali troviamo Solone e lo stesso Talete liberando un processo che ha l'apparenza di una crescita spontanea. Infatti, benché i progressi siano dovuti alle scoperte dei singoli matematici, la struttura stessa dell'aritmetica e della geometria, costrittiva e predefinita, imponeva i problemi e la loro soluzione. La discussione non conduceva a risultati effettivi di per sé, se organizzata sul modello della dialettica, ma solo se si conformava al sistema della matematica. Infatti questa deve essere effettiva, cioè quanto si riesce a dimostrare deve essere vero, come lo è il calcolo, dato che ha applicazioni nelle attività pratiche. Proprio l'effettività dei risultati ottenuti separa matematica e dialettica. Per cui noi possiamo constatare sia come Platone tenesse in grandissimo conto e la geometria e la dialettica, sia come fossero già dall'inizio metodi di indagine affatto diversi. Non è chiaro come Platone potesse seguire entrambe le vie. Forse la geometria conduceva all'intuizione delle forme, la dialettica (a parte la tecnica di condurre la discussione) serviva ad illuminare quanti desideravano la conoscenza con il suo potere di convinzione, o a indicare la via, senza dover essere espliciti. Eppure, se *a posteriori* sembra che tra ragionamento matematico e dialettica vi sia alterità, così non era per Platone e probabilmente per i filosofi anteriori. Ma le testimonianze in proposito non chiariscono questo punto: *Aristotele* afferma che la dialettica deriva da Zenone e raggiunge il massimo sviluppo proprio con Platone, quindi sarebbe stata una tecnica indipendente dalla razionalità pitagorica:

"nella storia della dialettica delineata dallo Stagirita, dunque, i Pitagorici ancora non ne erano partecipi, Zenone ne fu lo scopritore, Socrate il cultore nella forma semplicemente peirastica e Platone fu colui che la portò al massimo 'vigore' "(FERMANI, in *Organon* 2016, riportando un giudizio del Berti).

I neoplatonici accettavano la matematica fino al punto di vedere in Platone un continuatore di Pitagora; la ragione deve trovarsi nell'analogia tra i nessi e gli opposti che caratterizzano la dialettica e le relazioni tra i numeri. Alla fine dell'era antica Proclo, nel suo *Commento al Timeo*, avrebbe illustrato il significato dei nessi matematici.

Nel *Fedone,* Platone fa confessare a Socrate di non esser portato alla matematica, e che avuta coscienza di ciò, si sarebbe volto ad altre indagini; e questo fa pensare che le radici del pensiero platonico fossero due e ben distinte: l'insegnamento di Socrate, in particolare la sua maieutica, e la tradizione pitagorica. Le idee o forme di Platone e l'intuizione geometrica sono affini; la metempsicosi e l'idea che l'anima può aspirare al sommo bene e alla conoscenza liberandosi del vincolo del corpo è comune; non solo, Platone aspirava a fondare o guidare uno Stato ideale, e qui troviamo un punto di contatto con Archita e, indirettamente, con Pitagora. Il fattore unificante di matematica e dialettica deve trovarsi nel carattere ideale della realtà e nei fini che Platone si era proposto; entrambe sono il veicolo per la contemplazione del vero, dato che la dialettica serve a comprendere le mutue relazioni tra le idee, come quella di 'partecipazione', le relazioni tra i contrari, ecc. Inoltre, sempre nel *Fedone*, troviamo la seguente affermazione da parte di Cebete:

"...tutti gli uomini, ove sieno interrogati abilmente, dicono da sé ogni cosa com'è. Ora, se essi non si trovassero di possederne già la conoscenza e la diritta ragione, non potrebbero essere in grado di farlo. E poi basta metterli davanti a una figura geometrica… per convincersi che è realmente così." [Platone, *Tutte le opere* a cura di G. P. CARRATELLI 1974].

Cebete intende provare che "il nostro apprendere non è che ricordare", e che la figura geometrica sia parte della prova. Per Platone e non lui solo, la figura geometrica – non le forme degli oggetti sensibili – ci indica la via che porta alla realtà. Non è un concetto circoscritto alla scuola platonica: è il titolo di un libro scritto dal matematico *Penrose* (*The Road to Reality* 2004), dove la figura geometrica è sostituita dalle teorie fisiche. Questa era la valenza che i pitagorici assegnavano al numero, prima ancora che alla figura. La dialettica platonica non è solo una tecnica dialogica per dimostrare razionalmente l'inconsistenza della posizione dell'interlocutore, come in moltissimi dialoghi, o uno strumento della maieutica; essa ha anche valore probatorio: Platone cerca di farne uno strumento di giudizio e di indagine avente lo stesso grado di certezza raggiunto ai suoi tempi dal ragionamento matematico, estendendone l’applicazione al di là del ristretto campo della matematica. Sempre nel *Fedone*, lo stesso Cebete chiede a Socrate una prova conclusiva che elimini ogni dubbio sulla sopravvivenza dell’anima dopo la morte. Socrate argomenta, e Celebre acconsente: “non ho alcuna obiezione da opporre”, accettando l’inevitabilità della conclusione cui era pervenuto Socrate. Tuttavia, per quanto la dialettica appaia costringente, implicitamente si ammette che la conclusione sia accettata in forma negativa: Cebete non ha obiezioni, ma non è sicuro che non vi possano esserne da parte di altri, tant’è vero che chiede a Simmia se questi non abbia altro da aggiungere. In effetti, il limite della dialettica è questo; non si può esser certi che un problema non possa essere affrontato da altri punti di vista. Alla conclusione si giunge grazie alla collaborazione del rispondente, la guida è l’interrogante, e la vittoria della sua tesi dipende da come conduce il dibattito. Invece un corretto ragionamento matematico deve partire da premesse date e ben definite, e questo è possibile se le regole sono poche e trattabili in un modo solo:

“I pregi delle matematiche sono evidentemente molteplici. In primo luogo la semplicità dell'oggetto ne incrementa il valore conoscitivo: il non essere legati a un soggetto soggiacente non sottopone gli oggetti matematici all'alea dell'oscillazione tra determinazioni contrarie. L'aritmetica è pertanto considerata superiore alla geometria, proprio perché i principi costituenti della prima sono più semplici di quella della seconda, i quali hanno a che fare almeno con la determinazione categoriale spaziale" (CATTANEI, *Perché la matematica è una scienza?* 2002).

Un'implicazione è vera se e solo se, essendo vero l'antecedente, lo è il conseguente, o altrimenti se, essendo falso quest'ultimo, lo sia anche il primo. Da poche regole possiamo dedurre che non esiste il triangolo trirettangolo, che per tre punti non allineati si possa condurre una e una sola circonferenza ecc., e non si vede via di scampo, non solo perché non vengano in mente altre possibilità (in geometria piana). La costrizione è nella materia stessa, non nel modo in cui la si tratta. Queste certezze estendono l'intuizione immediata, rendono tutta la geometria evidente, dimostrata, ma attraverso un lungo percorso.

In Aristotele, il filone topico-dialettico e quello sillogistico-analitico convivono, e non vi è espressa una preferenza per l'uno o per l'altro; il secondo serve a dimostrare a partire da premesse date, mentre l'altro (dialettico) serve alla discussione che si estende alla ricerca delle premesse pur non avendo di per sé valore veritativo: "Inoltre essa è anche utile rispetto ai principi primi di ciascuna scienza. Infatti, a partire dai principi propri alla scienza in questione, è impossibile dire qualcosa sui principi stessi della scienza di cui ci si sta occupando, dal momento che i principi vengono prima di qualsiasi altro elemento; e quindi è necessario, per riflettere su di essi, far ricorso alle opinioni condivise espresse su ciascuno di essi."

Aristotele definiva il rapporto tra due forme di ragionamento, ma non si occupava direttamente di matematica, comprendendola nella logica sillogistica, data l'affinità tra l'implicazione e la prima figura del sillogismo.[3]

Se vogliamo indagare il perché della compresenza di geometria e dialettica in Platone, dobbiamo esplorare ancora più indietro nel tempo. Platone stesso ci viene in aiuto, e anche Zenone, con i suoi paradossi. Questi intendeva difendere la filosofia di Parmenide attaccando la realtà del moto attraverso le contraddizioni prodotte da questa idea, ed è proprio il *Parmenide* a indirizzarci al riguardo. Richiesto di produrre un saggio della dialettica dai partecipanti al dialogo tra un giovane Socrate, che espone una sua teoria sulle idee, lui stesso e Zenone, Parmenide spiega a sua volta la teoria dell'Uno. "Dunque se l'uno è, … anche l'essenza dell'uno sarà, pur non essendo identica all'uno… l'uno contiene l'essere e l'essere l'uno; se dunque altro è l'essere, altro l'uno; né l'uno in quanto uno è diverso dall'essere né l'essere in quanto essere è diverso dall'uno… ma sono diversi dal diverso e dall'altro". Possiamo quindi formare delle coppie: l'essere e il diverso, l'essere e l'uno ecc. "Poiché a ciascuna di codeste coppie accade di formare un due, ciascuno dei loro termini dovrà essere un uno… combinandosi un'unità qualunque con una coppia qualunque,

---

3 "Aristotele ritiene inoltre che la maggior parte delle dimostrazioni matematiche abbiano la forma di un sillogismo affermativo universale, ovvero Barbara... Ciò significa che la maggior parte dei teoremi matematici sono una cosa A detta di un'altra C ("are one thing A said of another C") e che ogni dimostrazione matematica ha un termine medio B che spiega la connessione tra A e C. Aristotele fornisce diversi esempi di tali triadi di termini in matematica…" [STANFORD ENC. 2004].

non diviene tutto questo un tre? E tre non è dispari e due pari? Se c'è il due, non ci sarà necessariamente anche il due volte; e se il tre, il tre volte?… Perciò tutti i singoli numeri necessariamente devono essere". Non si tratta solo di relazioni tra concetti o anche solo parole, cioè schemi logico-linguistici; "O non diventa il numero infinito nella sua molteplicità e partecipe dell'essere?".

Nel discorso di Parmenide i numeri sono principi metafisici, non astrazioni o schemi. La successione dei numeri è essa stessa uno dei principi primi, quello della molteplicità opposto all'unità. Paradossalmente, il molteplice nasce a partire dal due dal fatto che l'uno è. Il tre unisce l'uno col due, e così la triade diventa un simbolo di riunificazione, di unione a livello superiore rispetto allo stesso uno 'immediato' senza i molti. Non vi è uno senza i molti, unità senza molteplicità. La dialettica di Parmenide è una filosofia elevata, che coinvolge il numero in un sistema intelligibile di partecipazioni e distinzioni, non solo di proporzioni e di misure. Non è da escludere che già i primi pitagorici vedessero nel numero un principio di natura dialettica, anche se la loro insistenza su rapporti, proporzioni ecc. a prima vista non corrobora un'ipotesi del genere, potendosi tutto ciò osservare nell'esperienza ordinaria, a meno che non considerassero il numero come il principio unificante della molteplicità nell'unità: allora potrebbe essere che la filosofia di Parmenide e quella di Pitagora abbiano sviluppato in forme diverse la stessa intuizione fondamentale, che ritroviamo nell'idea di Platone, di ciò da cui emana il molteplice, e che può essere compresa mediante la dialettica. È anche un principio etico e non solo metafisico la tensione verso l'Uno, l'origine di tutto.

La condizione necessaria per la costruzione di un sistema deduttivo compiuto come quello di Euclide è la separazione tra matematica e logica sillogistica da una parte e dialettica dall'altra. Si tratta di una questione di metodo prima ancora che filosofica. Questa scissione in realtà riflette una sempre maggiore specializzazione, e questa effettivamente difficilmente può esser spiegata se non grazie alla πόλις, in quanto richiede la discussione, l'interesse, il confronto tra le opinioni, il sorgere di idee nuove e di approcci innovativi, insomma una comunità dinamica; in sé tuttavia questo non vale per la ricerca matematica. Questa non è in sé democratica, in quanto è conforme all'idea che vi sia una 'verità assoluta', accessibile ai pochi che si dedicavano al suo studio come vediamo anche dalla posizione politica di Platone, e si è sviluppata in contesti di tutt'altro genere. La specializzazione conduce a cercare forme di ragionamento specifiche, alla separazione dalla metafisica, alla 'scienza' intesa nel senso moderno del termine come attività orientata al suo oggetto, senza finalità ultime diverse dalla ricerca in quanto tale.

L'eccezionale sviluppo della geometria greca a partire dal V sec. fino ad Euclide ed oltre, ponendo il culmine e il termine nelle opere di Apollonio di Perga e Pappo, è stato spesso spiegato con il mito storiografico del 'meraviglioso popolo greco'. Non è vero che tale 'mito' debba essere respinto; la cultura ellenica era veramente eccezionale, nel confronto sia con gli antichi imperi d'oriente, sia con i popoli germanici, con gli stessi Romani, ecc. Ma un così rapido accrescimento del sapere matematico ha altre cause e motivazioni, che possiamo individuare anche in altri processi di tutt'altro genere. Non vi è una differenza totale rispetto all'affermarsi del capitalismo, al progresso tecnologico, o allo stesso moltiplicarsi delle forme di vita. In un certo senso, la successione di Fibonacci, o successioni dello stesso genere, sono lo schema sottostante tutti questi fenomeni di accrescimento.

Durante il V e il IV sec., *Eudosso* formula una definizione di rapporti uguali che venne universalmente accettata per superare le difficoltà conseguenti la scoperta degli incommensurabili; allo stesso Eudosso sarebbe da attribuirsi l'assioma noto come di Archimede, per il quale per ogni coppia di grandezze omogenee non nulle esiste un numero naturale n tale che il multiplo secondo n della minore delle due superi la maggiore. Archita e *Ippocrate di Chio* risolvono il problema della duplicazione del cubo, *Menecmo* studia l'ellisse mediante una sezione conica, suo fratello *Dinostrato* ottiene la quadratura del cerchio a partire dalla ‘trisettrice’ che *Ippia* aveva già introdotto per risolvere il problema della trisezione di un angolo qualsiasi.

Non vi è alcunché di misterioso in tutto ciò, un organismo cresce finché le condizioni sociali e politiche non ostacolino il progresso, ed è assai verosimile che il costituirsi dell’impero romano sia stato di impedimento a ulteriori sviluppi, e la causa ultima del declino, data la tendenza dei grandi organismi statali ad assorbire enormi risorse e a produrre classi dirigenti ostili alle novità. Ma ciò che avvicina lo straordinario sviluppo della matematica greca ad altri processi di rapida espansione ha origine in essa stessa. La geometria rivela una struttura ricorsiva, se ordinata secondo il sistema di Euclide. Come nelle successioni ricorsive, ogni passo, ogni progresso verso la costruzione del sistema presuppone il passo precedente, seguendo la traccia che lo schema delle sue relazioni interne suggerisce. Con questo non s’intende negare l’attività del soggetto che indaga, suppone, indovina, ‘vede’ problema e soluzione. Gli incommensurabili ‘spingono’ verso le soluzioni di Eudosso, la quadratura del cerchio ‘esige’ una soluzione che c’è già, potenzialmente; si tratta di scoprirla. Non è affatto detto che la successione delle scoperte storicamente accertata sia l’unica possibile, anzi non è neppur detto che sia stata unica; soluzioni alternative possono esserci state, forse respinte perché apparse errate, o migliorate, o semplicemente ignorate, o non pubblicate, o non pervenuteci. Moltissimi e anche importanti testi greci sono andati persi. Non solo; nel procedere sorgono nuovi problemi, nuove soluzioni, e la parte nota del sistema si accresce fino ai suoi limiti. La geometria ha dei limiti, che furono superati solo nel XIX sec. da parte di pochi ingegni geniali. Tale superamento però non era possibile con i metodi e gli strumenti in dotazione ai Greci. La loro geometria era fortemente legata alla costruzione della figura, all'immaginazione e alla rappresentazione, piuttosto che a un rigore logico astratto. Le geometrie non euclidee nacquero quando divenne chiaro che la negazione del V postulato non implicava una contraddizione con gli altri, e perciò erano possibili; non solo, la scoperta di modelli non-euclidei all'interno della stessa geometria euclidea presupponeva un approccio logico-astratto che contemplasse anche una ridefinizione dei cosiddetti concetti primitivi. Tutto ciò era lontanissimo dalla 'forma mentis' dei Greci, molto legata all'immaginazione. Per di più, i loro strumenti erano riga e compasso, impiegati in un certo modo: tracciamento di circonferenze e linee rette e delle loro intersezioni.

Immaginazione e senso pratico possono coesistere benissimo, anche nella stessa persona, come possiamo vedere nella figura dello stesso Talete, considerato uno dei Sette Sapienti (οἱ ἑπτά σοφοί). Vi è più di un elenco di questi saggi; *Diogene Laerzio* cita Talete, Solone, Periandro, Cleobulo, Chilone, Biante, Pittaco. Erano modelli di saggezza pratica, cui erano attribuiti consigli pratici sotto forma di aforismi e sagge massime. La qualifica di σοφοί delinea il concetto che della sapienza avevano i Greci: la σοφία comprendeva l'utilizzo del sapere pratico, l'arte di amministrare. Del gruppo non faceva parte Pitagora, forse un segno dell'eccezionalità dei pitagorici.

Rimane da definire quanto i più antichi dei matematici greci appresero dalle culture preelleniche. La discussione precedente dovrebbe chiarire che la risposta a questo problema non è determinate ai fini della comprensione dello sviluppo della matematica presso i Greci. È molto più importante penetrare quel pensiero matematico greco che non troviamo nella geometria, e che può riconoscersi nel pitagorismo. La prima seguì strade proprie, e i suoi metodi non rimandano ad altro; quest'ultimo va compreso in base all'idea greca di 'armonia' del cosmo. Nulla vieta di pensare che molte informazioni siano pervenute ai Greci attraverso viaggi e contatti peraltro assai scarsamente provati, per la qualità e la quantità delle fonti: un esame ne rivela la fragilità, per non dire l'inconsistenza. Questa presunta trasmissione del sapere è quasi tutta immaginazione basata su racconti e aneddoti: 'storie' nel senso volgare del termine. La vera base di tutto ciò è un'assunzione apparentemente estremamente ragionevole, e cioè che contatti commerciali e viaggi implichino di per sé un trasferimento del sapere tecnico-scientifico nel paese del mercante o viaggiatore. Questo si verifica, se una civiltà in possesso di una tecnica più avanzata si impone ad una inferiore sotto questo aspetto, trasferendo sul territorio di questa personale e mezzi, o se obbliga questa con la forza ad aprire le proprie frontiere alle influenze esterne, e se accetta che membri qualificati della inferiore accedano all'istruzione fornita da quella superiore. Nessuno di questi eventi si sarebbe verificato allora, a meno che non si consideri la conquista della

Ionia da parte dei Persiani: traccia non supportata da alcunché di concretamente documentato. Si parla di Egizi e Babilonesi. Non solo, abbiamo controesempi: i Turchi ottomani acquisirono capacità tecniche dai Greci e dagli europei (metallurgia, e non solo), o impiegarono al loro servizio tecnici cristiani, come il costruttore del grande cannone col quale cercarono di abbattere le mura di Costantinopoli nel 1453, ma non svilupparono nulla che superasse i 'maestri', con le conseguenze che iniziarono a manifestarsi a partire dal XVIII secolo. Anche i Cinesi ebbero contatti con gli europei all'inizio dell'età moderna e vennero a conoscenza della loro civiltà, sia pure molto limitatamente, ma l'assimilazione della scienza occidentale progredì lentamente e senza che i Cinesi vi aggiungessero nulla di significativo. Fino al XX secolo, la scienza è occidentale (comprendendo in questa categoria anche i Russi), con qualche contributo specie da parte di Giapponesi e Indiani a partire dal XIX - XX sec.; i Cinesi furono un po' in ritardo, salvo poi recuperare sorprendentemente negli ultimi decenni. Al contrario: viaggiatori occidentali giunsero in Cina verso la fine del medioevo, e ritornarono, ma questi contatti non influirono in maniera decisiva sui progressi della scienza e della tecnica in Europa. Diverso è il discorso per quanto riguarda l'influenza degli Arabi e dei Bizantini sul Rinascimento: ma questi fecero conoscere ciò che era andato perduto, e di cui si riconosceva il valore al risveglio dal medioevo.

L'esistenza di 'scambi' di per sé non prova nulla. Non solo: il sapere, specie se è sapere tecnico, quindi fonte di potenza, non viene facilmente concesso agli stranieri. Una cosa sono le leggende, come quella dell'Atlantide che Platone fa risalire a un anziano sacerdote egizio, altra cosa è la scienza. Certamente un viaggiatore curioso e intelligente quale era Talete poteva apprendere molto, ma tutto questo andava ricostruito, elaborato, indagato razionalmente. Si trattava di ricostruire un quadro a partire da poche linee, da qualche macchia di colore. È ciò che fanno archeologi e storici: ricomporre il mosaico, a partire da poche tessere, o anche molte, ma non connesse, talvolta non concordanti. Se le prime nozioni dei Greci erano tratte dai popoli del vicino Oriente, lo storico della matematica che cerchi di indagare quanto e come queste furono loro trasmesse dovrebbe risistemare ciò che già era stato risistemato dagli antichi.

Si aggiunga che la sapienza arcaica era privilegio dei sacerdoti, era ad essi riservata in modo esclusivo. Certamente i Greci assimilarono tecniche dai popoli vicini – p. es. la scrittura dai Fenici. A loro volta, gli Etruschi appresero molto dai Greci, soprattutto importando manufatti. I popoli germanici impararono molto dai Romani, ma senza superarli. All'epoca delle invasioni barbariche, il loro grado di civiltà era ancora assai lontano da questi ultimi. È questo superamento delle nozioni eventualmente apprese all'estero che va spiegato, non quali siano queste nozioni. Inoltre, non è affatto da escludere che gli iniziatori della scienza greca abbiano esagerato l'aspetto esotico, misterioso se non misterico, di ciò che avrebbero appreso. I Greci del VII – VI sec. a.C. erano coscienti di confrontarsi con civiltà superiori, che avevano costruito le piramidi e i giardini pensili, e che dimostravano di conoscere l'astronomia. Questa, in particolare, doveva suscitare interesse, come si evince dall'aneddoto dell'eclisse di sole prevista da Talete. Il saper fare previsioni era considerato di importanza fondamentale. Secondo il Colli (*La nascita della filosofia*) era il carattere distintivo della sapienza arcaica.

Si era già insinuata in qualcuno l'idea che indovini ed oracoli non bastavano, e che il ragionamento e la scienza erano più efficaci del mito nella pratica. Perciò stesso, la rivendicazione di un sapere di origine lontana concesso o comunque ottenuto da qualcuno avrebbe conferito a costui autorità ed, eventualmente, potere politico. La meraviglia per le conquiste della civiltà greca nasce dalla scarsa conoscenza di ciò che realizzò in campo scientifico durante il VI sec., non dall'ignoranza di ciò che avrebbero appreso da fonti esterne.

Infine, i reperti archeologici giunti sino a noi – questi sì, non leggendari e significativi del grado di civiltà, come il vasellame e in generale i manufatti per uso domestico – testimoniano non solo abilità tecnica nella ricerca della perfezione della forma, ma anche sensibilità estetica attraverso una decorazione stilizzata, sia nella rappresentazione della figura umana o di animali, sia nei motivi geometrici che spesso la accompagnano. La decorazione non è peculiare della sola civiltà greca arcaica, ma interessa perché non consta solo di forme zoomorfe o fitomorfe stilizzate, ma anche di motivi meno legati alle forme osservabili in natura. In questi ultimi possiamo riconoscere una ideazione non puramente imitativa, un embrione delle figure geometriche. La ceramica geometrica greca si sviluppò a partire dal 900 a.C., preceduta dalla ceramica protogeometrica attica. Il meandro riempito a tratteggio diventa il motivo decorativo più tipico, accompagnandosi a triangoli, rombi, motivi a zig zag, denti di lupo, scacchiere, reticoli. Nei riquadri si inseriscono svastiche e rosette geometriche a quattro foglie. Possiamo esser certi che l'architettura, con la sua divisione dello spazio e la creazione di volumi, la fondazione di città ecc. diede forte stimolo all'ideazione geometrica e alla misurazione, senza il bisogno di appoggiarsi a resoconti più o meno leggendari.

La tradizione antica assegnava a Pitagora e alla sua scuola grande importanza in relazione alla filosofia e alla matematica. L'attendibilità di questa posizione è stata discussa ed attaccata da più studiosi, e sono state discusse le discussioni; la valutazione su queste indagini, assai erudite ed esse stesse inevitabilmente congetturali, non sembra produrre alcuna conclusione il cui grado di attendibilità sia in generale definibile con certezza. Mi limito ad esporre le tesi di *L. Zhmud* (1989) dell'Istituto di Storia della Scienza e della Tecnologia di Leningrado, specialmente per la relazione tra la matematica greca e quelle dell'Oriente e dell'Egitto.

"Non si trova traccia di influenza orientale nelle opere dei matematici greci che avevano effettivamente visitato l'Egitto, come Talete, Democrito, Eudosso. Anche dopo le conquiste di Alessandro Magno, quando i Greci si trovarono a vivere in stretto contatto con questi popoli, non mostrarono alcuna rile-

vabile tendenza ad adottare i metodi della matematica orientale. Sebbene Euclide vivesse ad Alessandria per la maggior parte della sua vita, non possiamo trovare alcuna prova di un'influenza egiziana nei tredici libri dei suoi Elementi.
Ciò vale anche rispetto ad altri matematici del III secolo a.C., come Archimede e Apollonio di Perga, che in linea di principio avrebbero potuto aver confidenza con la matematica orientale."

Di segno opposto, ovviamente, sono le valutazioni offerte da studiosi extraeuropei, indiani soprattutto. "Nella storia della matematica, l'India sembra aver dato il contributo maggiore nell'introdurre innovazioni semplificatrici ecc." [DUTTA 2002], riferendosi però all'introduzione dello zero, ai progressi in algebra ecc. posteriori di secoli all'epoca precedente la Grecia classica. Per quanto riguarda l'epoca che ci interessa, qualche studioso sostiene che Pitagora "fece un viaggio speciale in India per apprendere i principi della matematica radicati negli antichi testi sanscriti del *Sulba Sutra*." [SHAH]. Verso la fine del XVIII sec. e nella prima metà del XIX alcuni studiosi europei aderirono all'idea che l'India fosse stata la culla della civiltà, e l'astronomo *Bailly* in particolare affermò, scrivendo a Voltaire, che Pitagora ebbe i bramini per Maestri, e questi si disse d'accordo: "Sono convinto che ogni cosa, astronomia, astrologia, metempsicosi ecc. ci è venuta dalle rive del Gange".

Infine, non sappiamo cosa possa essere stato appreso dai Babilonesi e sappiamo poco delle conoscenze degli Egizi. I papiri (Rhind, Mosca ecc.) pervenutici sono stati datati intorno al 1550 a.C. il Rhind [BRITISH MUSEUM], e ancor più indietro nel tempo quello di Mosca, tra il 1783 e fin dopo il 1640, forse basato su materiale risalente a un testo del 1850 a.C. circa, a sua volta forse contemporaneo alla copia da cui fu copiato il Rhind [CLAGETT 1999]. Presso a poco agli stessi secoli apparterrebbero altri papiri pervenutici, cioè alla XII – XIII dinastia. È quindi inutile chiedersi, in base ai reperti, quale potesse esser stata l'influenza della matematica egizia sui Greci.

Tutte le considerazioni sopra esposte confliggono con quanto ci aspetteremmo, che al contrario i contatti secolari tra le civiltà affacciate sul Mediterraneo avrebbero comportato il trasferimento di conoscenze matematiche tra le altre ai Greci dall'oriente vicino. Non si risolve la contraddizione appellandosi alle tracce di 'algebra geometrica' eventualmente riscontrabili negli *Elementi* di Euclide, o alle leggende; la connessione *deve essere esistita* e se non è documentabile per una data via, se ne deve cercare un'altra. La soluzione non passa attraverso sofisticate analisi, al contrario è chiaramente indicata dalla stessa idea di 'armonia' di cui parlavano, direttamente o no, i pitagorici e quanti si qualificavano come tali nel corso di tutta l'antichità a partire dal VI sec. a.C., e quanti ne accolsero almeno in parte le idee, come Platone e i suoi epigoni, i neoplatonici in particolare della seconda Accademia. L'armonia rimanda alla musica, verso la quale non vi sono le barriere che possiamo supporre si frappongano alla diffusione delle conoscenze tecniche. Possiamo immaginare, credo con qualche ragione, che architetti e calcolatori non gradissero la diffusione della loro arte, ma la musica e le arti affini sono apprezzate universalmente, e le relative modalità, che non hanno relazione alcuna con questioni di potere, potevano diffondersi senza confini. Sappiamo che le scale musicali greche erano affini a quelle delle civiltà sulle rive del Mediterraneo, che erano state studiate, e che in particolare in Siria e in Mesopotamia erano state sistematizzate teoricamente. Non è necessario spingersi fino a Babilonia; la musica è multicentrica. Il più antico pezzo musicale pervenutoci viene da Ugarit, in Siria, e sarebbe databile al 1400 a.C.[4] L'idea che i pitagorici avevano dell'armonia come principio di ordinamento del cosmo poteva essere un'intuizione degli stessi pitagorici, una di quelle novità assolute che, sviluppate fino alle ultime conseguenze, hanno conseguenze importanti in campo filosofico e scientifico, ma doveva avere giustificazioni ben più lontane nel tempo, che troviamo nei testi lasciatici dagli stessi antichi autori greci. L'armonia, o più semplicemente l'acustica, implica precisi e ben noti rapporti numerici, come pure i cicli astronomici, e infatti armonia e astronomia sono state fino all'età moderna collegate da relazioni aritmetiche che a noi possono apparire ingenue ma che non sembravano tali in culture quasi scientifiche, nelle quali la ricerca di nessi, di analogie, di spiegazioni che collegassero fenomeni e attività diverse passava anche attraverso rapporti numerici. In sintesi, con l'aritmetica si intravede una forma comune oltre alle apparenze del mondo sensibile.

È ben noto che tra scale musicali e rapporti numerici vi è strettissima correlazione. La relazione con l'astronomia è con-

4 v. *Music of Mesopotamia - Wikipedia*.

fermata dall'essere sette il numero delle note delle scale eptatoniche e dei corpi celesti erranti, i pianeti più il Sole e la Luna. Queste potrebbero essere coincidenze, ma non è detto fossero considerate come tali; è la percezione che conta, non la realtà oggettiva, scientificamente intesa secondo criteri moderni. Se i pianeti erano associati agli dèi, come effettivamente avveniva presso tutte le civiltà intorno al Mediterraneo e non solo, canti e composizioni musicali in loro onore avrebbero naturalmente impiegato altrettante note, in modo che ogni nota fosse associata a una divinità; questa potrebbe essere l'origine remota dell'idea secondo la quale pianeti e note si corrispondono. Ma, anche qualora le sette note e i sette pianeti non fossero stati uniti per questa via nello stesso numero, e la struttura musicale non fosse stata suggerita dall'astronomia e dal culto degli dèi, ma imposta dalla pratica musicale, non poteva passare inosservato che il numero sette fosse l'elemento comune, un nesso, tra cielo, culto e musica e perciò stesso dotato di un significato che sfuggiva a una totale comprensione razionale. In qualche modo, il numero aveva proprietà misteriose, carattere soprasensibile, natura intrinseca non empirica. Ciò che caratterizza il pitagorismo è l'elevazione del numero a principio fondamentale formativo del cosmo e lo studio sistematico che ne seguiva; quest'ultimo, forse, si distinse chiaramente dalla matrice armonica originaria per diventare un'indagine a sé stante. Molte nozioni sui numeri appartenevano ai Babilonesi, ma non è possibile documentare con certezza una qualche trasmissione da questi ai Greci. Questi ultimi non registrarono tale passaggio, se non attraverso i racconti dei viaggi attribuiti a Pitagora e a

Talete; siamo quindi autorizzati a ritenere opinioni senza reale riscontro sia la derivazione totale o quasi della matematica dei primi pitagorici da fonti orientali, sia la tesi opposta, ma si deve ammettere la necessità di un legame attraverso la teoria e la prassi musicale, che dovevano essere patrimonio comune di tutta l'area mediterranea orientale. Questa può essere una spiegazione sufficiente della genesi del pitagorismo; per quanto riguarda ciò che venne attribuito a Talete, l'interesse principale sembra orientato alla geometria e alla misura. Il fortissimo sviluppo della geometria in Grecia a partire dal V-IV secolo a.C. dimostra però come i Greci fossero capaci di porsi problemi e di saperli risolvere senza dover ricorrere a significativi apporti esterni, o a conoscenze condivise in tutta l'area mediterranea orientale. Non ci sono pervenuti documenti che descrivano quanto di queste nozioni fosse in possesso dei Greci del VII-VI sec.; ma è certo che gli sviluppi successivi fossero opera dei Greci, e vanno compresi alla luce di un pensiero già inizialmente rivolto alla ricerca di dimostrazioni irrefutabili.

Se però si va alla ricerca di connessioni al di fuori della filosofia matematica greca, queste stanno nella cultura comune dell'area mediterranea condivisa tra mercanti e navigatori. Non troviamo riferimenti tra i platonici e i pitagorici, che guardavano altrove. L'arte del calcolo deve essere stata trasmessa ai Greci dai Fenici anzitutto, come la scrittura. I Greci adottavano il sistema decimale e impiegavano come cifre le lettere dell'alfabeto.

Abbiamo testimonianze certe sulle conoscenze dei popoli della Mesopotamia e degli Egizi, ma limitate, specialmente per quanto riguarda questi ultimi. La tradizione, che non sappiamo quanto sia attendibile, attribuisce ai viaggi di Talete e Pitagora fra quelle genti la trasmissione di parte di quelle conoscenze al mondo greco. Vi è qualcosa di strano, di mancante, in questa descrizione, non solo perché accentra l'attenzione su iniziative personali ignorando un insieme di rapporti culturali che pur dovevano esser esistiti, ed esser stati importanti. Si suggerisce implicitamente che questi non siano stati così importanti rispetto alla nascita della matematica greca, quasi questa derivasse dalle iniziative e dal pensiero di pochi individui, e dalle ricerche di una scuola in particolare. Sembra che la narrazione tradizionale suggerisca una qualche superiorità della civiltà egizia e di quella mesopotamica rispetto alle altre culture del vicino oriente, ma anche i Fenici avevano raggiunto un elevato livello di civiltà. I Greci trassero l'alfabeto dai Fenici, intorno al 750 a.C. Erano grandi architetti, grandi navigatori, costruttori di città, avevano una struttura politica simile a quella delle città greche e, per di più, erano geograficamente più vicini alla Grecia. Si consideri la leggenda del re di Tiro *Hiram I*, che si fonda sulla Bibbia e sul *Contro Apione* di Flavio Giuseppe, che a sua volta attinge a un'opera perduta di Menandro e altri documenti. I Fenici, come anche i Cananei, facevano parte di un'area culturale vicina all'Egitto, ma la storia degli Ebrei illustra bene come le regioni comprese tra la Mesopotamia e il Mediterraneo fossero contese tra Egitto e Caldei, Babilonesi, Assiri ecc. I viaggi, reali o immaginari, di Talete e di Pitagora non furono certo i primi contatti con le civiltà preelleniche, in particolare con l'Egitto, ritenuto luogo d'origine della geometria; resta da capire perché la memoria storica riservi a quei due viaggiatori una parte essenziale, direi esclusiva, nell'attribuir loro la mediazione tra la Grecia e le culture del vicino oriente che fu all'origine della scienza greca. Questa narrazione non è mai stata messa in discussione nell'antichità. La spiegazione più probabile è che gli antichi scrittori tenessero per certo che in Grecia fosse nato con essi, o almeno al loro tempo, qualcosa di nuovo, come potrebbe essere il sorgere di un interesse verso la conoscenza non solo utilitaristico, anzi soprattutto filosofico e che questo fosse assai più essenziale delle nozioni tecniche. Queste, per quanto evidentemente utilissime, erano patrimonio diffuso in tutta l'area mediterranea e nel vicino oriente, e non identificavano alcuna forma di pensiero originale. Questo 'spirito filosofico' sarebbe stato trasmesso ai pitagorici non da ingegneri e simili, ma da sacerdoti e saggi egizi e babilonesi e forse indiani; avrebbe avuto carattere iniziatico, includeva il sapere scientifico, implicava precise regole etiche e una posizione politica, non avrebbe dovuto essere trasmesso a chiunque e avrebbe ispirato il carattere di sacralità dell'aritmetica pitagorica.

Eppure, per quanto sia un'idea estremamente ragionevole, non vi è nulla che confermi l'ipotesi di una derivazione da fonti esterne della matematica greca, o più esattamente, della parte di essa di cui siamo a conoscenza, *esclusa la logistica* ma compreso ciò che sappiamo delle fasi più antiche, anzi possiamo ravvisare indizi (non prove) in senso contrario. Tutto ciò che sappiamo dell'epoca compresa tra Platone ed Euclide descrive una progressione interna al pensiero greco (sempre escludendo le tecniche del calcolo), e così anche in altri campi. Per quanto riguarda le scoperte attribuite a Pitagora e a Talete, assolutamente nulla al di fuori della tradizione antica fa pensare che siano apporti esterni, o anche solo che ne siano una rielaborazione; è solo una supposizione che abbiano cercato di fondare su basi proprie un sapere altrove acquisito. Questa idea ha trovato sostenitori in tempi recenti con motivazioni legate all'analisi degli *Elementi* di Euclide e dei reperti babilonesi.

L'ipotesi di una continuità tra gli inizi della matematica greca e quella babilonese è stata sostenuta in particolare dal grande archeologo e matematico *Neugebauer* (1899-1990) rompendo con la visione tradizionale di una scienza ellenocentrica. Rispetto all'approccio tradizionale, l'indagine di Neugebauer è fondata sull'analisi matematica delle fonti primarie.

"Il suo punto di vista era che un rigoroso ragionamento assiomatico nello stile di Euclide nacque piuttosto tardi e che Archita, contemporaneo di Platone, testimoniava il primato del contenuto algebrico sulla forma geometrica in cui i Greci vestivano la loro matematica." [ROWE 2013]. Secondo N., la 'logistica' di Archita era essenzialmente algebra; abbiamo già visto che questa interpretazione sembra alquanto riduttiva. È chiaro che un'ipotesi sul significato di un termine non è una prova che parte della matematica greca fosse algebra in forma geometrica.

"La risposta alla domanda su quali fossero le origini del problema fondamentale in tutta l'algebra geometrica (ovvero l'applicazione delle aree, come dato dalle proposizioni di Euclide I.44 e VI.27-29) può oggi essere data completamente: risiedono, da un lato, nell'esigenza da parte dei Greci di garantire la validità generale della loro matematica sulla scia dell'emergere di grandezze irrazionali, dall'altro, nella necessità che ne deriva *di tradurre allo stesso modo i risultati dell'algebra pre-greca* [che erano formulati in forma] *'algebrica'*. Una volta formulato il problema in questo modo, tutto il resto è completamente banale (!) e fornisce *la diretta connessione tra l'algebra babilonese e le formulazioni di Euclide*" [NEUGEBAUER 1936, citato dal Rowe]. In sintesi, la tesi del N., largamente accettata, è che i Greci, volendo fondare la geometria su basi razionali eliminando quanto poteva condurre a contraddizioni, scelsero di procedere per via sintetica, in modo da includere le grandezze incommensurabili nello schema generale, riscrivendo in forma geometrica ciò che era già stato ottenuto ma in forma algebrica.

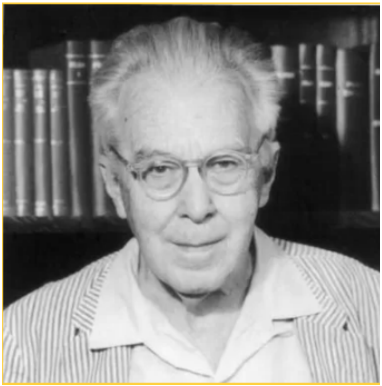
Abbiamo già visto che questo modo di procedere da parte dei Greci può apparirci strano, ma non sarebbe stato ingiustificato, considerato che le grandezze irrazionali non possono essere trattate in aritmetica. Può ben essere che, non sapendo come trattare gli irrazionali come numeri, il che sarebbe necessario se si adottano le procedure basate sull'algebra, abbiano riposto maggior fiducia nella costruzione geometrica in quanto 'esatta' (ZEUTHEN 1896). In effetti, questo problema non si era posto per i matematici non greci, perché ignoravano l'esistenza di grandezze incommensurabili, e comunque si occupavano anzitutto degli aspetti pratici, il calcolo. Tuttavia, le difficoltà portate dagli irrazionali non impedirono affatto ai matematici del Rinascimento di scoprire e utilizzare formule risolutive per le equazioni di secondo grado, e anche superiore. Anzi, questi ne furono così poco impressionati che introdussero i numeri immaginari. La tesi del N. trae la sua forza dalla convinzione che solo la geometria poteva rappresentare le grandezze senza approssimazioni, e quindi si doveva procedere sulla sua strada; meno chiaro è che i Greci avessero tradotto in geometria metodi algebrici già consolidati, se non altro perché ciò implica che ne fossero a conoscenza, cosa che non sappiamo con certezza.

Se N. ha ragione, dovremmo quindi rifugiarci nell'idea che i Greci, per ostinazione indotta dalla ricerca di perfezione, abbiano rinunciato ai vantaggi del calcolo algebrico in favore della contemplazione della perfezione geometrica. Non solo; i Greci consideravano tutti gli altri come 'barbari', e certi sviluppi possono essere dovuti ad una sorta di 'nazionalismo culturale' che programmaticamente ignora i risultati ottenuti dagli altri, specialmente quando i propri, ottenuti nella geometria, sono rapidi e spettacolari. Non è possibile valutare pienamente il peso di queste considerazioni ignorando la questione di fondo, se i Greci conoscessero o avessero compreso i metodi babilonesi, e in quale misura. Per costruire il sistema di Euclide quelli non erano necessari. Si può anche ipotizzare che certi problemi risolvibili numericamente per via algebrica, sia pure attraverso approssimazioni, compresi quelli riducibili ad equazioni di II grado, fossero stati formulati in piena autonomia come problemi geometrici ignorando le soluzioni già trovate da altri.

Ma, a prescindere da ogni ipotesi che si possa formulare in proposito, non abbiamo alcuna certezza che le conoscenze registrate nelle tavolette dell'Antico Regno si siano conservate per il lungo intervallo di tempo (mille anni e più) che le separa dall'epoca di Talete e Pitagora. Riserve analoghe e per lo stesso motivo si possono avanzare anche per quanto riguarda gli Egizi; intercorre lo stesso intervallo di tempo di circa un millennio tra i pochi papiri pervenuti fino a noi e gli albori della matematica greca. La questione è stata esaminata da *E. Robson* in un articolo pubblicato nel 2005 e citato da *K. Ferguson* 2008, 2010: "La maggior parte delle testimonianze in nostro possesso sulla matematica babilonese proviene in realtà da due intervalli di tempo assai distanti. Il primo e più noto è l'inizio del secondo millennio a.C., o periodo babilonese antico. A questo la maggioranza fa riferimento… ed è stata questa matematica che gli storici del ventesimo secolo consideravano proto-greca. Vi è poi un *corpus* di reperti molto più tardi, risalenti intorno al 650 a.C. fino forse al primo secolo d.C. Questa matematica babilonese più tarda (come la chiamerò qui) è stata in gran parte trascurata dagli storici del ventesimo secolo… vi rimangono molti dei problemi della matematica babilonese antica, ma risolti in modi molto diversi." In sostanza, i matematici greci sarebbero stati all'oscuro della matematica babilonese più antica e non avrebbero preso in considerazione quella recente a loro contemporanea.

In sintesi: i Greci non avevano bisogno dei Babilonesi per costruire il proprio sistema geometrico, per il semplice motivo che questo è strutturalmente indipendente dall'algebra, e comunque potevano ritenere inutili eventuali nozioni straniere estranee ai loro procedimenti. È però vero che certi problemi di applicazione delle aree e la costruzione della sezione aurea in particolare, richiamano così da vicino l'algebra di II grado, da fornire un consistente supporto alle idee del Neugebauer.

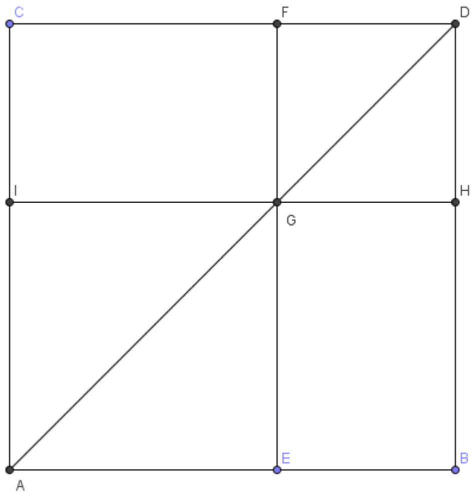
Un punto debole della tesi del N. è che presuppone una netta distinzione tra procedimenti algebrici e geometrici, che è ben definita oggi, ma solo dopo un lavoro di raffinamento dell'algebra più che secolare. I matematici antichi – sembra – non si esprimevano attraverso formule e operazioni su lettere, ma attraverso immagini, per cui il quadrato di a era proprio quello, preso alla lettera, e il quadrato di $a + b$ aveva per lato la somma di due segmenti lunghi a e b. Se non si pensa direttamente con le lettere, bisogna avere in mente quadrati, rettangoli, ecc. come rappresentanti dei numeri o delle grandezze indeterminate; è come dire che non vi era algebra senza geometria, e le regole di calcolo algebrico erano proprietà delle figure geometriche. In effetti, la mancanza di formule esplicitamente scritte (sono deducibili dalle procedure illustrate in tavolette d'argilla) induce a pensare che anche i Babilonesi rimanessero ancorati alla geometria, salvo aver raggiunto una notevole capacità di manipolazione che può assimilarsi ad una tecnica algebrica. Non vi sarebbero stati né trasposizione, né travestimento o altro, ma solo una revisione di certi concetti (come quello di rapporto) e scarsa considerazione per il calcolo, limitato a fini pratici. La questione di cosa i Greci abbiano acquisito da Egizi, Babilonesi ecc. rimarrà aperta, ma è chiaro che almeno dalla scoperta degli incommensurabili in poi seguirono vie originali.



Otto E. Neugebauer
Decifrò le tavolette matematiche babilonesi e sostenne la tesi per cui i Greci interpretarono geometricamente le equazioni di secondo grado già studiate molti secoli addietro dai Babilonesi.

Con ‘algebra geometrica’ si intende quella parte della geometria che può essere intesa come una raffigurazione e dimostrazione di regole di algebra, e che tratta problemi che sono risolvibili attraverso equazioni algebriche, in particolare di II grado, e specialmente quelle associate a sistemi dati in ‘forma normale’ dalle equazioni $xy = A$, $x \pm y = b$ che compaiono nelle tavolette babilonesi risalenti al II millennio a.C. Alcuni metodi esposti negli *Elementi,* noti come *applicazione delle aree*, si risolvono mediante sistemi di quel tipo, il che ha indotto molti studiosi (Heath, Neugebauer, ecc.) a supporre che i Greci li avessero elaborati per dare forma geometrica ai sistemi di equazioni già trattati dai Babilonesi, in modo da ottenerne le soluzioni con metodi puramente geometrici in sostituzione alle equazioni di II grado. In sostanza, i Greci avrebbero trovato il modo di risolvere problemi di algebra con i soli metodi della geometria pura; avrebbero quindi avuto conoscenza dell’algebra mesopotamica e, non essendone soddisfatti, avrebbero elaborato metodi sintetici per ottenere soluzioni esatte. Questo è il punto; l’algebra geometrica degli *Elementi* testimonierebbe un travestimento di metodi acquisiti dal vicino oriente.

Secondo *De Santillana*, ‘tutto il Libro II di Euclide è un testo di algebra geometrica’. Prendiamone la quarta proposizione; è un teorema, per il quale ‘Se una linea retta sia segata in qualunque modo, il quadrato di tutta la linea è eguale ai quadrati delle parti ed al doppio rettangolo contenuto dalle dette parti, presi insieme.’



(Dal punto di cista grafico, una volta tracciato EF tale che AE = a, e EB = b, la diagonale serve a individuare il punto G dal quale tracciare la parallela HI ad AB, ma interviene nella dimostrazione di Euclide).

È chiaro che il disegno illustra la regola

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

ma lo scopo potrebbe esser stato soltanto di trovare la misura di un quadrato ottenuto aumentando di una quantità nota i lati di un quadrato dato. È ‘algebra’ nel senso che *noi* vi scorgiamo l’equivalenza ad una regola di calcolo letterale. Infine: la dimostrazione offerta da Euclide è molto articolata, non è affatto immediata, si prova che i quadrilateri della figura sono quadrati o rettangoli ragionando sugli angoli, e forse non ha solo lo scopo di illustrare la regola del quadrato del binomio, ma di come condurre una dimostrazione *completa* facendo uso solo degli assiomi, e dei teoremi che da questi si ottengono direttamente o indirettamente. In base a queste considerazioni, non è affatto certo che II.4 faccia parte delle sezioni più antiche della geometria, anche se questo dovrebbe essere vero per la sottostante rappresentazione geometrica immediata di una regola aritmetica, che nel sistema di Euclide avrebbe condotto a II.4. Con tutta probabilità, il suo fondamento era semplicemente un disegno che esprime relazioni tra le aree di quadrati e rettangoli, e per estensione ai numeri (visti come quantità) con lo scopo di rendere evidenti le più semplici regole di calcolo. Certi teoremi di geometria, basati su scomposizioni e divisioni di figure piane, sono così strettamente legati a regole del calcolo numerico da poter essere considerate una loro rappresentazione intuitiva, e non implicano di per sé alcuna interazione tra culture diverse. L'ipotesi dell' *algebra geometrica* andrebbe quindi applicata al caso di costruzioni o problemi di secondo grado, dove si intravede l'impiego di incognite, non all'illustrazione di semplici regole di calcolo.

Secondo De Santillana, "Si dette il caso che tra i dati aritmetici e tecnici che la Grecia aveva attinto nel grande serbatoio della civiltà babilonese, vi fosse una grande abbondanza di formule come $\sqrt{2a^2}$, anche se non erano ancora presentate nella loro forma attuale… I supposti *Wanderjahre* di Pitagora nel Vicino Oriente saranno più o meno attendibili; ma certi contatti ci sono stati senza dubbio, come si è visto a proposito dei lavori di ingegneria degli Ioni… Quando i risultati della matematica orientale arrivarono in Grecia, essi appartenevano a un sapere morto da tempo. Erano un insieme di regole senza rapporto tra loro… La fase arcaica della matematica mira ai risultati. Ci si chiede direttamente come calcolare l'area di un quadrangolo… Una volta trovato il modo, non si avvertiva il bisogno di una prova. Ma i Greci si trovarono davanti alla pura formula…". I problemi di questa ricostruzione sono due: non sappiamo nulla su ciò che i Greci vennero a sapere dagli Orientali, salvo che secondo la tradizione antica l'essenza di questo 'sapere' fosse stato introdotto tra di loro da Talete e da Pitagora, cioè da singoli esploratori; il resto è congettura. Inoltre, se il sapere era di natura tecnica come sembra suggerire tutta l'argomentazione testé esposta, come spieghiamo l'orfismo, la metempsicosi, la mistica del numero, l'interesse per l'armonia, lo stesso sviluppo teoretico nella scuola di Pitagora? Secondo quanto tramandato dagli antichi, non abbiamo a che fare con testi di ingegneria, o con problemi che si risolvono con formule, o con metodi di calcolo, ma con l'esplorazione del numero e della forma in sé. "Il punto di vista dei pitagorici sembra aver avuto un carattere così prevalentemente filosofico e astratto che essi avevano ben scarsi interessi per i dettagli tecnici del calcolo", orientamento che è confermato dagli sviluppi successivi. Inoltre, bisogna chiarire cosa si intende con 'formula'. In matematica, è un'espressione letterale contenente indeterminate, tipo $A = ab$, ed è bene attenersi a questa definizione. Regole di calcolo come quelle che troviamo nelle tavolette babilonesi non sono espresse mediante formule, ma come esecuzioni di procedure applicabili ai problemi dello stesso tipo di quello esaminato.

Operare con formule o su formule non è lo stesso che farlo su numeri, anche se si lavora sugli stessi problemi. Il problema del rapporto con le civiltà preelleniche non può essere studiato solo confrontando ‘algebra’ e ‘geometria’ e facendo ipotesi – per quanto ragionevoli possano essere – sulle informazioni scambiate con quelle.

Vediamo ora il problema ‘dell’applicazione delle aree’. De Santillana, in accordo con Neugebauer, vi ravvisava una interpretazione geometrica dei problemi babilonesi nei quali si calcolavano due quantità noti il loro prodotto e la loro differenza. Si osservi che questa impostazione del problema implica tre congetture, che il Neugebauer seguito da De Santilliana considerava vere: 1. Alcune parti almeno dell’opera di Euclide (e, quindi, della geometria precedente, dato che non sembra verosimile che gli *Elementi* non comprendano risultati precedenti) incorporano metodi geometrici il cui scopo era quello di risolvere problemi di secondo grado evitando qualsiasi impiego dei numeri; 2. Questa scelta era stata intenzionale al fine di ottenere soluzioni esatte dato che i calcoli implicavano approssimazioni (gli antichi non possedevano un sistema di calcolo simbolico per i radicali); 3. i Greci erano a conoscenza dei problemi affrontati dai Babilonesi, ma elaborarono metodi alternativi per via di quanto stabilito nel punto precedente; 4. Le procedure adottate dai Babilonesi sono parte dell’algebra. Non discuterò qui se questa posizione sia corretta, essendo la questione già stata esaminata a grandi linee in un capitolo precedente (*vedi*).

In linea con questo punto di vista il Boyer giunge alle seguenti conclusioni: “La dicotomia tra numero e grandezza continua esigeva un nuovo modo di affrontare l’algebra babilonese che i pitagorici avevano ereditato… Un’ ‘algebra geometrica’ dovette prendere il posto di una più antica ‘algebra aritmetica’ , per cui le ‘forme normali mesopotamiche’ $xy = A$, $x \pm y = a$ dovevano venire interpretate geometricamente” [BOYER]. Tutto ciò è molto ragionevole, *se i pitagorici o altri dopo conoscevano la cosiddetta algebra babilonese*, ma sembra a sua volta fortemente dipendente da questa ipotesi. La netta separazione che il Boyer pone tra grandezze discrete (i numeri) e continue è ben definita a partire dal XIX secolo; i Babilonesi si limitavano a distinguere tra numeri ‘regolari’ esprimibili in termini finiti e ‘non regolari’ che non lo sono. C’entra la precisione, e quanto detto nel punto 2. doveva essere una forte motivazione per preferire i metodi algebrici a quelli numerici. Ciò non implica però che la geometria ‘travesta’ l’algebra, e che i Greci l’avessero importata da altri; ci dice solo che i Greci volevano rappresentare gli irrazionali senza approssimazioni. Può essere che fossero poi giunti a una formulazione del *continuum* molto vicina a quella moderna, ma dopo la scoperta delle grandezze incommensurabili.

Ora, è vero che vi è stretta corrispondenza tra geometria con riga e compasso e algebra di secondo grado, verificabile attraverso la geometria analitica, ma ricerca di quantità che risolvano certe condizioni di somma e prodotto *in generale* è un problema sui numeri che può essere affrontato a prescindere dalle applicazioni, La quantità è un aspetto del numero, anzi – in un'ottica pragmatica – è quello cui si debba attribuire la massima attenzione. Le relazioni tra quantità implicano relazioni tra numeri e le loro proprietà, secondo il detto 'tutto è numero'. Trattare algebricamente un problema significa fare astrazione, nell'eseguire i passi della soluzione, da ciò che riguarda l'ambito del problema (se è di geometria, o di economia, o fisica ecc.) per applicare tecniche che hanno carattere generale. L'algebra, compiutamente sviluppata, esige almeno i numeri reali, trattati operativamente attraverso un opportuno sistema simbolico e poi definiti con le loro proprietà in una teoria che non dipende dalla quantità o dalla geometria, pur avendo relazioni strettissime con questa. Un concetto siffatto non poteva in alcun modo essere alla portata degli antichi, per cui l'algebra antica era solo un insieme di regole di calcolo da applicarsi a qualche situazione concreta, anche se gli antichi potevano essere perfettamente consapevoli della loro generalità. Può essere che i geometri greci, consapevoli dell'impossibilità di ottenere soluzioni esatte per molti problemi, solo per questo motivo abbiano pensato di ricorrere sempre alla geometria in campo teoretico, e in effetti le soluzioni ottenute nella duplicazione del cubo ecc. sostituiscono a quel livello la soluzione delle equazioni di grado superiore. Ma ciò non dimostra che essi intendessero impiegare la geometria per risolvere sistemi algebrici appresi da qualche parte, o per evitare fastidiose approssimazioni; l'interesse per l'approfondimento della geometria aveva altre motivazioni, che implicavano il disinteresse per gli aspetti pratici e per il calcolo. L'algebra ha un carattere astratto, non interessa prioritariamente chi cerca di conoscere la geometria, fa uso costante di indeterminate e non solo di incognite, ha una sua propria logica estranea alla dimostrazione sintetica, anzi alla stessa scienza sillogistica e a tutto il modo di pensare greco. Non solo; prima ancora che una quantità, l'estensione è nella geometria greca un concetto primario, nel senso che l'equivalenza tra figure non è trattata solo come uguaglianza di aree, cioè di misure. Per dimostrare che due figure sono equivalenti, si cercano quelle trasformazioni che si dicono isometriche. In effetti, l'uguaglianza di aree è una conseguenza dell'equivalenza tra superfici. Perciò, teoremi e problemi sull'estensione sono interpretabili come problemi numerici solo assumendo che quella sia intesa come area, che come ogni quantità è identificata da numero e unità di misura. Ma se ci limitiamo alla pura geometria, tutta la teoria delle equivalenze andrebbe intesa come un sistema di relazioni tra figure. È verosimile che questo sistema fosse un perfezionamento, un raffinato completamento di semplici regole di calcolo di aree ecc., ma non è presentato come tale. Inoltre, i Greci impiegavano rapporti e proporzioni, che conducono agli irrazionali. Non vi era quindi nessuna necessità logica di evitare metodi che li implicassero, come dimostrato dai progressi ottenuti nella soluzione delle equazioni di II grado e superiore a partire dal Rinascimento; e che inducesse a 'rivestire' un'algebra originaria (senza formule) con la geometria. Probabilmente la geometria sembrava più concreta, intuitiva, di una teoria dei numeri che consentisse di trattare efficacemente gli irrazionali. Forse, ai matematici greci che hanno edificato la geometria euclidea l'impostazione babilonese, ammesso fosse loro nota, e che fosse di matrice babilonese, semplicemente non interessava, perché troppo orientata a problemi pratici, o perché preferivano seguire i propri metodi in quanto originali, o infine perché scarsamente o per niente nota. Diversamente, non si vede perché avrebbero trascurato di svilupparne tutta la potenzialità: i Greci non si ponevano tanti limiti, avevano una mentalità molto aperta, svilupparono una 'logistica' di chiara impostazione pratica; questa, forse, in misura non verifiabile comune all'area mediterranea orientle.

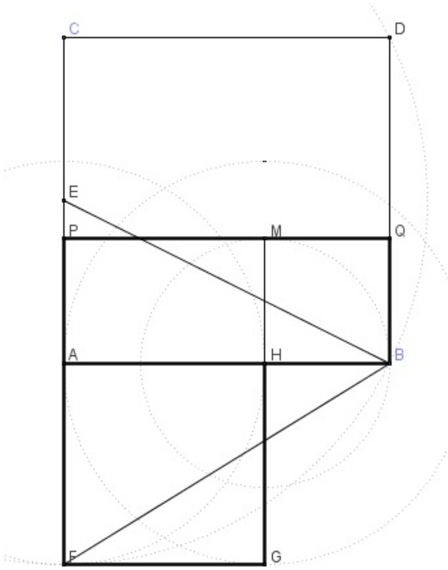
Le tesi del Neugebauer non sono state universalmente accolte; p.es. *A. Szabó* in *The Beginnings of Greek Mathematics* 1978, osserva che "Anche qualora fossimo convinti dagli argomenti di Neugebauer e accettassimo che ci fosse qualcosa come un' 'algebra babilonese', questo non significa che i Greci nel periodo precedente Euclide ne sapessero qualcosa, tanto meno che se ne fossero appropriati e l'avessero messo in forma geometrica; di fatto, nessuno fino ad ora è riuscito a produrre qualsiasi concreta evidenza che l'avessero fatto." Le proposizioni ritenute 'teoremi algebrici in forma geometrica' lo sarebbero "solo nel senso che possiamo facilmente trovare risultati algebrici equivalenti."

Vi è, infine, un fatto che deve renderci prudenti verso l'idea che molta informazione riguardante la matematica sia giunta dall'Oriente, ed è che, anche dopo le conquiste di Alessandro Magno, la storia della geometria greca non sembra evidenziare alcun segno di discontinuità. Se veramente le scienze matematiche avevano raggiunto fuori dalla Grecia risultati significativi, anche ammesso che questi non fossero facilmente accessibili nelle epoche precedenti, avrebbero dovuto esserlo assai più in epoca ellenistica; tra l'altro, Euclide operava in Alessandria d'Egitto. Non risulta che Egizi e Babilonesi orientalizzassero i Greci, accadde il contrario, che fossero ellenizzati i popoli non greci.

Tuttavia, a parte i problemi di applicazione delle aree, possiamo trovare negli *Elementi* tracce che rimandano a radici di equazioni algebriche di secondo grado implicite nei passaggi delle costruzioni o dimostrazioni.

Un esempio, tratto dal libro II di Euclide, prop. XI (problema), può chiarire le basi dell'idea dell'algebra geometrica.

"*Dividere una data linea retta* [un segmento] *in modo, che il rettangolo contenuto dalla retta e da una [sua] parte sia uguale al quadrato della parte rimanente.*"



Si tratta di dimostrare che su AB si trova H tale che il quadrato AFGH è equivalente a ABQP, con AP = BQ = HB.

È molto facile riconoscere il significato algebrico del problema. Posto che AB sia l'unità di misura, e AE la metà per costruzione, troviamo per Pitagora che BE = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ = EF (che è uguale a BE per costr.), AH = AF = EF – EA = $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$, HB = AB – AH = $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$. È chiaro che il problema equivale a dividere AB in media ed estrema ragione, cioè a trovare la sezione aurea di AB, che è AH, e in effetti, nel libro VI, la seconda soluzione proposta per la divisione in media ed estrema ragione richiama il problema discusso in II.11.

La dimostrazione offerta da Euclide non ha nulla di algebrico in quanto alla forma, ma se accettiamo l'ipotesi dell'algebra geometrica ciò potrebbe soltanto significare che l'algebra, cioè il ricorso agli irrazionali, nascosti nelle misure dei segmenti, sia stata sistematicamente espunta per ragioni di metodo pur sfruttandone i risultati: i Greci consideravano coppie di grandezze incommensurabili, ma non trattavano i loro rapporti, che noi identifichiamo con i numeri irrazionali, alla nostra maniera. Il sospetto nasce anche dai primi passaggi: da dove ricaviamo che i segmenti EB ed EF sono utili ai fini della dimostrazione? Non si vede, ma si vede che misurano $\frac{\sqrt{5}}{2}$ se rapportati ad AB. Sembra che Euclide abbia fatto uso del valore numerico della sezione aurea per trovare la posizione di H, che può essere ottenuto algebricamente a partire dalla sua definizione, traducendolo geometricamente nella scelta di iniziare la dimostrazione tracciando la diagonale BE. Molti problemi che coinvolgono la sezione impiegano il suo valore, nascosto nella costruzione geometrica. Potrebbe quindi essere che i geometri greci impiegassero consapevolmente gli irrazionali, ma in modo che non apparissero nelle dimostrazioni, che poi è in sintesi il pensiero di Neugebauer.

"Più ancora, forse, di Eraclito… Pitagora sfugge all'interpretazione… Alcuni studiosi ripongono la loro fede nelle prime evidenze pre-platoniche, ma come queste debbano essere interpretate è stato trattato in modi molto diversi. I riferimenti a Pitagora nell'opera perduta di Aristotele sui Pitagorici sono problematici, e ciò che aveva da dire su di lui nei trattati giunti fino a noi è davvero poco. Gli studiosi del ventesimo secolo erano molto scettici verso le molto più ricche narrazioni su Pitagora e i Pitagorici fornite dagli assai posteriori scrittori neopitagorici o neoplatonici, che furono accusati con qualche ragione di aver inventato un'immagine di Pitagora che potesse essere citata come un'autorità per le loro fantasiose dottrine. Tuttavia, senza una chiara base su cui giudicare quanto gli stessi insegnamenti di Pitagora potessero essere frutto di fantasie, è ovviamente difficile stabilire in quale misura fonti assai più tarde possano averli distorti." [LLOYD 2014].

Secondo *Diogene Laerzio*, P. fu discepolo di *Ferecide*, un siriano; ancor giovane, allontanatosi dalla patria, si iniziò a tutti i misteri, ellenici e barbarici. Si presentò al Faraone Amasi, o piuttosto Ahmose, secondo di questo nome, che regnò dal 570 al 526 a.C., morendo l'anno precedente la conquista dell'Egitto da parte di Cambise. Apprese la lingua egizia, e fu presso Caldei e Magi (rispettivamente, sacerdoti Babilonesi e Persiani; in seguito, i 'magi' furono confusi con i Caldei, e associati a pratiche di astrologia e magia). Scese con Epimenide nell'antro Ideo, la più importante grotta sacra dell'antichità greca, dove

Zeus sarebbe nato e sarebbe stato allevato. Non sono concordi le notizie sul luogo di nascita, ma i più lo descrivono come nato a Samo. Si trasferì poi a Crotone dove ne fu legislatore, amministrando la città con l'aiuto di trecento discepoli.

Avrebbe ricevuto da Hermes il dono di ricordare ogni cosa, che gli fosse accaduta, e di se stesso affermava di aver vissuto diverse vite in passato, e che l'anima può rivivere nel corpo di animali e anche piante. Sarebbe falso che non avesse lasciato scritti; gli si attribuirono tre opere: Dell'educazione, Della politica, Della fisica. *Eraclito* affermava che P. si fosse formato sui libri di storia: "s'esercitò più di ogni altro nella storia", ecc., e altri gli attribuirono altre opere ancora.

Aristosseno, che era stato allievo di Aristotele e s'era interessato agli insegnamenti di Pitagora (scrisse di teoria musicale), diceva (sempre secondo D. L.) che P. avesse ricevuto da una sacerdotessa di Delfi la maggior parte della dottrina morale. Parrebbe significare che si fosse ispirato all'oracolo di Delfi, cioè al dio Apollo, che effettivamente era per i Greci il dio della musica, delle arti e delle scienze, colui che presiede all'armonia e alla bellezza del mondo. La definizione di 'filosofo' che si sarebbe data da sé risaliva a *Sosicrate*, in risposta alla domanda chi fosse fattagli da Leonte, tiranno di Fliunte.

Per quanto riguarda la geometria, Diogene L. non vi dedica grandissimo spazio; "Egli aveva ben oltre condotto la geometria [non esclude che ne avesse avute nozioni dai suoi viaggi, ma l'insieme della geometria pitagorica sarebbe stato originale; su questo punto anche Talete era ritenuto un iniziatore], essendo *Moeris*… il primo (Μοίριδος πρώτου) che trovò i primi elementi di quella…”. La fonte sarebbe la perduta ‘Storia di Alessandro’ di *Anticlide*, IV-III sec. a.C. Questa informazione è interessante, perché ci dà una indicazione precisa sulla formazione di Pitagora. In realtà non esistette nessun matematico di nome “Moeris” o Meride; questo è nome di “un lago del Fayyūm, che ancor oggi esiste sotto il nome di Birqet Qarun. Gli autori classici (Strab., xvii, 811; Diod; Sic., i, 52), ed in particolare Erodoto (ii, 149), lo danno come un prodigio della ingegneria egiziana della XII dinastia” (DONADONI 1963) evidentemente per le opere di canalizzazione che vi furono realizzate. Erodoto però (*Storie* II.101) narrando quanto venne a sapere dai sacerdoti in Egitto riporta che “Questo Moeris [uno dei Faraoni che precedettero Sesostri, ovvero Rameses II] fu ricordato per aver costruito il cortile settentrionale del tempio di Efesto e per aver scavato un lago di un certo numero di miglia in circonferenza”. Pitagora doveva essersi interessato alle grandi opere realizzate nel corso dei secoli, e questo può esser stato decisivo per spingerlo allo studio della geometria.

L’episodio dell’ecatombe risalirebbe ad *Apollodoro* ‘il Calcolatore’ (credo si riferisca ad Apollodoro di Atene, ‘celebratissimo allievo di Aristarco’ [FUNAIOLI 1929] fiorito intorno al 150 a.C.) il quale in un epigramma avrebbe affermato che, primo tra i Greci, avrebbe introdotto misure e pesi – l’informazione è attribuita al già citato Aristosseno. Questa affermazione è significativa della scarsa attenzione di Diogene L. verso la credibilità delle sue fonti (ammesso siano correttamente citate); misure e pesi certamente non si dovevano ai pitagorici, ma può ben essere che questi abbiano contribuito a unificare le unità di misura, a migliorare metodi e strumenti ecc. Forse Diogene L. non era abbastanza attento nel vagliare le informazioni, ma attraverso di lui possiamo sapere quali erano le fonti più vicine all'epoca in cui fiorì la scuola pitagorica. Inoltre, la lunghezza non eccessiva della sua biografia induce a pensare che non l'abbia arricchita di particolari tramandati da epigoni creduloni.

"E primo per aver aver chiamato 'Espero' e 'Fosforo' la stessa cosa" (cioè ad aver riconosciuto che il pianeta Venere era sia la stella della sera sia quella del mattino), continua il Nostro, come se in diversi secoli, o piuttosto decine di secoli, altri ben prima non se ne fossero accorti; ma anche solo tra i Greci, sarebbe ben strano che nessuno se ne fosse mai accorto o mai vi avesse pensato. Dovremmo forse intendere la frase nel senso che i pitagorici elaborarono un sistema dell'astronomia, del quale ci son pervenute alcune nozioni.

"Fu egli oggetto di tanta ammirazione, che i suoi famigliari asserivano che possedesse la voce di dio; ed esso stesso narra nei suoi scritti che dopo duecento e sett'anni era venuto dall'altro mondo tra gli uomini. Perciò lo seguivano costantemente, e andavano a visitarlo a cagione delle sue dottrine e Lucani e Picenti e Messapi e Romani. Sino a Filolao non eravi chi conoscesse i dommi pitagorici. Costui solo divulgò i famosi tre libri, dei quali Platone scrisse che gli fossero comperati per cento mine. Non erano poi meno di seicento quelli che di notte andavano ad udirlo." [Ho seguito la trad. it. del Lechi 1842].

Tutto ciò è interessantissimo: il ricordo di vite passate, la popolarità raggiunta in Italia, ma soprattutto ciò che vien detto di Filolao e Platone. Il primo, crotonese, vissuto tra il 470 e il 385, avrebbe per primo pubblicato la dottrina, dopo la distruzione della scuola in Italia; egli stesso dovette rifugiarsi a Tebe. I principi della scuola ci son noti solo per mezzo suo: quindi i Greci stessi non ne sapevano nulla o quasi fino alla seconda metà del V sec. a.C., almeno cinquanta e più anni dopo la morte del maestro, un tempo lungo ma non poi così tanto. Contemporaneo di Socrate, sarebbe stato il maestro di Archita; ma questo ci viene solo da *Cicerone* nel *de Oratione* [STANFORD ENC.]; maggior fiducia possiamo porre nel *Fedone*, dove Simmia e Cebete – interlocutori di Socrate sull'immortalità dell'anima – "affermano d'aver udito Filolao a Tebe, qualche tempo prima… del 399 a.C." [*Ibid.*]. Eppure anche questa informazione contiene qualche oscurità; se crediamo che la dottrina pitagorica comprendesse metempsicosi e reincarnazione, perché Simmia e Cebete chiedono chiarimenti a Socrate manifestando o fingendo dubbi? In realtà, Cebete afferma con forza la convinzione che l'apprendimento sia ricordo, e nel dialogo di Platone i due Tebani cercano piuttosto la 'dimostrazione' dell'immortalità dell'anima attraverso la dialettica. Platone, forse, voleva evidenziare come la 'prova' non possa essere raggiunta se non attraverso la dialettica.

Ma l'essenziale di ciò che possiamo trarre da Diogene L. su Filolao è che, se veramente nulla era noto sui pitagorici prima che costui venisse nella Grecia, ciò che ci è pervenuto intorno alla loro matematica venne a conoscenza presso i Greci nella seconda metà del V sec., e che potrebbe essere commisto a ciò che vi fu scoperto proprio in quell'epoca. Ma anche Talete era giunto a qualche risultato; la matematica 'pitagorica' è allo stato attuale un'ipotesi, sia pure sostenuta da antiche e indirette testimonianze. In realtà i matematici dell'epoca di Socrate, come Teodoro, non sarebbero semplicemente seguaci di Pitagora.

È chiaro che quello che riusciamo a comprendere dei pitagorici passa attraverso Aristotele, Archita e lo stesso Platone. Vi sono così stretti punti di contatto tra molte affermazioni di Socrate e le idee attribuite alla scuola pitagorica da far ritenere che Platone fosse molto vicino a Pitagora, salvo l'impiego massiccio della dialettica, che – a detta di Aristotele – non veniva dai pitagorici ma da Zenone.

Diogene L. affermava – respingendo l'idea che avesse principio tra i 'barbari' - che la filosofia "ebbe due principii, uno da Anassimandro, l'altro da Pitagora" svolgendosi poi in due correnti, la prima detta 'ionica', la seconda 'italica'. Le rispettive genealogie sarebbero: Talete – Anassimandro – Anassimene – Anassagora – Archelao – Socrate – altri socratici e Platone, e di seguito fino a Teofrasto; per l'italica, Ferecide – Pitagora – Telange – Senofane – Parmenide – Zenone – Leucippo – Democrito e poi altri, fino a Epicuro.

Le due serie di filosofi possono lasciare perplessi, ma vi è qualcosa che vi possiamo riconoscere. Il *Parmenide* di Platone dice qualcosa, forse molto, sulla cosmogonia dei pitagorici, che non si distingue dalla genesi del numero. La dialettica uno-molti, come si vede nei paradossi di Zenone, tocca punti matematici. Molte cose restano in sospeso, ma (sembra) non riguardano la matematica, che dopo Platone, anzi già da prima, si separa dalla filosofia, quando – credo – diventa chiaro che la dimostrazione matematica si distingue dalla ricerca filosofica.

Le testimonianze offerte da Diogene L. sono evidentemente fragili; non si distingue l'aneddotico dallo storico (si confonde il nome di località *Moeris* con una persona ecc.). La quasi totalità viene da singoli scrittori, e tutto risale al massimo ad alcuni decenni dopo la morte di P., e la maggior parte a più di un secolo dopo. Emerge l'universalità degli interessi, il sapere tecnico non è disgiunto dalla 'saggezza' (faceva parte dei sette sapienti), studiava le opere di ingegneria e scendeva nelle grotte sacre; la compresenza di nozioni pratiche con la visione religiosa, che appare difficilmente comprensibile ad una mentalità tecnico-scientifica o comunque da questa influenzata, regolata sulla specializzazione delle attività e dell'informazione e impossibilitata ad una comprensione integrata della vita e del mondo. Ciò non toglie che la matematica pitagorica fosse una disciplina autonoma, studiata nella sua struttura interna, proprio perché questo richiedeva l'approccio alla vera conoscenza, alla σωφία: non una miscela indistinta di suggestioni esoteriche e idee pseudoscientifiche, ma la penetrazione dei misteri del mondo, dei quali la matematica era una delle chiavi. Il 'numero' dei pitagorici era un principio universale, 'calato dall'alto', ma non era oggetto di contemplazione passiva, andava appreso mediante lo studio, e questo aveva una valenza cognitiva propria, che in seguito si sarebbe affermata in maniera autonoma. Ciò che oggi è inteso dagli specialisti come una struttura autoconsistente, indagabile per così dire muovendosi al suo interno, doveva essere in qualche modo percepito dai matematici antichi non avendo altri strumenti per indagarlo se non intuizione e immaginazione, gli stessi che possiamo impiegare all'inizio di ogni esplorazione, quando dobbiamo capire come orientarci nell'ignoto. Questo svelamento del mistero del mondo doveva attirare i primi pitagorici verso uno studio teoretico, per l'attrazione che può suscitare in quanto tale, e ancor più per lo stupore causato dalla sensazione di riuscire infine a comprendere qualcosa, di esser riusciti a trovare delle strade, paragonabile a quello del viaggiatore, del navigatore, e ancor prima dell'architetto, dell'artista, che scopre da sé di esser capace di creare, avvicinandosi per ciò stesso al potere generatore della divinità. La capacità di penetrare il mistero è ancora più misteriosa del mistero stesso. Tutto ciò doveva apparire come divino, come afferente alla sfera del sacro.

Altre fonti oltre a Diogene L. sono *Porfirio* (234-305 d.C.) e *Giamblico* (245-325 d.C.), dei quali ci son pervenuti gli scritti che riguardano Pitagora. Entrambi sembrano ancor meno attendibili, il secondo presentando una propria interpretazione di Pitagora in relazione con la matematica e come un inviato dagli dei per illuminare gli uomini, il primo anche esaltandone gli aspetti divini. Entrambi si ispirano a scrittori precedenti profondamente influenzati dal neopitagorismo; Giamblico ad una biografia di Pitagora scritta da *Nicomaco* (50-150 d.C.), Porfirio a *Moderato da Cadice* (I sec. d.C.). Lo stesso Diogene si sarebbe basato sulle *Memorie pitagoriche* di Alessandro *Polihystor* ('che racconta di molte cose'), fiorito nella prima metà del I sec. a.C. Scrittori posteriori ad Aristotele tendono ad attribuire a Pitagora idee di matrice platonica e dello stesso Aristotele, come quella che deriva dall'Uno e dalla Diade la serie dei numeri ecc. e che Aristotele attribuisce al tardo Platone; non solo, ma lo stesso nella *Metafisica* asseriva [STANFORD ENC.] che "i pitagorici riconoscevano solo il mondo sensibile e quindi non lo derivavano da principi immateriali", affermazione questa chiaramente in contrasto con l'idea che la tradizione ha su Pitagora. Peraltro Aristotele cita spesso i 'cosiddetti pitagorici', distinguendo tra chi si autodefiniva tale e quelli 'veri'. Tuttavia *Teofrasto*, lo scolarca suo successore, attribuisce ai pitagorici la dottrina dell'origine di tutto dall'Uno e dal Due. Si veda anche il *Parmenide*, e l'attribuzione di Parmenide stesso alla scuola italica da parte di Diogene L. Come si vede, la questione è confusa. Sembra quindi che ciò che tradizionalmente si riferisce a Pitagora sia in larga misura derivato da altri.

Secondo alcuni studiosi [BURKERT 1972, e altri; cit. in *Stanf. Enc.*] la tradizione, che avrebbe riconosciuto nella filosofia dei pitagorici le idee della tarda metafisica platonica, opponendosi alle distinzioni che Aristotele poneva tra Platone e i pitagorici del V sec., potrebbe aver avuto inizio non già nel I sec. a.C. con la scuola neopitagorica ma ben prima, a partire dai seguaci di Platone stesso.

Diogene, Giamblico e Porfirio attinsero anche a fonti non influenzate dal neopitagorismo o indipendenti dai seguaci di Platone, quali frammenti di Aristotele e dei suoi allievi, *Aristosseno* e *Dicearco*, ai quali possiamo aggiungere *Timeo* da Taormina, del IV sec. a.C; erano passati da 150 a 250 anni dalla morte di Pitagora, e probabilmente riferivano di tradizioni orali; infatti, le loro testimonianze rivelano conflitti fra diverse tradizioni che pretendevano di tramandare il pensiero del Maestro. Pitagora non avrebbe lasciato scritti, contrariamente a quanto asseriva Diogene L.

Dobbiamo a *K. Ferguson* una ricostruzione recente (2008) della vita di Pitagora che, mediando tra le tesi opposte, si affida in larga misura a Giamblico ma *cum grano salis.* Sarebbe nato a Sidone da una abbiente famiglia di Samo (il padre era un mercante e 'geomoro' ovvero influente proprietario terriero); avrebbe appreso dai sacerdoti la scienza e la matematica egiziane, sarebbe stato portato a Babilonia quando Cambise II invase l'Egitto; tornato a Samo, non tollerando il governo di Policrate, si trasferì a Crotone, dove fondò la scuola e divenne, con i suoi seguaci, assai influente nella politica locale; di fatto, avrebbe assunto il governo della città. Il racconto di Giamblico è cronologicamente inconsistente: Policrate morì nel 522 a.C., Cambise occupò l'Egitto nel 625; Pitagora non avrebbe potuto rimanere molti anni (dodici) a Babilonia, come Giamblico pretendeva. Ma forse era andato a Babilonia negli ultimi anni del regno neobabilonese, prima della conquista da parte di Cambise. Più verosimile è la descrizione del suo operato politico in Crotone:

avrebbe fatto coniare nuove monete, e avrebbe avuto un ruolo nel promuovere la distruzione della città rivale di Sibari; ma è nell'ambito dello studio dell'armonia e della matematica, da quello stimolato, che il testo della Ferguson offre una sintesi efficace: "lo strumento suonato [o, piuttosto, studiato] da Pitagora era probabilmente la lira a sette corde. La suonava con quattro delle sette corde a intervalli fissi… i suoni più bassi e più alti delle corde a intervalli fissi erano accordati in modo che fossero separati da un'ottava. La corda di mezzo della lira era accordata in modo che suonasse una quarta sopra la corda più bassa, e quella successiva una quinta sopra la corda più bassa. Il musicista greco poteva regolare la seconda, la terza e la sesta corda, a seconda del tipo di scala desiderata… La tradizione attribuisce a Pitagora l'invenzione del *kanon*, uno strumento con una sola corda, e il suo uso per fare esperimenti sul suono… Quando Pitagora e i suoi discepoli videro che certi rapporti di lunghezza di corde producevano sempre l'ottava, la quinta e la quarta, balenò nella loro mente che dietro la bellezza che essi udivano nella musica doveva esserci una regolarità nascosta…" Dato che la musica era associata alla divinità, lo studio dell'armonia avrebbe aperto la strada alla comprensione dell'ordinamento che Dio avrebbe dato all'intero cosmo; "questa regolarità non poteva essere un fatto isolato. Regolarità aritmetiche e geometriche simili dovevano celarsi dietro tutta la quotidiana confusione e complessità della natura."

Aristosseno di Taranto (IV sec. a.C.), un'autorità riconosciuta nel campo musicale, narra che anche Ippaso avrebbe dato un contributo alle prime teorie fisiche del suono, producendo intervalli consonanti percuotendo dischi di spessore diverso. In effetti, le vibrazioni che si propagano all'interno di dischi rigidi hanno frequenze inversamente proporzionali alla distanza percorsa, cioè allo spessore, che equivale alla lunghezza di una corda vibrante.

L'interessante di questa descrizione è la relazione che pone tra i rapporti armonici fondamentali di $2:1$, $3:2$, $4:3$ e i primi quattro numeri; “I pitagorici...cercarono di verificare se ci fosse qualcosa di speciale nei numeri 1, 2, 3 e 4 che apparivano nei rapporti musicali.” In effetti, tra i primi numeri figurati piani abbiamo i numeri triangolari, i quadrati, i rettangolari; forse, come la Ferguson suppone, furono presi in considerazione semplicemente osservando le figure che si possono ottenere collocando ordinatamente dei sassolini. In particolare, tra i numeri triangolari, il dieci si fa notare perché è la somma dei primi quattro numeri, uno compreso, cioè dei numeri che presiedono ai rapporti armonici. Se questa ricostruzione è vera, sarebbe l'origine dell'idea che l'intero cosmo sia armonico in quanto regolato dai numeri e dalle loro relazioni. Procedendo oltre, si ottengono i numeri ‘solidi’, si scopre che il cubo di quattro è 64, e così via. Ma non tutti nell'antichità riconoscevano meriti scientifici a Pitagora.

La posizione di Aristotele è singolare. “Se Aristotele considerava Pitagora solo come taumaturgo e fondatore di uno stile di vita, allora diventa chiaro perché non menziona mai Pitagora nella sua esposizione dei filosofi a se stesso precedenti e perché usa l'espressione 'cosiddetti pitagorici' per riferirsi al pitagorismo del V secolo. Per Aristotele Pitagora non apparteneva alla successione di pensatori iniziata da Talete, che cercavano di spiegare i principi fondamentali del mondo naturale, e quindi non riusciva a vedere che senso avesse chiamare pitagorico un pensatore come Filolao, che si unì a quella successione postulando limitatori e illimitati come principi primi.” [STANF. ENC.]. In ciò concorda con Diogene L., che separa la scuola ionica da quella italica, ma sembra negare che l’antitesi tra limite e illimitato – che pure aveva importante rilievo presso i ‘pitagorici’ – debba considerarsi parte dell’insegnamento originario, discordando apparentemente dallo stesso Diogene, il quale affermava che la dottrina pitagorica fosse stata resa nota in Grecia proprio da Filolao. Non solo; Aristotele, almeno nei suoi scritti giunti sino a noi, non parla mai di Pitagora, ma solo dei ‘cosiddetti pitagorici’. Tuttavia, le informazioni di Aristotele non sono del tutto incompatibili con quelle fornite da Diogene L. Il primo non nega che elementi della filosofia del Maestro siano pervenuti in Grecia attraverso Filolao; afferma soltanto che l’insegnamento di quest’ultimo avrebbe accolto elementi derivabili da pensatori della scuola ionica, e forse introdotti *ex novo* da Filolao, ma senza affermare nulla a questo riguardo. Diversamente da Diogene L. non dà importanza a Pitagora come matematico, in accordo con Platone, che in realtà non dice nulla in proposito. Platone stesso sembra concordare con Aristotele, quando afferma che l’idea dell’opposizione tra limite e illimitato è alquanto precedente alla sua epoca riconoscendo di non averne la paternità pur rielaborandola: non poteva quindi essere stata introdotta in Grecia da Filolao, pitagorico della seconda generazione e contemporaneo di Socrate, che aveva fatto conoscere la sua versione del pitagorismo non prima della seconda metà del V sec., e a maggior ragione non poteva risalire a Pitagora stesso.

Tuttavia, l'atteggiamento di Aristotele verso Pitagora dovrebbe aver risentito dall'impostazione logica e razionalistica che diede alla sua ricerca, in conflitto evidente con la personalità attribuita universalmente a Pitagora: implicitamente, potrebbe confermare che ricordo di vite passate e trasmigrazione delle anime facesse parte della sua dottrina.

Lo stesso atteggiamento riduttivo fu tenuto da Platone, benché molti lo abbiano ritenuto debitore nei confronti di Pitagora, che nomina una volta sola (nella *Repubblica*) e mai nella ricapitolazione dei pensatori precedenti la sua epoca fatta nel *Sofista*. P. descrive la filosofia del limite e dell'illimitato, ma senza ascriverla a Pitagora, in accordo con Aristotele. Però secondo Platone metempsicosi e ricordo di ciò che l'anima vide prima della vita presente sono parti importanti dell'insegnamento di Socrate: "… ho udito uomini e donne sapienti nelle cose divine… Sacerdoti e sacerdotesse a cui sta a cuore di poter rendere ragione delle cose di cui si occupano. E lo dice anche Pindaro, e molti altri poeti, quanti sono divini [cioè ispirati dal dio]… Essi affermano che l'anima umana è immortale, e che a volte finisce… a volte rinasce, ma non s'estingue mai… Per esser dunque l'anima immortale e molte volte nata e per aver visto ogni cosa e qui e nell'Ade, non c'è nulla che non abbia appreso; sicché non è appunto meraviglia che possa ricordare… ciò che prima sapeva.” [M*enone*, CARRATELLI]. Passi analoghi troviamo nel *Fedro* e nel *Fedone*, dove Cebete – che avrebbe ‘udito’ Filolao – concorda sull’anamnesi, ma chiede di essere confermato da Socrate riguardo all’immortalità dell’anima. Inoltre Platone non afferma chiaramente che Cebete fosse discepolo di Filolao, cioè che ne condividesse le idee *in toto.*

A ben guardare, gli interventi di Cebete nel *Fedone* sono in accordo sia con Aristotele che con Diogene L. oltre che, ovviamente, con Platone. Diogene afferma che Pitagora ebbe l’esperienza del ricordo delle vite *passate* e i relativi ricordi; avrebbe avuto da Hermes un dono speciale, il che collima perfettamente con la dottrina che Platone attribuisce a Socrate sulla conoscenza per anamnesi; ma chiede di essere rassicurato sull’eternità dell’anima: cosa che non deriva immediatamente da ciò che potrebbe aver udito da Filolao o da chiunque avesse fedelmente riportato quanto Pitagora avesse narrato di ciò che egli stesso aveva sperimentato, e non di speculazioni sulla vita oltretomba. Cebete è presentato nel *Fedone* come persona difficile a convincersi, vale a dire assai capace di senso critico: e appunto doveva essere ben in grado di distinguere tra una dottrina, nella quale si deve porre fiducia, dalla narrazione di ciò che veramente è stato sperimentato. Inoltre Cebete afferma che il ragionamento, se ben condotto, ha la stessa forza della prova matematica, cioè questa è il modello cui deve adeguarsi la dialettica non sofistica, quando si cerca la verità. Non è detto che questa idea derivi da Filolao e da Pitagora; sembra che Aristotele – verosimilmente seguendo Eudemo – non stimasse Pitagora specialmente come matematico; ma se le sue riserve derivano da Eudemo sarebbe contradditorio ammettere che questi sia la fonte di quanto è stato attribuito a Pitagora dalla tradizione. Peraltro, Archita era considerato pitagorico, ed era un matematico; ma può essere che gli aspetti matematici siano stati elaborati dai ‘cosiddetti pitagorici’ dopo la morte del Maestro, o vivente lui, ma nell’ambito della loro collaborazione all’interno della scuola; il che appare l’ipotesi più verosimile, che non contrasta frontalmente Aristotele, e non contraddice alcuna altra fonte, a patto che ‘Pitagora’ indichi non solo la persona del caposcuola, ma tutta la scuola, e che le riserve di Aristotele vertessero solo sui contributi personali del Maestro e sull’influsso che i suoi epigoni (i ‘cosiddetti pitagorici’) dovettero avere sul pensiero di Platone, che si sarebbe accostato alla matematica soprattutto per la sua amicizia con Archita. L’affermazione attribuita a Socrate della propria incapacità nel comprendere quella materia (sempre nel *Fedone*, Socrate in due passi confessa di non esser stato capace di comprendere come due oggetti, che sono unità quando presi distintamente, facciano due se presi insieme) basterebbe da sola ad escludere che l’apprezzamento di Platone per la matematica fosse dovuto a Socrate.

Da queste considerazioni si vede bene come la rarità delle fonti e la loro distanza cronologica dalle persone di cui trattano implichino difficoltà assai difficilmente superabili. Le conclusioni, o piuttosto congetture sopra proposte, si basano su ciò che si può dedurre da alcuni passi del *Fedone*, forse il più ammirato dei dialoghi platonici. Ma Platone stesso ci dice che Fedone, testimone delle ultime ore di Socrate e di ciò che egli disse sull'immortalità dell'anima in risposta alle domande dei tebani Simmia e Cebete, ne avrebbe fatto fedele resoconto a *Echecrate*[5], al cui racconto fa riferimento integralmente almeno nelle intenzioni Platone stesso. La fedeltà a ciò che fu detto in dettaglio in quelle circostanze è per noi solo un'ipotesi; ma se prestiamo fede alla lettera di quanto ci è rimasto delle testimonianze da parte degli antichi, anche nei particolari, anche quando la fonte è unica, troviamo che non sono così contraddittorie come potrebbe sembrare a prima vista. Inoltre, le analisi critiche di studiosi recenti, alla ricerca di nuovi spunti spesso polemici verso la tradizione, non sempre fanno maggiore chiarezza.

Questi passi, coerentemente con Aristotele e con Diogene, che non ascrive Socrate e Platone alla corrente italica, dicono senz'ombra di dubbio che reminiscenza e immortalità dell'anima non derivarono al Socrate di Platone attraverso Filolao; le fonti di cui parla Socrate nel *Menone* sono figure religiose, ma non si fa riferimento esplicito a un qualche particolare culto misterico, e in poeti ispirati, non in pensatori precedenti. È però vero che il Socrate descritto nel *Fedone* rivela una dottrina identica a quella attribuita a Pitagora.

Diogene L. attribuisce la dottrina filosofica di Pitagora alle sue esperienze personali, e a ciò che apprese in Egitto. Nulla

[5] Ἐχεκράτης, da Fliunte; secondo Diogene L. era discepolo di Filolao. Il fatto stesso che Platone affidasse la memoria dell'insegnamento di Socrate a un seguace di Filolao testimonia la stima che doveva nutrire per la sua filosofia.

vieta di pensare che le idee di Socrate e Platone e quelle di Pitagora traessero un'origine da una o più fonti in comune. Su questo punto vi è una labile traccia, che porta a Delfi e al dio Apollo: sia il Socrate di Platone sia Pitagora secondo Diogene L. avrebbero tratto ispirazione dall'oracolo.

Per quanto riguarda la matematica, sembra che Diogene L. dissenta da Aristotele, ma ciò che questi dice di Pitagora negli scritti a noi pervenuti (il suo trattato sui pitagorici è andato perso) è assai scarso e lo stesso Diogene si limita ad attribuire a Pitagora significativi progressi, senza però citarne alcuno in particolare.

Alcuni giudizi di Aristotele sembrano in conflitto con l'immagine che di Pitagora offre la tradizione antica, che per la verità in grandissima parte risale ai neoplatonici e neopitagorici di molti secoli posteriori. "Troviamo Aristotele attribuire ai Pitagorici sia l'affermazione più grezza che oggetti fisici siano numeri, sia la formula più raffinata secondo cui essi 'imitano' i numeri" [TAYLOR 1928]; in effetti le due versioni non collimano perfettamente, potendosi intendere la prima alla luce dei numeri figurati (quindi direttamente connessi all'estensione e alla forma), e la seconda in un senso meno definito e per nulla chiaro, ma che sembra intendere in qualche modo i numeri come principi di ogni cosa, nel senso di 'modelli'. Si direbbe che Aristotele non desse molto peso alle interpretazioni metafisiche del concetto di numero secondo i pitagorici, in ciò confortato da Archita, se intendiamo le sue affermazioni come attestazioni dell'utilità dell'aritmetica in generale.

La dissonanza di Aristotele dalla narrazione tradizionale si estende alla cosmologia e alla matematica, ma in base a ciò che abbiamo detto, se ci limitiamo alla sola matematica, dovrebbe essere più apparente che reale: i neoplatonici e i neopitagorici non negavano che le scoperte attribuite a Pitagora fossero dovute alla scuola di Pitagora, dato che in quella vigeva la regola per cui ogni progresso dovesse essere a Lui attribuito; in conformità ad essa, il nome dello scolarca comprendeva gli 'scolari', gli studiosi, i 'matematici' nel senso etimologico del termine; da parte sua Aristotele, come Platone e Dicearco, adottando un punto di vista più attento allo svolgimento dei fatti, potrebbe non aver fatto menzione delle scoperte attribuite a Pitagora, perché non distinguibili da quelle della comunità. Semmai, bisognerebbe stabilire che cosa fu scoperto o dimostrato nella comunità di Crotone, e ciò che sarebbe dovuto ai 'cosiddetti pitagorici', ed eventualmente ai neopitagorici; verosimilmente, la matematica attribuita a 'Pitagora' dovrebbe essere la somma di contributi distribuiti nel tempo, ma non dobbiamo trascurare la possibilità che essenzialmente coincida con i risultati ottenuti prima della distruzione della scuola: un gruppo di studiosi entusiasti e determinati che non siano in competizione e scambiano tra di loro idee, ipotesi, critiche ai risultati proposti da altri può giungere molto lontano. La collaborazione tra gli appartenenti al gruppo, la dedizione alla stessa causa, la possibilità di studiare indisturbati, potrebbero aver fatto molto. Il problema, piuttosto, è il vincolo del segreto: non possiamo sapere quanto fosse trapelato, e quanto perso con la distruzione della scuola e forse successivamente ricostruito.

L'unica via sensata e percorribile è quella che ravvisa somiglianze tra il *corpus* pitagorico e le matematiche delle civiltà anteriori prossime alla Grecia. Ciò che eventualmente se ne discosti o appaia più elaborato è posteriore. La questione non è che cosa sia derivato dai Babilonesi ecc., ma il confronto tra il livello della matematica attribuita alla scuola di Pitagora, quella che emerge dai documenti delle altre civiltà, e ciò che i Greci sapevano nella seconda metà del V secolo. Alcune specificità sono in qualche misura riconoscibili: i numeri figurati, la classificazione delle medie (alcune), la rappresentazione geometrica dei prodotti notevoli e il famoso teorema, le proporzioni e la sezione aurea fanno parte della storia arcaica della scuola, e coincidono con ciò che a 'Pitagora' è stato attribuito. Aggiungerei le classificazioni numeriche (pari-pari, pari-dispari ecc.), gli incommensurabili, il pentagramma, le ricerche sul monocordo e le scale musicali come scoperte autonome precedenti la seconda metà del V secolo, *a meno che parte di queste scoperte non siano state attribuite alla scuola di Pitagora dai seguaci di Platone e dai neoplatonici e neopitagorici* che avrebbero imposto una loro ricostruzione della storia. Non ha senso che quelle ricerche e scoperte siano più tarde del 450 a.C.: a quell'epoca, le conoscenze dei Greci erano già ad un livello abbastanza elevato per averle ormai acquisite, o superate. Si retroceda ancora di qualche decennio, e ci si avvicina quanto basta alla fine della scuola di Crotone per poter datare alla sua epoca quanto a 'Pitagora' è stato attribuito. Si confrontino i risultati attribuiti ad Archita, Teodoro, Ippia ecc. con la matematica 'pitagorica': la differenza è tale da far presumere che la distanza temporale sia valutabile in decenni.

Una fonte molto quotata dagli storici della matematica è *Proclo* (V sec. d.C.), scolarca dell'Accademia di Atene fondata da Plutarco d'Atene, in quanto nel suo *Commento al I libro di Euclide* avrebbe attinto le informazioni sui matematici precedenti l'età di Aristotele da *Eudemo da Rodi*, allievo e collaboratore di Aristotele, autore di una *Storia della geometria* andata perduta, forse non direttamente ma attraverso un compendio anch'esso non pervenutoci [BOYER]. Alcuni passi nel prologo al *Commento* riguardanti Pitagora riporterebbero idee di Giamblico [BURKERT 1972], ma ciò è affatto inessenziale, data l'affinità 'ideologica' tra i neoplatonici, riguardo l'esposizione della storia della matematica. Nulla dimostra che l'appartenenza alla scuola neoplatonica abbia determinato o anche solo influenzato la parte storica del *Commento* di Proclo.

Anche Proclo fa riferimento poche volte a Pitagora: solo tre, e più di venti ai pitagorici. La prima è all'interno di una esposizione dell'importanza della matematica, chiaramente in accordo col pensiero di Giamblico:

"Da quanto abbiamo detto è chiaro che la scienza matematica dà un contributo della massima importanza alla filosofia e ai suoi rami particolari, che dobbiamo anche menzionare. Per la teologia, prima di tutto, la matematica prepara la nostra apprensione intellettiva. Quelle verità sugli dei che sono difficili da scoprire e comprendere per le menti imperfette, queste sono la conoscenza della matematica, che con l'aiuto di somiglianze, si dimostra affidabile, evidente e inconfutabile."

"Dimostra che i numeri riflettono le proprietà degli esseri superiori nella scala degli esseri e negli oggetti studiati dall'intelletto rivela i poteri delle forme intelligibili [le idee]. Così Platone ci insegna molte meravigliose dottrine sugli dei attraverso forme matematiche, e la filosofia dei Pitagorici riveste il suo segreto insegnamento teologico con tali drappeggi. Lo stesso tratto è evidente in tutto il "discorso sacro" nelle *Bacchae*[6] di Filolao e in tutto il trattato di Pitagora sugli dei."

"La matematica apporta anche contributi del più grande valore per le scienze fisiche. Rivela l'ordine dei rapporti secondo i quali l'universo è costruito e la proporzione che lega insieme le

6 Si riferisce a un 'Discorso Sacro' cui fanno riferimento Giamblico e altri. Per quanto riguarda le 'Baccanti' di Filolao, v. la voce 'Philolaus' della Stanford Encylopedia of Philosophy: Philolaus.

cose nel cosmo, rendendo, come dice da qualche parte il *Timeo*, cose divergenti e origine di conflitto in amici e compagni simpatetici."

Tutto ciò è identico al pensiero di Giamblico, ed esprime la filosofia che tradizionalmente è attribuita a Pitagora e alla sua scuola. Possiamo trovarla in Platone, esplorando dialoghi come *Fedone*, *Teeteto*, *Timeo* ecc.; l'idea fondamentale è che l'armonia del mondo è nel numero. Per Platone, la dimostrazione matematica "evidente e inconfutabile" secondo le parole di Proclo è il modello della prova, e la sua dialettica (che attribuisce a Socrate) sta alla verità come la dimostrazione matematica sta alle proprietà della figura geometrica. Questa sintesi tra matematica e filosofia e non la semplice compresenza di interessi è propria di Platone, ma non è certo che non abbia precursori.

La seconda citazione riguarda la scoperta del famoso teorema: "Se ascoltiamo coloro a cui piace registrare le antichità, troviamo che attribuiscono questo teorema a Pitagora e dicono che ha sacrificato un bue alla sua scoperta."

La terza lo menziona come scopritore di una delle formule per il calcolo delle terne pitagoriche; un'altra viene attribuita a Platone.

Proclo non dice quasi nulla su Pitagora, salvo accettare che fosse il caposcuola dei pitagorici. In compenso cita Filolao, che ascrive pienamente a quelli:

"Tra i pitagorici troviamo che alcuni angoli sono dedicati a certi dei, altri agli altri. Così Filolao forma l'angolo di un triangolo sacro per alcuni, e l'angolo di un quadrato sacro per altri, assegnando angoli diversi a divinità diverse o lo stesso angolo a più di un dio e più angolazioni allo stesso dio, secondo le varie potenze in lui. E penso che il filosofo di Asine[7] [Teodoro, neoplatonico discepolo di Porfirio] ha in mente queste caratteristiche del triangolo demiurgico, la causa primaria di tutto l'ordine tra gli elementi, quando pone alcuni dèi ai lati e altri agli angoli, il primo presiede al successivo… Quindi queste caratteristiche dell'angolo portano i nostri pensieri intorno alla contemplazione dell'essere." E ancora: "Giustamente Filolao dedica l'angolo del triangolo ai quattro dei Kronos, Hades, Ares e Dioniso… Se le differenze tra triangoli contribuiscono al processo di generazione [che ha origine nelle quattro divinità], allora è ragionevole ammettere che il triangolo è il principale agente nella produzione delle cose sublunari." Si osservi che ogni poligono è scomponibile in somma di triangoli; si veda il *Timeo.* Infine: " Il numero dodici, che è il loro prodotto [di tre per quattro], ascende verso un'unica monade, la sovranità di Zeus. Filolao dice che l'angolo del dodecagono [regolare; vale 150°] è l'angolo di Zeus, perché Zeus si tiene insieme in un'unica unità l'intero numero duodecimale, in Platone allo stesso modo Zeus guida 'i dodici' e ha dominio assoluto su tutte le cose.*"*

È chiaro che per Proclo, cioè per i neoplatonici / neopitagorici, Platone espone una dottrina sacra che è fatta risalire a Pitagora. È altrettanto chiaro che fino a questo punto il suo *Com-*

7 Città sulla costa dell'Argolide.

mento ha pochissimo a che vedere con la matematica come la intendiamo, moltissimo con una filosofia misticheggiante che – se accettiamo la versione di Aristotele – ha inizio molto dopo Pitagora; non è possibile sapere cosa venga da lui, o da coloro che si definivano suoi seguaci.

Per quanto riguarda le teorie dei pitagorici in generale:

"I Pitagorici considerano la quantità e la grandezza non nella loro generalità, ma solo come finite in ogni caso. Infatti dicono che le scienze studiano il finito in astrazione da quantità e grandezze infinite, poiché è impossibile comprendere l'infinito in entrambe" ; "Ma lei (Νοῦς, il principio intellettivo) pensa l'Illimitato in accordo con il Limite e genera forme di vita e idee di ogni genere attraverso l'Illimitato [che è] in lei. Il suo pensiero, tuttavia, costituisce queste scienze non secondo la maniera dell'Illimitato che appartiene alla vita, ma in accordo con il Limite intrinseco a queste scienze; poiché esse portano la somiglianza del Nous, non della vita" [il principio creatore non ha limiti, ma la conoscenza è limitante in quanto si rivolge a oggetti finiti; oppure: non vi è limite al pensiero, ma le scienze sono limitate dal loro oggetto]; "Secondo la tradizione, i pitagorici riconoscevano che tutto ciò che chiamiamo apprendere è ricordare"; "definiscono il punto come unità che ha posizione"; "pongono il punto come analogo alla monade, la linea alla diade, la superficie alla triade e il solido alla tetrade" [1+2+3+4 = 10, la sacra τετρακτύς , *tetractýs*]; "il triangolo è la fonte ultima di generazione e della produzione delle specie tra le cose generate. Di conseguenza, il *Timeo* afferma che le idee della scienza naturale, quelle utilizzate nella costruzione degli elementi cosmici [i poliedri regolari], sono triangoli”; ma “I Pitagorici pensavano che questa figura a quattro lati [il quadrato] più di ogni altra portasse l'immagine della natura divina. È la loro figura preferita per indicare il valore immacolato; poiché la giustezza degli angoli imita l'integrità, e l'uguaglianza dei lati rappresenta un potere durevole. Il cambiamento è la progenie dell'ineguaglianza, e la stabilità dell'uguaglianza; da qui le cause della solida fondazione di tutte le cose e di un potere puro e imparziale si esprimono naturalmente attraverso la figura quadrata come immagine di queste proprietà. Inoltre, Filolao, in un'altra delle sue riflessioni, chiama l'angolo del quadrato l'angolo di Rea, Demetra e Hestia. Infatti, poiché il quadrato è la sostanza della terra e l'elemento a essa più vicino, come apprendiamo dal *Timeo*...” [Triangoli e quadrati rimandano al triangolo rettangolo; ogni triangolo è somma o differenza di triangoli rettangoli, e il quadrato è unione di due triangoli rettangoli isosceli. Tutto ciò si connette al teorema di Pitagora].

È chiaro che Proclo esalta il valore cosmogonico delle figure geometriche, in continuità con il tardo Platone. Più oltre la trattazione di Proclo è orientata essenzialmente alla geometria. È attribuito a Pitagora, o ai pitagorici, il teorema per cui solo tre poligoni [regolari] possono riempire lo spazio [inteso come parte di piano] intorno a un punto: il triangolo equilatero, il quadrato, l’esagono regolare[8], e quello per cui la somma degli angoli interni a un triangolo equivale a due retti.

“Eudemo e la sua scuola ci dicono che queste cose - l'applicazione (παραβολή) delle aree, il loro eccesso (υπερβολή) e il loro difetto (ἔλλειψις) - sono antiche scoperte della musa pitagorica. È da queste procedure che i geometri successivi hanno preso questi termini e li hanno applicati alle cosiddette linee coniche, chiamando una di esse ‘parabola’, un'altra ‘iperbole’ e la terza ‘ellisse’, sebbene quegli uomini divini di un tempo vedessero il significato di questi termini nella descrizione delle aree piane lungo una linea retta finita.” Qui Proclo allude ai problemi che secondo Neugebauer sarebbero rivestimenti geometrici di equazioni algebriche, e che vedeva come prove della ricezione della matematica babilonese da parte dei Greci.

8 Solo in questi casi l’ampiezza dei loro angoli è sottomultiplo dell’angolo giro.

Il quadro tracciato dalle antiche descrizioni della figura di Pitagora sembra il seguente. Diogene L. traccia un ritratto lineare, nel complesso verosimile pur inglobando elementi aneddotici, citando le fonti cui si ispira non incompatibile con le narrazioni dei neopitagorici come Proclo e Giamblico, pur non includendone la gran parte, il che fa supporre che molto di quanto Proclo e Giamblico scrissero derivasse da fonti posteriori. Aristotele però sembra discordare sia da Diogene sia, e ancor più nettamente, dai neoplatonici, nel distinguere Platone dai 'cosiddetti pitagorici' e ancor più nel non includere Filolao tra i pitagorici stessi. Il punto è il contrasto tra 'limite' e 'illimitato', che fa parte dell'insegnamento di Filolao ma che secondo Aristotele non avrebbe nulla di 'pitagorico'. Vi è contrasto anche tra l'interpretazione aristotelica del numero pitagorico, per la quale questo è direttamente legato alla realtà sensibile, e la sua valenza metafisica, sacrale, secondo la tradizione: "Gli oggetti della matematica, come numeri e linee, non sono sostanze nello stesso senso in cui lo sono le cose sensibili; ma sono anteriori alle cose sensibili per definizione e quindi hanno una certa priorità." [*Metafisica* XIII.2], salvo precisare che "I Pitagorici dicono che le cose che esistono sono numeri, ma non nel senso che siano separati dalle cose sensibili; infatti affermano che i numeri sono la sostanza delle cose che esistono" [*Metafisica* XIII.6]. Si direbbe che in questi passi Aristotele assimili i numeri ai principi primi (αρχαί) dei 'fisici', costituenti la sostanza degli oggetti sensibili, e non come principi formali secondo i neoplatonici e neopitagorici. Ma la filosofia dei pitagorici gli era estranea, secondo quanto egli stesso affermava: “sembra che parlino di un altro mondo e di altri corpi, e non del mondo e dei corpi sensibili”; v. anche *Ferguson* (2010), il che fa supporre vi sia stata continuità tra il pensiero dei primi pitagorici e i tardi commentatori neoplatonici.

L’ambiguità però poteva albergare anche presso gli stessi pitagorici riguardo ai loro interessi. Si pensi all’acustica: le indagini in proposito potrebbero aver avuto inizialmente significato solo fisico (relazione tra i rapporti armonici e rapporti matematici), ma, data la correlazione tra musica, cosmologia e religione, avrebbero poi assunto una valenza metafisica. O, forse, questa vi era già dall’inizio.

Si potrebbe pensare che le motivazioni di Aristotele siano ‘di principio’, legate al suo indirizzo filosofico, ben diverso da quello dei neoplatonici e dello stesso Platone, se non fosse per le implicazioni del suo stretto legame con Eudemo. Questo storico della matematica doveva essere meglio informato dei successori di Platone, ed è estremamente verosimile che il punto di vista di Aristotele derivasse proprio dalle conclusioni cui Eudemo era giunto nelle sue indagini. Di tutte le opere di costui ci è giunto solo qualche frammento, per cui il carattere del pitagorismo è in prevalente misura forgiato da tardi neopitagorici. La scarsa qualità storiografica delle fonti a noi pervenute ci obbliga a formulare congetture incerte ma suggestive; p. es. si potrebbe supporre che l’opera originale di Eudemo non sia stata tramandata fino a noi proprio perché avrebbe contraddetto la ricostruzione del pensiero pitagorico fatta dai neoplatonici, molto vicina sotto certi aspetti alla teologia cristiana (il triangolo demiurgico, ecc.) che non aveva particolare interesse al rigore storiografico. L'accettazione del punto di vista di Aristotele a sua volta implica una svalutazione di Pitagora come matematico. Si dovrebbe allora ammettere che la maggior parte del *corpus* pitagorico sia stata opera dei seguaci di Pitagora fino ad Archita, un valente matematico pitagorico in buoni rapporti con Platone, del quale ci sono pervenuti solo pochi frammenti.

Per quanto si possa ammettere che i neoplatonici, e quelli della seconda Accademia in particolare, si siano talvolta abbandonati a teorie storicamente infondate, resta che il loro punto di vista aveva radici nelle idee dello stesso Platone, dato che ne accettavano la filosofia, compreso il rapporto con la matematica. Ciò può non chiarire la relazione che questi ebbe con i pitagorici, dato che se numerosi sono i riferimenti di Platone alla matematica, al contrario sono quasi inesistenti quelli ai pitagorici. Si è tentati di concludere che i neoplatonici avessero alquanto esagerato l'influenza dei pitagorici su Platone e abbiano a loro attribuito le idee dello stesso Platone. Ma ciò non spiega perché i neoplatonici accostassero Platone proprio a Pitagora; dovevano pure avvertire una vicinanza tra le rispettive filosofie anche in relazione alle dottrine cosmologiche e matematiche. Il fatto che Platone stesso trascuri di citare Pitagora e i pitagorici non significa molto; potrebbero avere molta più importanza i suoi viaggi in Sicilia, dove la tradizione pitagorica doveva aver lasciato tracce, e l'amicizia con Archita. Platone poteva desiderare di non apparire un epigono, o aver ritenuto opportuno non rivelare apertamente di professare dottrine pitagoriche, connesse ai misteri. Questi non dovevano essere diffusi ai profani. Sicuramente aspirava ad essere legislatore e guida politica, come era stato Pitagora. Inoltre, la tradizione che associa Platone e Pitagora sembra risalire già alla prima Accademia; non sarebbe dovuta ad apporti o contaminazioni posteriori. Tale tradizione è stata accettata fino ad oggi:

"Nella biografia di Pitagora letta da Fozio [patriarca di Costantinopoli] nel IX secolo d.C., Platone è presentato come un membro della scuola pitagorica. È allievo di Archita e il nono successore di Pitagora stesso. Se fosse vero, Platone sarebbe certamente il più illustre pitagorico antico dopo Pitagora stesso. Alcuni studiosi moderni, pur non arrivando a tanto, hanno visto le connessioni tra Platone e i pitagorici come molto ravvicinate. Così era per *A. E. Taylor*; la tesi principale del suo grande commento sul *Timeo* (1928) è che "l'insegnamento di Timeo... può essere dimostrato essere in dettaglio esattamente ciò che ci si aspetterebbe da un pitagorico italico del V secolo", sebbene Taylor non consideri questi come insegnamenti propri di Platone all'epoca. Anche *W. Guthrie* (1975) nella sua famosa storia della filosofia antica concludeva che la filosofia pitagorica e quella platonica erano così vicine che è difficile separarle." [STANF. ENC. 2024] e "Aristotele non attribuisce nomi specifici a questi pitagorici, ma la filosofia che assegna loro è molto simile a quella che si trova nei frammenti di Filolao di Crotone" [*Ibid.*].

Purtroppo, le informazioni che ci sono pervenute sono insufficienti per chiarire il rapporto tra Platone e la filosofia pitagorica. L'accostamento sembrerebbe essere mediato da Filolao e Archita soprattutto, e (forse) da Timeo Locrio, ma la foschia che circonda tutta la questione consente a chi intenda battere vie alternative di porla sotto altri aspetti, rivalutando il ruolo di personaggi lasciati in ombra o di difficile collocazione. È il caso di *Ippaso da Metaponto* intorno al quale non mancano notizie, ma contraddittorie e di fonti tarde, che gli attribuivano violazioni dei segreti della scuola, ma che il prof. *P. S. Horky* [2013] vede come l'iniziatore di quella corrente del 'pitagorismo matematico' cui Platone avrebbe attinto. Stessa posizione è stata assunta dalla Ferguson (2010), che dedica spazio al confronto tra *acusmatici* e *matematici.* Nella sua ricostruzione, questi ultimi erano la corrente che, pur nel rispetto della figura di Pitagora, avrebbe seguito la via della ricerca andando oltre gli insegnamenti del Maestro. A parte Ippaso, personalità dai contorni sfuggenti, il pensiero di Pitagora influenzò Empedocle, Epicarmo e altri, dei quali abbiamo solo notizie indirette.

Non solo la matematica avrebbe influenzato la filosofia, ma sarebbe avvenuto anche il contrario; anzi questo dovrebbe essere un punto importante per chi ne esplori lo sviluppo. Se la matematica greca si distinse da quelle delle altre culture già prima di Euclide al più tardi dal V sec., si deve trovarne la ragione, e questa può essere nella πόλις o nell'organizzazione delle scuole, ma la reazione alla scoperta delle grandezze incommensurabili ha in sé un alcunché di 'filosofico'. Il solo fatto che i Greci si fossero posti il problema anziché limitarsi ad eseguire approssimazioni li distingueva dai non greci, ma è interessante che per risolverlo abbiano seguito la via geometrica per rappresentare esattamente le grandezze. In tal modo si abbandonano considerazioni pratiche – il che implica chiaramente una sorta di distacco dell'attenzione dall'osservazione dei fenomeni e dagli interessi materiali dei cittadini – e si decide di considerare il rapporto tra grandezze in sé, elevando la figura geometrica al di sopra degli oggetti sensibili. L'atteggiamento è lo stesso dei pitagorici, salvo che questi rivolgevano l'attenzione al numero. Una sorta di filosofia idealistica *ante litteram* è presente nella scelta di un metodo che trascura la misurazione e cerca l'esattezza in un mondo di relazioni tra immagini, intelligibile ma non osservabile mediante i sensi.

La figura centrale del rapporto tra la scuola di Pitagora e la Grecia è indubbiamente Filolao (ca. 470-385 a.C), che avrebbe scritto, primo tra i pitagorici, un trattato *Della natura* di cui ci son pervenuti più di venti frammenti, non tutti autentici. La sua visione del mondo come un tutto ordinato armonicamente si fonda sull'antitesi / coordinazione di *Illimitato* e *Limite*, due categorie sulla cui interpretazione non abbiamo alcuna informazione, ma che potrebbero avere una funzione di principi generali nella formazione del mondo, pur asserendo che non si possa affermare nulla di certo sulla natura in sé (ponendo quindi una limitazione alla validità universale del principio attribuito ai pitagorici per i quali 'tutto è numero') e che abbiamo visto essere citate da Proclo, insieme al Νούς di Anassagora. Già

Anassimandro aveva posto l'illimitato, o piuttosto l'indefinito (ἄπειρον) come principio primo (ἀρχή) di ogni cosa volendo forse rappresentare la forma attuale del cosmo come generata per differenziazione e separazione degli opposti; da un punto di vista geometrico, si potrebbe intendere il 'limite' come ciò che definisce una figura, perimetro per le figure piane, superficie per i solidi, essendo lo spazio in sé senza limite; lo stesso può dirsi per la linea retta, se considerata prolungabile a piacere, come Euclide stesso la definiva. Oppure, si osservi come i corpi materiali occupino spazio esattamente come ciò che li circonda, e che lo spazio di per sé è indifferenziato e omogeneo. Il limitatore è ciò che ne differenzia le parti, cioè i corpi che lo riempiono. In sostanza, 'indefinito' e 'infinito' erano considerati categorie identiche, o piuttosto ciò che non ha limite (che non si differenzia dal resto) è non definito, indeterminato. Lo spazio e i corpi che lo compongono sono solo un esempio, il rapporto tra i due principi doveva essere universale. Soprattutto, il 'limitatore' doveva alludere – in geometria - alla capacità di delimitare lo spazio con l'immaginazione, fino ad assumere la funzione più generale di definire e discriminare, cosa che miticamente nel libro della Genesi è illustrata nell'attribuire nomi alle cose e agli animali. Il limitatore sembra essere una razionalizzazione della funzione del nominare.

Timeo, nel dialogo omonimo, spiega come le figure cosmiche siano definite dalle superfici che ne sono il limite. Oppure, si può confrontare l'infinità dell'insieme dei numeri con la loro grandezza limitata, la finitezza di un segmento con il numero indefinito delle sue suddivisioni ecc.; l'idea sembra potersi applicare ad una varietà indefinita di contrasti anche nella sola geometria, e possibilmente proprio a questo avrebbe alluso Filolao, riconnettendosi ad una tradizione derivata da Anassimandro.[9]

Peraltro, Diogene L. assegna Filolao alla scuola italica e Anassimandro a quella ionica, e Aristotele non considera Filolao un pitagorico 'autentico', indicando – forse correttamente – che l'idea dell'Illimitato e del Limite attribuitagli non fosse, appunto, di origine pitagorica, ma effetto di una commistione tra le due correnti del pensiero greco distinte da Diogene. Tuttavia, Aristotele non nega quello che Diogene afferma, cioè che Filolao abbia trasmesso nozioni matematiche pitagoriche. Ma, se ci fu mescolanza delle due scuole, lo stesso deve essere accaduto per le discipline matematiche, per cui la tradizione pitagorica e quella originata da Talete dovrebbero essere confluite nella seconda metà del V sec. In Platone non si trovano riferimenti a due scuole matematiche distinte. Teeteto è presentato come allievo di Teodoro, a sua volta seguace di Protagora; non si vede relazione alcuna con Pitagora, né Filolao è nominato nel *Fedone* se non come ispiratore di Cebete, che discute con Socrate sull'immortalità dell'anima. Inoltre, sia Pitagora che Talete sono descritti dalla leggenda come iniziatori e promotori della dimostrazione in matematica.

9 Secondo il filologo e scrittore G. Semeraro, il termine ἄπειρον deriverebbe in realtà dal semitico *'apar,* 'terra'. Se così fosse, anche la terra – oltre all'acqua per Talete, e all'aria per Anassimene – sarebbe stata proposta per essere l'elemento originario.

Proclo, nel suo commento al I Libro di Euclide, traccia una storia della matematica che sarebbe basata sulla perduta opera di Eudemo [MORROW, HEATH e altri], che effettivamente nomina sei volte: come autore di un libro sull'angolo; quando attribuisce a Talete la scoperta del teorema degli angoli opposti formati dall'intersezione di due rette; nell'attribuire a *Enopide di Chio* [500-420 a.C.] un problema sull'angolo retto; quando afferma che Talete avrebbe fatto uso di un certo teorema per misurare la distanza di navi in mare; attribuendo a Pitagora il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo; infine riguardo al problema XLIV del I libro sull'applicazione delle aree.

Proclo concorda con Erodoto nello spiegare l'origine della geometria con la necessità di ridefinire i terreni inondati dal Nilo; poiché "tutto procede dall'imperfezione alla perfezione, essi [gli Egizi] sarebbero passati dalla percezione sensibile ai calcoli e dai calcoli al ragionamento." Assai interessante, e parimenti logica, è l'affermazione per cui "presso i Fenici le necessità del commercio e dello scambio diede slancio allo studio accurato del numero"; Proclo individua nelle aree geografiche più vicine alla Ionia, o comunque ad essa collegate via mare, l'origine di aritmetica e geometria, in luogo della Mesopotamia. Infatti, Talete avrebbe importato la geometria dall'Egitto; "avrebbe fatto molte scoperte lui stesso affrontando alcuni problemi in un 'modo generale' [cioè cercando prove di validità universale in quanto fondate sul ragionamento] e altri in modo più empirico [con procedimenti euristici, osservazioni ecc.]. Il secondo menzionato è un Ἀμέριστος (*Ameristo*) o

Ἀμέριος altrimenti ignoto, il terzo Pitagora che “trasformò la filosofia matematica in uno schema di educazione liberale esaminando i suoi principi dall'alto verso il basso e indagando i suoi teoremi in modo immateriale e intellettuale. Fu lui a scoprire la dottrina delle proporzioni e la struttura delle figure cosmiche.” Lo stile non è esattamente quello in uso oggidì, ma il significato è chiaro: Pitagora ordinò la materia secondo uno schema deduttivo e si applicò allo studio delle proprietà astratte delle figure senza eseguire misurazioni. Se Proclo è nel giusto, l’organizzazione della matematica in assiomi e teoremi risalirebbe a Pitagora stesso, ben prima di Euclide, e non avrebbe avuto precursori in quest’ambito; ciò presupponeva un insieme piuttosto vasto di nozioni, a meno che egli stesso non le avesse dedotte dai principi; ma Proclo stesso cita solo due sue scoperte, la teoria delle proporzioni e i poliedri regolari. Non è chiaro a quale fonte si riferisse; per il misterioso Ameristo, si rifà ad *Ippia di Elide*, ma in questo caso piuttosto che a qualcuno in particolare come Eudemo potrebbe aver semplicemente riportato l’opinione comune in proposito. A parte il metodo, le scoperte attribuite a Pitagora personalmente sono poche, e su questo punto Proclo non dissente da Diogene L. e neppure da Aristotele. La scuola pitagorica avrebbe quindi sia riordinato nozioni precedenti, sia prodotto nuove scoperte.

Dopo di lui, *Anassagora* ed *Enopide* si applicarono a molti problemi di geometria. La testimonianza di Proclo, che su questo punto cita Platone è interessante, dato che rivela che la ‘filosofia’ e la matematica non erano differenziate. Anassagora precedeva Filolao di una generazione, ed è quindi verosimile che i suoi risultati fossero indipendenti da quelli della scuola pitagorica; lo stato delle conoscenze matematiche al tempo di Platone è molto più elevato di quanto risulta dal confronto con molta parte di ciò che è attribuito alla scuola pitagorica.

Inoltre, gli sviluppi della geometria greca così come sono fissati negli *Elementi* di Euclide sono in contrasto frontale con la priorità che i pitagorici assegnavano all'aritmetica, visto che Euclide si preoccupava di cancellare il numero dalle sue dimostrazioni. Non ci è dato di sapere a quanto risale questa opposizione, ma i metodi che troviamo in Archita, Ippia e altri, cioè nel V sec., fanno pensare che fosse molto antica. Non è detto che possa farsi risalire solo alla crisi prodotta dalla scoperta delle grandezze incommensurabili, che generalmente è ritenuta la causa che avrebbe indotto i matematici greci a orientarsi sui metodi sintetici. Ma, soprattutto, il carattere sacrale della matematica presso i pitagorici e lo stesso tardo Platone non ha nulla a che vedere con la perfezione logica di Euclide e neppure con un indirizzo, dominante nella geometria greca, tendente alla realizzazione di tale perfezione.

Potrebbe essere che conoscenze attribuite ai pitagorici fossero in realtà dovute ad Anassagora o altri, e che a questo misconoscimento abbia contribuito l'Accademia platonica, per il prestigio che sarebbe derivato alla scuola nell'attribuirgli un' affinità con la tradizione di Pitagora, il che spiegherebbe la freddezza di Aristotele verso i 'cosiddetti pitagorici', ma siamo nel campo della speculazione astratta; rimane tuttavia da parte di un tardo neoplatonico la chiara ammissione che importanti contributi alla matematica greca non furono dovuti solo a Pitagora e a Talete prima di lui, e che non abbiamo alcuna certezza su quanto sia stato effettivamente prodotto dalla scuola di Pitagora.

Seguono *Ippocrate di Chio* e *Teodoro di Cirene*, sui quali Proclo è stringatissimo, e infine Platone: "ha notevolmente avanzato la matematica in generale e la geometria in particolare grazie al suo zelo per questi studi. È ben noto che i suoi scritti sono densi di termini matematici e che ovunque cerca di suscitare ammirazione per la matematica tra gli studenti di filosofia." L'affermazione è notevole, dato che in Platone si è visto il filosofo molto più del matematico; e passi per i teologi, ai quali la geometria può anche non interessare, ma questo *deficit* di attenzione verso questo aspetto del suo pensiero meriterebbe un'indagine. Se Proclo era nel giusto, l'orientamento prevalente nei confronti di Platone avrebbe già dall'antichità trascurato una componente significativa del suo pensiero, forse a causa della *forma mentis* della grande maggioranza dei commentatori, o più semplicemente perché la chiave per comprenderne la filosofia era andata perduta. Platone è considerato piuttosto un metafisico con lo sguardo rivolto verso l'alto, verso il mondo delle idee, e forse si trascura lo spazio che la dialettica occupa nei suoi 'dialoghi'. Il problema è che la dialettica platonica può essere intesa come un metodo per dimostrare come l'indagine razionale abbia dei limiti, la cui esistenza viene riconosciuta grazie ad essa, o come lo strumento con il quale si dimostra la vacuità delle opinioni personali, o come l'unico metodo per cercare la verità nel mondo sovrasensibile ma intelligibile. Il legame con la matematica è la fede nell'intelligibilità del cosmo e non solo nel potere della ragione; non ha senso esercitare il secondo fino a un certo segno senza questa fede, e non si vede che senso poteva avere altrimenti un testo come il *Timeo.* Nel *Fedone*, Socrate è rappresentato mentre discute l'eternità dell'anima e il suo destino attraverso la vita e la morte; non avrebbe senso esporre una discussione in proposito se non si accettasse già dall'inizio un principio di intelligibilità che oltrepassi la semplice osservazione del mondo sensibile. È chiaro che Platone riponeva molta fiducia nella possibilità di indagare il soprasensibile, confortato in questa sua convinzione dalle certezze offerte dalla matematica. In un certo senso, una parte almeno della sua opera è ricerca della dimostrazione, e forse Platone e i matematici condividevano la certezza o almeno la speranza che si potesse comprendere *tutto*, o che – se leggiamo la loro vicenda intellettuale come una ricerca religiosa, quale doveva essere – la dialettica e la matematica fossero la via che conduceva alla divinità. Non vi è molta differenza tra le parole che Platone attribuisce a Socrate nel *Fedone,* nel *Fedro* ecc. e la filosofia di un Giamblico, di un Proclo, salvo il peso che questi attribuivano al numero.

Seguono riferimenti a *Eudosso di Cnido* "membro del gruppo di Platone"[10], che tra l'altro "moltiplicò il numero delle proposizioni riguardanti la 'sezione' [aurea] originarie di Platone, im-

10 In realtà Eudosso ebbe molti interessi, p. es. in medicina e in politica, e sarebbe stato allievo di Archita.

piegando il metodo dell'analisi per la loro soluzione.” Questa affermazione di Proclo indicherebbe in Platone piuttosto che nei pitagorici l’autore della teoria della sezione aurea. “*Amicla di Eraclea*, uno dei seguaci di Platone, *Menecmo*, uno studente di Eudosso che fu anche associato a Platone e suo fratello *Dinostrato* perfezionarono ulteriormente tutta la geometria”; appartennero all’Accademia *Teudio di Magnesia* (questi, noto solo attraverso Proclo) e *Ateneo di Cizico*. I membri dell’Accademia avrebbero collaborato e condiviso le loro scoperte proprio come avrebbero fatto quelli della scuola di Pitagora. Ancora, “*Filippo di Mende*, studente che Platone aveva incoraggiato a studiare matematica, proseguì anche le sue indagini secondo le istruzioni di Platone e si dedicò allo studio di tutti i problemi che pensava potessero contribuire alla filosofia di Platone”; si sarebbe occupato di filosofia anche Eudosso, che secondo Aristotele avrebbe sostenuto posizioni edonistiche.

Ma l’importanza di Eudosso è in relazione non solo con le sue notevoli scoperte e innovazioni, ma con il punto di svolta che avrebbe portato all’assiomatizzazione della geometria, al quale avrebbe dato un contributo essenziale.

“Uno dei problemi più importanti del pensiero greco consiste nel conoscere fino a qual punto il pensiero di Platone abbia reagito alle teorie matematiche e viceversa, per quale via le idee di astrazione, definizione, esistenza e simili fecero il loro percorso nella struttura che apparve poi in Euclide… Possiamo discernere quanto sia intricato il processo di interazione che caratterizza questo periodo di contatto tra due discipline [filosofia e matematica] in ‘statu nascendi’. Non c'è dubbio che la transizione da una geometria intuitiva a una costruita assiomaticamente deve aver avuto un forte impatto sulla teoria delle Idee, toccando la stessa nozione di *eidos* e di inerente logico [inferenza, collegamenti]. Ora, questa transizione è legata al nome di Eudosso…” [DE SANTILLANA 1940].

In particolare, di Eudosso è notevole la ridefinizione di uguaglianza di rapporti. In termini elementari, i Greci ammettevano che, se $a : b = c : d$, allora $ad = bc$. Data la difficoltà di definire il rapporto di due grandezze incommensurabili, Eudosso stabilì per definizione che $a : b = c : d$ se e solo se, per ogni coppia di numeri naturali m e n, $ma < nb$ implica $mc < nd$, $ma = nb$ implica $mc = nd$, e $ma > nb$ implica $mc > nd$. Anche se la definizione di uguaglianza di rapporti data da Eudosso può sembrare analoga a quella di numero irrazionale proposta nel XIX sec. da Dedekind, il contesto, o meglio i rispettivi schemi matematici, sono lontani. Il primo si muoveva nell’ambito delle proporzioni, mentre all’epoca del secondo gli irrazionali erano in uso già da secoli. Ma non è questo il punto; è cruciale che certi avanzamenti erano ‘filosofici’, derivavano dal desiderio di riempire dei vuoti, di non lasciare nulla di incompreso, di sconnesso, di incompleto. La ricerca matematica aveva carattere intellettuale, etico, estetico, e procedeva di pari passi con Policleto e Fidia in un ambito più astratto.

Prescindendo dal carattere particolare della ricerca greca, il fatto è che, nello sviluppare la loro materia, i matematici si pongono nuovi problemi che, appunto perché tali, non possono essere trattati con le nozioni e i metodi già acquisiti. L'approccio è quindi euristico, condizionato dalla cultura e dagli interessi dell'epoca, e ha necessariamente un carattere critico, 'filosofico' in tutte le epoche e sotto tutte le latitudini.

La filosofia, molto meno vincolante del calcolo o della dimostrazione di stile euclideo, in una certa misura può indicare la strada. Quando nella ricerca matematica si affacciano problemi che non si possono risolvere con i metodi noti, è necessario ricorrere a un pensiero creativo; è necessario inventare qualcosa di nuovo. In realtà questo accade molto frequentemente, non solo nei periodi di crisi, per cui si potrebbe asserire che la matematica sistematizzata non è altro che filosofia condensata in schemi coerenti, privi per quanto possibili di contraddizioni. La matematica è la via d'uscita dalla dialettica, o meglio dal confronto senza fine tra idee in conflitto.

Abbiamo molti esempi in questo senso in età moderna. Più in generale, nella formulazione di nuove idee, nello sforzo di chiarire le idee correnti, di riconoscere affinità tra problemi apparentemente distinti, di riordinare e perfezionare la materia, intervengono fattori che non sono prodotto né del calcolo né della dimostrazione, comunque questa venga intesa; non sono cioè il risultato dell'applicazione di un numero finito di procedure universali e regole acquisite. Non c'è necessariamente un filo logico; anzi, idee nuove, proprio in quanto tali, implicano discontinuità più o meno profonde. Talvolta queste si concentrano in un breve periodo di tempo, per ragioni di vario tipo, non necessariamente solo interne alla logica propria di un dato campo di studi. Nel caso del periodo di Platone, sembra che il problema interno alla matematica fosse quello delle grandezze incommensurabili, che coinvolge sia la geometria che l'algebra, e che – se si volevano evitare approssimazioni – implicava la scelta della via geometrica, non avendo trovato un modo per trattare gli irrazionali come gli altri numeri. Nel caso nostro, la 'filosofia' avrebbe influito sulla matematica già al suo inizio, nel VII-VI sec., imponendole di essere una via per la ricerca della verità disinteressata e oltre le apparenze. Le riflessioni filosofiche successive, in particolare per quanto riguarda il rapporto tra aritmetica e geometria e la questione degli irrazionali, procedettero su una linea già segnata da tempo, che avrebbe separato la matematica greca da tutte le altre.

L'idea che la scoperta degli incommensurabili abbia comportato un riorientamento della matematica greca verso la geometria sintetica non è così ovvia come oggi potrebbe apparire. Qualcosa come una rivoluzione scientifica doveva essere accaduto, ma tempo prima della questione degli irrazionali; lo possiamo dedurre dal fatto stesso che si fosse posto attenzione alla loro scoperta. Non è difficile provare che $\sqrt{2}$ e la sezione aurea sono irrazionali, e c'è da chiedersi come, essendovi arrivati i Greci, non vi siano giunti ben prima p. es. i Babilonesi, che già da più di un millennio avevano elaborato metodi di calcolo potenti e avrebbero potuto pervenirvi molto prima dei Greci. Nasce il sospetto che vi fossero arrivati in effetti, ma semplicemente non abbiano dato importanza al risultato, che invece avrebbe avuto così tante conseguenze presso i Greci. O all'opposto neppure si posero il problema perché interessati solo al calcolo. Se le cose stanno così, la vera svolta avvenne nel momento in cui il numero non fu più considerato un mero strumento di calcolo, come la tradizione antica sostanzialmente affermava attribuendo questa sorta di rivoluzione culturale a due figure in particolare, Talete e Pitagora. L'opera di Euclide sembra l'esito di un processo di specializzazione che ebbe inizio con quella rivoluzione originaria, finalizzato alla produzione di un tipo di dimostrazione che escludesse tutto ciò che non è esplicitato nelle premesse, qualcosa del genere della dimostrazione aristotelica. Da questo punto di vista, sarebbe storicamente corretto vedere nella soluzione del problema degli irrazionali mediante la geometria sintetica la prevalenza della coerenza sull'impostazione aritmetica (o algebrica) della matematica, rompendo con il principio pitagorico dell'unità di geometria e aritmetica. Inoltre, la dimostrazione euclidea si distingue dal metodo dialettico che Platone avrebbe portato allo sviluppo estremo. La crisi indotta dagli irrazionali quindi sarebbe nata dalla constatazione che la dialettica platonica non ha valore probatorio, ma nello stesso tempo che era necessario difendere i risultati ottenuti dalle obiezioni che la dialettica poteva produrre. Ciò si accompagnava all'esigenza di riconoscere ed eliminare i metodi sofistici. Tutto sembra vertere sulla ricerca sopra ogni cosa di un metodo probatorio assoluto, incontrovertibile, logicamente (e quindi dialetticamente) inattaccabile, spingendo la ricerca della verità matematica sempre più lontano dall'osservazione e dall'applicabilità a casi concreti, ma le premesse di questi esiti erano state poste molto prima. Possiamo trovare un riscontro moderno nella ricerca dei fondamenti del calcolo differenziale, della geometria, dell'aritmetica stessa, dell'insiemistica ecc.; tutti questi processi di raffinamento conducono ad assiomatizzazioni, perché non c'è altro modo – a parte il calcolo numerico – per giungere a conclusioni obbliganti ed evitare contraddizioni; ma in geometria il calcolo non appariva sufficiente, quindi era necessario trovare i metodi di ragionamento che potessero condurre alla certezza. Questo procedere non è né calcolo né via obbligata; va trovato, e si è potuto arrivarvi perché è intrinseco alla matematica stessa. Tutto ciò non contraddiceva la dialettica rispetto alla sua finalità, ma rispetto al metodo in essa impiegato, e deve esservi svolto parallelamente all'elaborazione della logica aristotelica. Può essere che questi sviluppi nell'ambito della matematica non incontrassero l'approvazione di Platone, e infatti il *Timeo* sembra manifestare un diverso orientamento attraverso il recupero del mito, testimoniando una divaricazione tra la matematica 'simbolica', cosmogonica come la possiamo riconoscere ancora molti seoli dopo nel *Mysterium Cosmographicum* di Keplero, e quella 'deduttiva' basata su dimostrazioni 'sintattiche'. Ma proprio Keplero, quando si impegnò ad esplorare il sistema del mondo, dovette rinunziare alle sue idee cosmogoniche e utilizzare triangolazioni.

È singolare che, là dove De Santillana ed altri hanno visto una rivoluzione o almeno un mutamento profondo, Proclo e di conseguenza i neoplatonici non abbiano riconosciuto alcunché del genere. Ciò è sintomatico della differenza di percezione tra i neoplatonici della tardissima antichità e gli studiosi del XX secolo; questi ultimi analitici ricostruttori di particolari nel tentativo di trovare un filo logico nell'insieme (su pochissime fonti originarie), gli altri seguaci di una ideologia a base etica. Ai neoplatonici e simili non interessava la sistematizzazione in quanto tale, ma l'elemento etico fondamentale, la contemplazione attraverso la conoscenza razionale, la sola che per loro era fonte di certezza e verità. Questo non escludeva ciò che a noi non appare razionale, e può includere cose in contraddizione tra di loro. Se il fine è la conoscenza, tutte le vie che portano alla sapienza sono vere, per cui da Pitagora ad Euclide attraverso Platone vi è progresso e accrescimento, non veramente conflitto, ma sviluppo e chiarimento. Di Platone, Proclo evidenziava solo i suoi contributi positivi alla matematica, non le eventuali deficienze del suo modo di procedere. La geometria, che unisce ragione e intuizione, era il paradigma del modo in cui si deve svolgere qualsiasi ricerca che voglia comprendere la realtà come un tutto. Sembra la stessa intenzione legata alla "Mente" di Anassagora, che fu tra i maestri di Socrate. Questo tipo di filosofia, che impiega la dimostrazione *more geometrico* per orientarsi in ambiti non matematici, è riscontrabile nella prima parte dell'età moderna, quando la stessa persona poteva ancora padroneggiare teologia, filosofia e matematica. La frattura avvenne dopo, con l'Illuminismo, che portava alla suddivisione del sapere, all'approfondimento dei singoli temi, alla specializzazione sempre più estrema.

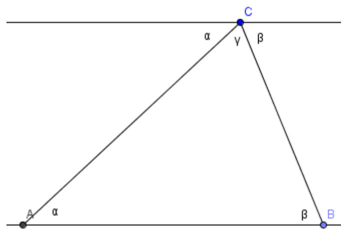
Le indagini condotte a partire dal XIX sec. sui particolari accadimenti del tempo di Platone rientrano in questa categoria dividente, mossa dall'idea di confrontare, distinguere, ordinare in senso cronologico e storico. Benché sia l'unico mezzo a nostra disposizione per tentare di ricostruire una storia, non è il più adatto per comprendere il senso di tutta la questione. Per quanto poco attendibili sotto l'aspetto storico, gli scrittori antichi come Proclo seppero intravedere un fine unitario in tutta la storia della matematica antica, ma attraverso un'ottica molto distante da quella attuale.

Torniamo a Proclo. "Coloro che hanno scritto storie portano a questo punto il loro racconto dello sviluppo di questa scienza. Non molto tempo dopo venne Euclide, che riunì gli Elementi, sistematizzando molti dei teoremi di Eudosso, perfezionando molti di quelli di Teeteto e *mettendo in forma dimostrabile e irrefutabile proposizioni che erano state stabilite in modo piuttosto vago dai suoi predecessori*. Visse ai tempi di Tolomeo I, poiché Archimede, che visse dopo il tempo del primo Tolomeo, menziona Euclide." Questa testimonianza di Proclo, per quanto indiretta e forse incerta nelle fonti (si riferisce al solo Archimede per stabilire l'epoca in cui Euclide visse, non a qualche fonte più diretta), se presa sul serio non concorda pienamente con l'idea di un punto di svolta, di un cambiamento di orientamento che possa definirsi come una vera riforma del metodo. I risultati dei suoi predecessori erano stati stabiliti 'in modo piuttosto vago', compresi quelli di Eudosso e altri; veramente, Proclo si riferisce ai singoli teoremi piuttosto che alla loro sistemazione in uno schema assiomatico. Il conseguimento della perfezione della dimostrazione sarebbe quindi ascrivibile ad Euclide, che non si sarebbe limitato ad un riordinamento della matematica; anzi questo doveva essere iniziato già molto prima, sia pure in forme incomplete, come possiamo vedere già nel *corpus* presunto pitagorico. D'altronde, vi sarà pure un motivo se ci è pervenuta quasi completa l'opera di Euclide, e se ha avuto così vasta diffusione e durata nell'insegnamento, mentre pochissimo dei predecessori è rimasto, ed è che a lui erano dovuti sia la prova rigorosa dei teoremi, sia la loro disposizione ordinata a partire da pochi assiomi e postulati. Se proprio dobbiamo cercare un 'punto di svolta' dobbiamo collocarlo piuttosto nell'opera di Euclide, ammettendo però che non fosse percepito come una novità radicale, ma come compimento e perfezionamento di ciò che i suoi predecessori avevano costruito.

La relazione con il pensiero filosofico deve cercarsi nelle correnti neoplatoniche e neopitagoriche; il resto della filosofia antica – tolti i pensatori fino a Platone compreso – aveva poi approfondito altri temi, essenzialmente etici. Tuttavia, tracce matematiche appaiono nell'ermetismo, nell'ebraismo, nella *qabbaláh* ecc. in varie forme ed epoche. Queste idee, unite al significato simbolico dei numeri, a teorie geometriche-armoniche del sistema del mondo ecc. hanno convissuto fino a Platone ed oltre con la matematica, salvo essere rifiutate dai matematici stessi (non tutti) forse già da prima di Euclide. In parte derivano da concezioni neoplatoniche e neopitagoriche, ma dovevano essere molto più antiche, se il 'numero' di Pitagora non era solo un termine astratto in funzione della relazione di ordine e della quantità, il pentagramma e l'esalfa non erano solo costruzioni geometriche, la *tetractýs* era sacra per i pitagorici, l'armonia era alla base del sistema del mondo ecc. Semmai, il punto di svolta sta nella separazione tra ciò che vi è di magico, esoterico, simbolico e ciò che è 'razionale' nel senso della dimostrazione euclidea, ma in tal caso non è riconoscibile in un momento preciso, ma piuttosto in una differenza fondamentale tra modi diversi di concepire la realtà.

Il *Tannery* in *La géométrie grecque* (1887) fornisce un elenco delle scoperte attribuite nell'antichità ai pitagorici, intendendo verosimilmente con questo termine i membri della scuola di Crotone. La maggior parte deriva da Proclo, scolarca della II Accademia vissuto nel V sec. d.C, circa mille anni dopo Pitagora, succeduto al fondatore *Plutarco d'Atene*[11], e che a sua volta spesso si riferisce esplicitamente a fonti più antiche. Iniziamo da queste.

a) la dimostrazione del teorema per il quale *la somma degli angoli interni di un triangolo è due retti.* È quella comunemente nota, basata sulle proprietà degli angoli alterni interni.



È una 'dimostrazione' estremamente intuitiva, e non esige nessuna impostazione assiomatica. Proclo la deriva dal 'peripatetico' Eudemo, contemporaneo e collaboratore di Aristotele.

---

[11] Discepolo di Giamblico, a sua volta allievo di Porfirio. A Giamblico si doveva una riformulazione della dottrina platonica che ebbe vasta risonanza negli ambienti neoplatonici, portando infine alla fondazione della 'Seconda Accademia' quasi cinque soli dopo la chiusura della prima, quella direttamente discendente da Platone, e otto secoli dopo lo stesso Platone.

Non coincide con quella di Euclide in I.32; per una discussione al riguardo, v. *Heath* p. 320.

b) Il *riempimento del piano con sei triangoli equilateri, o quattro quadrati, o tre esagoni regolari disposti intorno ai vertici comuni*. Non è nominata la fonte. È una proprietà della tassellatura o pavimentazione che doveva essere empiricamente ben nota; i pitagorici ne avrebbero cercato e dimostrata la ragione. La prova più semplice consiste nel calcolare i sottomultipli dell'angolo giro: in gradi, 120°, 90°, 72°, 60°, 45°, 36°, 30°, 15° ecc… dai quali dobbiamo escludere tutti gli angoli minori di 60° perché non sono angoli interni di nessun poligono regolare. Il valore minimo possibile è 60°, il massimo 120°; tutti i poligoni con più di sei lati hanno angoli interni maggiori di 120° e non possono essere sottomultipli del giro. Nessun poligono regolare ha angoli interni di 72°; quelli del pentagono misurano 108°. Restano solo 60 (triangolo equilatero), 90 (quadrato o rettangolo) e 120 (esagono regolare). Se questo era il ragionamento, la dimostrazione è un procedimento per esclusione. Sembra semplice, ma esige che si conoscano gli angoli interni di un poligono regolare, p. es. considerandolo unione di triangoli isosceli; dal teorema dei due retti si possono ottenere gli angoli alla base di questi, ecc.

c) Il teorema detto, appunto, 'di Pitagora'. Non è nominata la fonte, ma l'attribuzione alla scuola pitagorica doveva essere indiscussa.

d) La trattazione della *parabola delle aree, della loro ellisse e della loro iperbole.* La fonte sarebbe Eudemo; il riferimento è a

I.43 degli *Elementi.* Si tratta di problemi cosiddetti di ‘applicazione delle aree’; “applicazione” traduce il greco παραβολή. La questione è delicata, perché i problemi di ‘applicazione ellittica’ ovvero per difetto consistono nel determinare il segmento x da sottrarre ad un segmento dato b in modo che il rettangolo di base $b - x$ e altezza x sia equivalente a un rettangolo dato; si traduce nell’equazione $(b - x)\, x = \mathrm{S}$, dove S è l’area del rettangolo. Nel caso dell’applicazione iperbolica, o per eccesso, x deve essere aggiunto a b ottenendo $(b + x)\, x = \mathrm{S}$. Trattandosi di equazioni di II grado, che i Babilonesi sapevano risolvere, quesiti del genere possono far supporre una derivazione da costoro. Tuttavia, benché nel suo commento asserisca che tutti e tre i problemi e le relative soluzioni erano ascrivibili ai pitagorici, nell’immediato seguito fa la seguente precisazione:

*“*quando hai tracciato una linea retta e riportato l’area data esattamente lungo tutta la linea retta allora dicono che si applica la suddetta area; ma in questo luogo [I Libro, prop. 44] egli [Euclide] aveva bisogno dell’applicazione semplicemente, poiché cercava di applicare ad una data linea retta un'area uguale ad un dato triangolo affinché potessimo avere in nostro potere non solo la costruzione di un parallelogramma uguale ad un triangolo dato, ma anche la sua applicazione ad una linea retta finita. Ad esempio, dato un triangolo con un'area di 12 piedi e una linea retta la cui lunghezza è 4 piedi, applichiamo alla retta l'area uguale al triangolo se prendiamo l'intera lunghezza di 4 piedi e scopriamo in quanti piedi deve essere la larghezza in modo che il parallelogramma possa essere uguale al triangolo.

Nel particolare caso, se troviamo una larghezza di 3 piedi e moltiplichiamo la lunghezza per la larghezza, supponendo che l'angolo indicato sia un angolo retto, avremo l'area. Tale allora è l'applicazione tramandata fin dai tempi antichi dai Pitagorici”.

Questa precisazione chiarisce il significato che gli antichi pitagorici assegnavano all’ “applicazione semplice”, già nota a loro insieme, sembra, alle altre due. Si tratta semplicemente di costruire su un segmento dato un rettangolo equivalente a un triangolo assegnato.

e) La costruzione dei poliedri regolari, sembrerebbe tutti secondo Proclo, che verosimilmente accettava una tradizione consolidata. L’icosaedro è derivabile dal dodecaedro unendo i centri delle facce del dodecaedro; per gli altri non vedo particolari difficoltà.

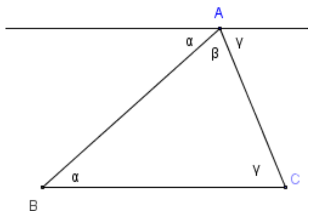
f) [secondo *Plutarco*, nel *Simposio dei Sette Sapienti*] data una figura, costruirne una equivalente e simile a una seconda figura data. Non ho trovato riscontro a questa citazione del Tannery.

Da questo elenco si evince che il Tannery considerava il solo Proclo attendibile per quanto riguarda le scoperte matematiche dei Pitagorici.

Non vi compaiono gli incommensurabili, la prova dell’irrazionalità di $\sqrt{2}$, il pentagramma, e le medie (geometrica, armonica, ecc.) con le rispettive proporzioni.

Lo studio più approfondito e originale in proposito è quello di *A. Reghini*, *"Per la restituzione della geometria pitagorica"* 1978, un testo forse sottovalutato dagli studiosi, ma che va comunque tenuto presente se si desidera collegare tra di loro gli scarsi elementi a noi noti in un quadro coerente. Di particolare interesse è l'analisi dell'applicazione delle aree, a mio avviso assai più soddisfacente dei tentativi di *Heath* e altri, e la connessione con la sezione aurea. Qui mi limito ad esporre alcuni punti notevoli.

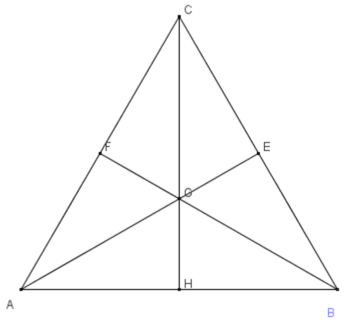
Il teorema dei due retti. Questo è l'unico dei teoremi attribuiti ai pitagorici di cui ci è stata tramandata la dimostrazione da parte di Proclo, basata sull'uguaglianza degli angoli alterni interni formati da due lati di un triangolo con il terzo lato e la parallela a questo passante per il vertice opposto, A. La somma degli angoli convergenti in A è un angolo piatto, i due angoli esterni sono congruenti ai due angoli interni, quindi la somma dei tre angoli interni è un angolo piatto, appunto due retti.



A questa dimostrazione fa riferimento Aristotele; la questione sta nel significato che i pitagorici attribuivano alla parola 'parallela', dato che difficilmente potevano intenderla nello stesso senso di Euclide, cioè come quella unica retta che, condotta per un punto esterno ad un'altra, non la interseca per quanto venga prolungata. Inoltre, secondo la testimonianza di *Eutocio*, un matematico bizantino vissuto tra ca. il 480 e il 520 d.C. che fa esplicito riferimento ad un'affermazione di *Gemino*, il teorema sarebbe stato prima dimostrato separatamente per il triangolo equilatero, isoscele e scaleno, mentre "quelli che vennero dopo dimostrarono il teorema in generale", riferendosi verosimilmente a pitagorici posteriori; perciò – se accettiamo la sua versione – dovremmo respingere l'idea che risalga ai primi pitagorici qualsiasi dimostrazione che non preveda quei tre passaggi.

La ricerca di una tale dimostrazione esige che si definiscano i postulati della geometria pitagorica. Questo programma, e in generale un lavoro che raccordi tra di loro i risultati elencati da Proclo (che il Reghini accetta come fonte principale), si fonda però sull'ipotesi che già all'inizio i pitagorici seguissero uno schema deduttivo, non quello euclideo, ma un sistema di postulati che ne svolgesse la funzione. Una congettura siffatta, a parte la necessità intrinseca, sarebbe assai utile proprio per scoprire l'ordinamento logico della geometria pitagorica così come è stata esposta da Proclo; sono però evidenti le sue criticità: la prima, che Proclo, il quale scrive circa mille anni dopo, sia attendibile; la seconda, più grave, che i pitagorici si orientassero secondo il metodo di Euclide. Detto altrimenti, qualsiasi ricostruzione logicamente ordinata presuppone che il metodo deduttivo originasse già presso i pitagorici. È vero però che la tradizione attribuiva già a Talete la ricerca di dimostrazioni; ma questo non implica di già la formulazione di un sistema di postulati. Va anche detto che all'epoca di Reghini era di moda considerare la matematica come un sistema ipotetico-deduttivo, guardando agli *Elementi* come al modello originale di questo paradigma.

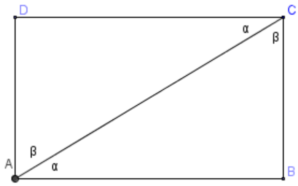
Postulati dei pitagorici secondo il Reghini. Comunque sia, i postulati accettati dai pitagorici sarebbero: 1. i postulati di determinazione (intendo: le definizioni degli enti primitivi) e di appartenenza; 2. i postulati relativi alla divisione in parti della retta e del piano; 3. i postulati della congruenza o del movimento. Ne conseguono 1. i criteri di congruenza dei triangoli; 2. le relazioni tra gli elementi di uno stesso triangolo, i teoremi sui triangoli isosceli, equilateri e scaleni (questo gruppo non è chiaramente definito. Per es., vi appartengono quelli sui luoghi notevoli di un triangolo?), il teorema sull'angolo esterno ecc.; 3. l'unicità della perpendicolare per un punto ad una retta, le proprietà dell'asse di un segmento ecc. senza far uso del postulato (il quinto) di Euclide. A quei postulati, che in sostanza troviamo nei primi 28 capitoli degli *Elementi*, il Reghini ne aggiunge uno, che chiama 'postulato pitagorico della rotazione' : "se un piano ruota rigidamente sopra sé stesso in un verso assegnato attorno ad un suo punto fisso di un angolo (convesso) assegnato, ogni retta situata nel piano si muove anche essa, e le posizioni iniziale e finale della retta (orientata), *se* si incontrano, formano un angolo eguale a quello di cui ha ruotato il piano"; il teorema dei due retti ne sarebbe una conseguenza. Mi limito alla parte della dimostrazione che invoca il postulato della rotazione.



Tracciamo le bisettrici che si incontrano nel centro G. Facendo ruotare intorno a G la figura dell' angolo $C\hat{G}B$, portando C in B, il vertice C va in B, B in A, ecc., CB si sovrappone a BA e per il postulato pitagorico l'angolo tra esse formato sarà uguale a $C\hat{G}B$. Procedendo con altre due rotazioni uguali la figura si sovrappone a se stessa e l'angolo totale di rotazione è quattro retti, cioè la somma dei tre angoli esterni. Gli angoli interni sono supplementari degli angoli esterni, quindi la loro somma è sei retti meno quattro retti, cioè due retti.

Altre spiegazioni. In realtà, non sembra che sia necessario introdurre un postulato specifico per dimostrare che, percorrendo tutto il perimetro del triangolo equilatero a partire da uno qualsiasi dei tre vertici muovendosi sempre nello stesso senso, la rotazione totale di quattro retti sia la somma dei tre angoli esterni, per cui ognuno di essi è un terzo di un giro, i loro supplementari la metà meno un terzo cioè un sesto del giro, la somma di questi ultimi, metà di un giro.

Si potrebbe molto facilmente dimostrare il teorema in generale osservando che, se vale per un triangolo rettangolo, allora vale per qualsiasi triangolo, dato che ogni triangolo è somma o differenza di due triangoli rettangoli. Non vi sarebbe alcuna necessità di ragionare su angoli alterni interni, rotazioni ecc.; si divida a metà un rettangolo tagliandolo con una diagonale:



Dato che i due triangoli rettangoli separati dalla diagonale sono congruenti, la somma degli angoli interni di ciascuno di essi è la metà dei quattro angoli retti del rettangolo. Tra l'altro: il disegno stesso suggerisce il significato di parallelismo come equidistanza e l'uguaglianza degli angoli alterni interni, senza ricorrere a definizioni e postulati generali.

Questo metodo non soddisfa pienamente le affermazioni di Eutocio e Gemino (quest'ultimo solo in quanto citato dall'altro), ma è molto più semplice di quello prospettato dal Reghini, derivando dalle proprietà del rettangolo e dalla congruenza dei triangoli rettangoli separati dalla diagonale. Non si capisce come i pitagorici abbiano potuto trascurare una costruzione così semplice, specie se si consideri che i metodi non erano così rigorosi come quelli applicati da Euclide: cosa implicitamente ammessa proprio da Proclo, il quale afferma che Euclide perfezionò le dimostrazioni fino a renderle irrefutabili; quindi quelle più antiche dovevano essere perfettibili. A favore di una dimostrazione di questo genere è anche il frequente ricorso, nelle fasi più antiche dello sviluppo della geometria, alla scomposizione delle figure e, ovviamente, a considerare soprattutto figure molto semplici o comuni, come rettangoli, quadrati, ecc. La questione è se preferire una dimostrazione molto semplice, direi intuitiva, o la testimonianza di uno scrittore posteriore di un millennio. Ma, forse, si può conciliarla con i possibili modi di suddividere un triangolo. Nel *Timeo*, un triangolo equilatero è considerato l'unione dei sei triangoli rettangoli congruenti con vertici nell'ortocentro separati dalle altezze. La somma dei suoi angoli interni è sei angoli piatti, meno un giro (due piatti) meno altri tre piatti (i sei angoli retti a due a due adiacenti con vertici nei punti medi dei lati), quindi è un angolo piatto. In questo modo si riesce a determinare l'ampiezza degli angoli di un triangolo equilatero; poi applicando lo stesso metodo ad un triangolo isoscele si giunge allo stesso risultato per quanto riguarda la somma degli angoli interni. Per i triangoli scaleni, sembra più semplice scomporli in due triangoli rettangoli conducendo l'altezza relativa al lato opposto all'angolo maggiore. Potrebbe quindi essere che la più antica prova del teorema dei due retti sia indipendente dal V postulato, non faccia intervenire angoli alterni interni, e – forse – sia avvenuta in più passi successivi. Abbiamo quindi una geometria pre-euclidea (che non usa il V postulato) relativa alle proprietà elementari delle semplici figure piane, che è ciò che ci aspetteremmo, ma che non richiederebbe necessariamente un qualche postulato di rotazione o una organizzazione deduttiva della materia. Questa *presuppone* una certa estensione, della quale non sappiamo nulla di certo. I riferimenti di Proclo sono pochi frammenti non collegati tra di loro; siamo lontani dal dover supporre che – a parte le proprietà delle figure elementari – vi fosse alcunché di paragonabile ai postulati di Euclide anche solo come funzione rispetto all'insieme.

Teorema di Pitagora. Più realistiche sembrano le considerazioni del Reghini sul teorema di Pitagora, che ritiene "non improbabile" la dimostrazione [*vedi*] ipotizzata dal *Bretschneider* (1870); credo si possa condividere la sua osservazione che sia il teorema alla base dell'equivalenza (delle figure rettilinee piane) e non alla fine. Dove è più difficile seguirlo è nel riconoscervi una conseguenza del teorema dei due retti, quando la figura stessa, un quadrato decomposto in un quadrato in esso inscritto e in quattro triangoli rettangoli congruenti, oppure in due quadrati e due rettangoli, ciascuno dei quali è la somma di due triangoli rettangoli della precedente scomposizione, ci conduce quasi visivamente a confrontare le due scomposizioni e a riconoscevi l'enunciato del teorema. Abbiamo già visto che la scomposizione di una figura è alla base dello sviluppo della geometria; è un metodo assai intuitivo, precedente qualsiasi altro metodo appena un po' sofisticato, che va alla pari con la scomposizione di un intero in sottomultipli e all'elaborazione di una aritmetica frazionaria. Ne abbiamo esempi nella matematica indiana, anche dopo l'era vedica. È strano che il Reghini veda il teorema dei due retti come una premessa a quello di

Pitagora; probabilmente la via da lui seguita è tracciata dal desiderio di riconoscere nella geometria pitagorica un ordinamento logico-deduttivo che è puramente congetturale, mentre al più potremmo supporre l'esatto contrario: l' intenzione di assumere un insieme di nozioni forse importate dall'esterno sotto un ordinamento che deve essere costruito pezzo a pezzo. I pitagorici erano consapevoli dell'unità della matematica e di tutto, ma questa era fatta piuttosto di *nessi* che non di deduzioni in stile euclideo.

Applicazione delle aree e sezione aurea. Invece, ritengo che l'analisi del Reghini sia la migliore possibile quando ci conduce dall'applicazione delle aree alla sezione aurea. I motivi sono due: non si appoggia ad una 'algebra geometrica' di cui mai s'è parlato prima dello *Zeuthen* (1896), e che interviene pesantemente in certe ricostruzioni; ma soprattutto dimostra in modo relativamente semplice come si possa effettuare la sezione *senza* farvi intervenire una lunghezza che misuri $\sqrt{5}$. Questo è l'essenziale, perché qualsiasi dimostrazione geometrica che implicitamente presupponga questa lunghezza dovrebbe a sua volta presupporre il calcolo della sezione aurea (non solo la sua costruzione per via sintetica) e rimanda all'ipotesi che 'sotto' la veste geometrica vi sia un risultato ottenuto per via algebrica; ma l'esistenza di una dimostrazione sintetica non troppo difficile e perciò stesso credibile prova senza dubbio che l'algebra, travestita o meno, non è necessaria per la sezione aurea.

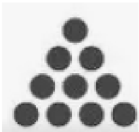
Nelle successive analisi della geometria pitagorica relative all'applicazione delle aree [*vedi*] e alla connessione con la sezione aurea seguiremo l'analisi del Reghini. Per quanto mi risulta, è la più chiara giustificazione dell'utilità dell'applicazione delle aree; verosimilmente, i pitagorici svilupparono questa parte della geometria proprio come base della costruzione della sezione aurea. Ciò conferma pure che l'elenco delle scoperte pitagoriche fornito da Proclo fosse storicamente fondato almeno per quanto riguarda l'applicazione delle aree. Meno chiaro è il perché di queste indagini, che hanno condotto ad una geometria affatto originale rispetto a tutte le altre, dato che non ha per scopo alcun risultato pratico, secondo l'affermazione di Proclo per il quale Pitagora fece della matematica un'attività liberale. È possibile che non si trattasse solo di 'geometria' come noi – e forse Euclide – la intendiamo, ma che il senso di tutto ciò ci sia estraneo e, almeno fino a un certo punto, possa essere intravisto attraverso Platone e i tardi neoplatonici. È quasi inevitabile giungere a questa conclusione anche ignorando completamente la filosofia neoplatonica: basterebbe fare il confronto con quanto sappiamo della geometria indiana e soprattutto cinese, orientata al 'pratico'. Geometrie di questo tipo hanno una struttura affatto diversa da quella greca. L'eccezione greca emerge chiaramente per contrasto con la matematica elaborata in altre civiltà.

Se facciamo astrazione dalla figura dell'uomo Pitagora, identificandolo nella scuola da lui fondata, è generalmente ritenuto certo che influenzò profondamente il successivo pensiero greco, e che elevò il 'numero' a principio del mondo sensibile e del mondo superiore, divino. "I cosiddetti pitagorici – scriveva Aristotele nella *Metafisica* – furono condotti dai loro studi ad assumere come principi di ogni cosa quelli di cui fanno uso le matematiche. E poiché i primi che qui si incontrano sono, per natura, i numeri, sembrò loro di ravvisare in questi molte più analogie con ciò che esiste e avviene nel mondo, di quante se ne possono trovare nel fuoco, nella terra e nell'acqua… Avendo poi riconosciuto che le proprietà e le relazioni delle armonie musicali corrispondono a rapporti numerici, e che in altri fenomeni naturali si riscontrano analoghe corrispondenze coi numeri, furono tanto più indotti ad ammettere che i numeri siano gli elementi di tutte le cose esistenti e che tutto il cielo sia proporzione e armonia" [GIACARDI-ROERO].

Questo brano chiarisce alcuni punti: i 'cosiddetti pitagorici' sono citati in tal modo forse per indicare che non si aveva diretta conoscenza delle dottrine della scuola di Crotone e di quanti sopravvissero al disastro. Ma dopo le rivoluzioni antipitagoriche nell'Italia meridionale intorno alla metà del V sec., che li dispersero definitivamente, bisognava riferirsi alle idee di quanti dicevano di ispirarsi all'insegnamento del Maestro; e seguendo Diogene L. si sarebbe trattato di Filolao e dei suoi discepoli ed epigoni. Forse Aristotele li considerava soprattutto alla luce della loro opinione sul numero, tralasciando altri aspetti del pensiero attribuito a Pitagora non direttamente collegati a questo tema. Insomma Aristotele tende ad avvicinare i pitagorici alla tradizione dei fisici in quanto come questi cercavano un principio primo non materiale ma in un certo senso muovendosi alla realizzazione dello stesso scopo. Un altro punto è la predominanza del numero sulla figura. È una scelta naturale, se si cerca un intelligibile che non sia prodotto dell'immaginazione, ma che preceda ogni forma. Se certe figure geometriche si possono riconoscere in natura, e quindi sono per così dire in sospeso tra immaginario e reale, il numero non appare mai come una forma, sembra anteriore alla stessa immaginazione. Non è deducibile dall'osservazione di oggetti materiali, appare come un principio universale, un principio regolatore sovrasensibile. Questa idea emerse nella Grecia, ma non dimentichiamo che a Pitagora furono attribuiti viaggi in Egitto e che vi avrebbe incontrato sacerdoti. Vi è un'altra strada; i Greci presero dai Fenici l'alfabeto e anche i simboli dei numeri, che sono lettere dell'alfabeto greco. Ora, in più di una cultura antica le lettere in quanto tali, non solo le parole e le frasi di senso compiuto, hanno un significato di per sé; è il caso degli Ebrei. Nelle lettere era il principio del progetto divino del mondo secondo i rabbini. L'idea che il principio di tutto sia nel numero non sembra distinguersi dall'idea che sia nelle lettere, ma per ragioni cronologiche sembrerebbe piuttosto che i saggi giudei abbiano tratto ispirazione dai pitagorici e dai loro epigoni neoplatonici ecc. È impossibile provare se le idee attribuite a Pitagora avessero origine nell'Oriente, ma l'importanza, anzi il carattere simbolico del numero presso le culture antiche con le quali i Greci giunsero a contatto ne fanno una congettura assai plausibile. Sono stati attribuiti ai pitagorici i seguenti contributi:

- I *numeri figurati*: triangolari, quadrati, pentagonali… i numeri sono classificati come lineari, piani e solidi. Il primo gruppo contiene alcuni numeri primi: 2, 7 ... che non sono piani, cioè raffigurabili come insiemi di punti regolarmente disposti in poligoni. Sono numeri 'solidi' quelli che riempiono un poliedro; p. es. 8 , 27 … sono 'cubi'. Tutti i numeri che hanno la forma dello stesso poligono regolare costituiscono successioni di infiniti termini e si 'costruiscono' ricorsivamente sommando a un termine generico della stessa classe il termine corrispondente di una definita progressione aritmetica associata, ogni termine della quale può essere calcolato in funzione di un numero naturale.

I pitagorici idearono un semplice metodo grafico che permetteva di costruirli come insiemi discreti di punti, in modo che il numero rappresentato coincida con il numero dei punti che opportunamente disposti formano un poligono. I numeri triangolari corrispondono a triangoli disegnati con passaggi successivi a partire da tre punti equidistanti; sotto uno dei lati si aggiungono tre punti allineati, poi quattro, e così via allargando il triangolo mantenendo la stessa forma che in tal modo, dopo n passi, sarà costituito da $3 + 4 + \dots\ n$ punti. Partendo da un quadrato con due punti per lato, in modo che ogni vertice sia un punto in comune con i lati adiacenti, si ottiene il quadrato successivo aggiungendo ad ogni passo 5, poi 7 ecc. punti a due lati contigui. I punti aggiunti compongono lo ‘gnomone’, figura importante per i pitagorici, costituito da un numero dispari di punti.



Il poligono con un numero maggiore di lati si forma aggiungendo punti, esternamente ai lati già tracciati, in modo da avvolgerlo in un nuovo perimetro i cui lati hanno ciascuno un punto in più rispetto al lato del poligono precedente e sempre in modo che ogni punto al vertice sia comune a due lati adiacenti in modo da replicare la stessa forma. In tal modo si affianca esternamente un lato a tutti i lati già disegnati meno due; la regola vale anche per i numeri triangolari e i quadrati. Allora i numeri poligonali coincidono con il numero dei punti che compongono la figura. Nel caso del triangolo, si aggiunge un lato alla base di m punti ottenendo un triangolo con base di $m + 1$ punti, per cui ad ogni passo della costruzione il numero dei punti aumenta di $m + 1$, a partire da $m = 3$. Nel caso del quadrato, con lato di m punti, si aggiungono due lati con un punto in comune ad angolo retto, ciascuno di $m + 1$ punti, ma togliendo il vertice in comune aggiungiamo solo $2m + 1$ punti. Partendo dal quadrato di 4 punti (due per lato con i vertici in comune), si aggiungono altri 5 punti e si ottiene 9 , ecc. Per il pentagono, si aggiungono di volta in volta $3(m + 1) – 2$ (si tolgono i vertici) cioè $3m + 1$ punti, per cui al poligono con 5 punti e due per lato aggiungiamo al secondo passo 7 punti, ecc.

numeri pentagonali ed esagonali

Questo metodo sembra infantile, ed è probabile che rispondesse ad un'esigenza di collegare strettamente la forma al punto. In realtà si presta a sviluppi aritmetici interessanti.

La seguente tabella chiarisce questo carattere dei numeri poligonali:

3	6	10	15
4	9	16	25
5	12	22	35
6	15	28	45

Dalla tabella che riporta le differenze tra due numeri consecutivi in ogni riga

3	4	5
5	7	9
7	10	13
9	13	17

possiamo riconoscere quattro progressioni aritmetiche, di ragioni rispettivamente 1 , 2 , 3 , 4 , che rappresentano gli incrementi del numero dei punti ad ogni passo per i numeri triangolari, quadrati, pentagonali ed esagonali. Il termine generico di una successione di numeri poligonali è dato dalla somma del precedente e del termine della progressione ad esso associata che ha lo stesso numero d'ordine del precedente; p. es. nella serie dei triangolari, il primo termine è 3, il secondo è la somma di 3 e del primo termine della progressione aritmetica corrispondente (la prima riga) che è ancora 3, il decimo è la somma del nono numero triangolare e del nono termine della progressione della prima riga (66 = 55 + 11).

I termini della prima riga sono la progressione aritmetica $n + 2$, ma se n è l'indice del termine generico della successione dei poligonali, dobbiamo in tutte le progressioni aritmetiche sostituire $n - 1$ a n ottenendo per i numeri triangolari ($n = 1$ corrisponde a 3, $n = 0$ a 1)

$$T_n = T_{n-1} + n + 1$$

Per i numeri quadrati Q_n la progressione associata assume la forma $2n + 3$, ma sostituendo $n - 1$ a n scriviamo

$$Q_n = Q_{n-1} + 2n + 1$$

Abbiamo poi per i numeri pentagonali

$$P_n = P_{n-1} + 3n + 1$$

Per i numeri esagonali, la progressione aritmetica sarà $4n + 1$; in generale, per i numeri poligonali di k lati, la ragione della progressione aritmetica associata sarà $(k - 2)\, n + 1$. Se inizializziamo le successioni dei numeri poligonali $N\,(k, n)$ associati a 3, 4, 5… k... (triangolari, ecc.) di indice n in modo che per ogni k $N\,(k, 0) = 1$, otteniamo una formula generale a partire dalle progressioni aritmetiche di ragione $(k - 2)\, n + 1$:

$$N\,(k, n) = N\,(k, n - 1) + (k - 2)\, n + 1$$

È facile calcolare direttamente in funzione di n i numeri poligonali, se consideriamo 1 come termine iniziale per tutti con indice $n = 0$.

Per es., per l' n – esimo numero quadrato della successione (1, 4, 9 …) abbiamo

$$Q_n = Q_{n-1} + 2n + 1 \ \text{ e } \ Q_0 = 1;$$

infatti sommando tutti i termini della corrispondente progressione aritmetica da 1 a n (1, 3, 5, 7… n ...) otteniamo

$$\sum_{m=0}^{n} (2m+1) = \sum_{m=1}^{n} (2m-1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

Per i numeri triangolari, si ottiene la ben nota formula che calcola la somma dei primi n naturali, $\frac{n(n+1)}{2}$ già impiegata nel calcolo precedente.

I numeri pentagonali son dati da

$$P_n = P_{n-1} + 3n - 2$$

che conduce a

$$P_n = 3\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Tra i numeri ‘piani’ si era dato rilievo ai numeri ‘oblunghi’, dati dai prodotti di numeri consecutivi $n\,(n + 1)$, che costituiscono la successione dei numeri pari.

Considerazioni sugli argomenti trattati - Non è – credo – possibile ricostruire con precisione i metodi dei pitagorici della scuola di Crotone, in particolare per quanto riguarda le regole generali qui esposte. Forse, l'intento originale era solo quello di unire figura e quantità attraverso il numero, ma è chiaro che l'indagine sulle proprietà dei numeri doveva portare a regole aritmetiche. Non sappiamo quale funzione avessero queste costruzioni: potrebbero essere indizi di una matematica 'bambina', con la quale si cercava di ottenere la giustificazione di relazioni numeriche note, ma delle quali non si conosceva la dimostrazione, o un modo nuovo e originale di unire numero e figura ispirato all'idea che tutto sia numero, o esercizi ed esempi per studenti, o soltanto ciò che la scuola pitagorica aveva lasciato conoscere ai non iniziati ecc.

La costruzione della successione dei quadrati implicava l'aggiunta di due lati ad angolo retto, che ricordava la forma dello *gnomone*, e dato che questa figura incrementava il quadrato di un numero dispari di punti, questo termine finì per indicare i numeri dispari. In origine, lo 'gnomone' indicava l'orologio solare babilonese. Potremmo congetturare che almeno la costruzione dei quadrati rifletta influssi babilonesi, e che l'idea stessa della figura numerata, come composta di unità minime e quindi dotata di struttura discreta sia di origine non greca. In effetti, l'idea che ad una quantità data sia associata un numero indefinito di sottomultipli è chiaramente espressa dall'assioma di Archimede (in realtà di Eudosso) per cui, date due grandezze dello stesso genere a e b, esiste sempre un multiplo della minore che supera la maggiore. Anche i paradossi di Zenone implicano la divisibilità indefinita dello spazio; ma si tratta di pensatori posteriori ai primi pitagorici. Il numero secondo i pitagorici sembra quindi legato ad una sorta di concezione atomistica, il che confermerebbe l'affermazione di Aristotele sul 'realismo' della scuola pitagorica [*vedi*], e l'imbarazzo dovuto alla scoperta degli incommensurabili. La stessa affermazione di Filolao, "Tutte le cose che si possono conoscere hanno un numero; infatti non è possibile conoscere o concepire qualunque cosa senza il numero" andrebbe intesa nel senso che ogni cosa è una molteplicità scomponibile in unità discrete. Se questa interpretazione è corretta, l'universalità del numero non avrebbe avuto in origine la valenza metafisica, sopramondana che avrebbe assunto in seguito, forse per l'influenza di Platone, o forse prima ancora di Anassagora, e che sarebbe stata accettata dai 'cosiddetti pitagorici'. In effetti il carattere sovrasensibile della matematica sarebbe conseguito dalla necessità di maggiore astrazione imposta dagli sviluppi del V secolo, a sua volta conseguenza della necessità di approfondire certi problemi, e avrebbe costituito un punto di riferimento per quanti cercavano al di là del mondo sensibile la ragione del suo stesso essere. Tuttavia, questa interpretazione non sembra perfettamente compatibile col carattere esoterico attribuito alla scuola pitagorica: a meno che non vi fossero due livelli, come peraltro la tradizione conferma esplicitamente, uno 'exoterico' destinato ai non iniziati e comunicabile, e uno 'esoterico' propagatosi poi e accolto dai neoplatonici. Nelle antiche scuole filosofiche un pubblico più largo era ammesso a parte dell'insegnamento.

Altri dubbi su questa ricostruzione emergono dalla almeno duplice valenza del numero, come quantità e come rapporto. Le frasi “ci sono due persone” e “un numero doppio di persone” ecc. richiamano il due, ma non esattamente nello stesso senso; non solo, è ancora diverso l’uso ordinale del numero. Se il concetto che ne avevano i pitagorici della scuola di Crotone doveva essere unificante e originario, i tre aspetti dovevano coesistere, per cui il ‘numero’ non nascerebbe dalla scomposizione della figura in unità minime, ma al contrario dal numero hanno origine estensione, quantità, misura (come rapporto ad un campione) e ordine. L’idea atomistica, se pur era presente, era piuttosto una conseguenza della priorità del numero.

Vi è infine una difficoltà grave nell’associare il numero pitagorico alla struttura discreta dello spazio come insieme di indivisibili. I pitagorici non potevano ignorare che tra due numeri razionali vi è sempre un almeno un terzo termine, p. es. la loro media aritmetica. Quindi i numeri razionali non potevano far parte del loro sistema, e infatti il numero pitagorico è il numero naturale. Ma quale sarebbe allora lo ‘status’ dei numeri razionali? Se lo spazio non fosse indefinitamente divisibile, quale sarebbe rispetto a una qualsiasi sua porzione la frazione minima possibile? È evidente che, se una linea ha struttura discreta, essa non può contenere una parte che misuri $\sqrt{2}$, ma anche $\frac{1}{3}$ è un problema. Qualsiasi numero, razionale o irrazionale, che non possa esprimersi come una somma di un numero finito di termini, non avrebbe una corrispondente entità fisica, non esprimerebbe una quantità. Non si potrebbe sviluppare $\frac{1}{3}$ in una serie indefinita di termini se è associato ad una grandezza divisibile come una porzione di spazio. Se veramente il numero secondo i pitagorici aveva un significato come quantità ed estensione, non avrebbero avuto corrispondenza nel mondo materiale tutti i numeri con infinite cifre decimali, periodici e non periodici. Si può obiettare che per evitare il presentarsi di questo problema sarebbe sufficiente non esprimere certe frazioni in forma decimale, ma una frazione è uguale al suo sviluppo in cifre decimali. Se esiste la terza parte di un intero, e non esistono le infinite frazioni la cui somma è uguale a quella terza parte, le identità aritmetiche perdono di significato, non corrispondendo esse stesse ad alcunché di reale; si ridurrebbero a pure uguaglianze simboliche, e tutto il sistema dei numeri razionali si ridurrebbe a un calcolo puramente formale. È difficile conciliare l'idea che i numeri naturali siano 'concreti' e i quozienti esatti della divisione tra interi siano astratti. Si sarebbe dovuto classificare i numeri razionali in due categorie, quelli con un numero finito di cifre, e quelli con un numero infinito. Non risulta che tale demarcazione fosse mai stata proposta; non si era presentato nessun problema al riguardo, e nessuno se l'è posto tra gli studiosi moderni. Ma allora, il numero non poteva essere direttamente connesso alla struttura discreta dello spazio, e i numeri figurati non erano ad essa connessi. Il numero pitagorico doveva essere immateriale sin dall'inizio, e non era il 'principio di tutto' nel senso che in qualche modo ogni cosa fosse fatta di numeri. Questi erano il fondamento di rapporti e proporzioni, entità solo intelligibili anche se riconoscibili negli oggetti e nei fenomeni del mondo sensibile. Se Aristotele aveva – come sembra – visto nel numero pitagorico la causa *materiale* del mondo sensibile, allora doveva essere incorso in un fraintendimento; strano però, dato che aveva informazioni sui pitagorici molto più precise di tutti gli studiosi posteriori. Forse, i pitagorici non avevano un solo punto di vista al riguardo; ma l'idea del numero triangolare, quadrato ecc. associa il numero intero ad una *forma* prima ancora che ad una quantità. Allora, la questione della divisibilità dello spazio non si sarebbe nemmeno posta, e questa mi sembra l'interpretazione più probabile. Dalla forma geometrica, da cui ha origine tutta la varietà delle figure, si sarebbe passati ad una idea ancora più generale e astratta, di 'forma' come 'armonia', che tiene insieme l'universo intero, o all'opposto la relazione tra numero e figura sarebbe stata intesa come un'immagine dell'armonia universale.

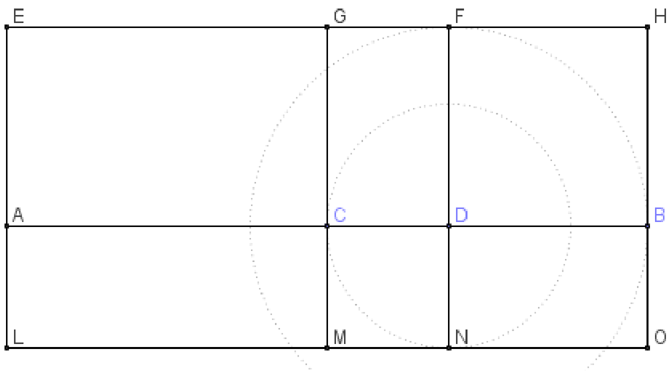
La ricostruzione più probabile in quanto più ovvia che rispetti il giudizio di Aristotele e non contraddica altre fonti a nostra disposizione come Diogene L. e lo stesso Proclo è che l'osservazione di molti fenomeni e oggetti materiali abbia suggerito l'idea, e che questa sia stata assunta a principio primo non fisico di per sé, pur essendo esteso universalmente all'universo fisico, senza procedere oltre; in questo senso si può parlare di una sorta di 'realismo', basato però sull'intelligibilità del reale.

- *Quadrati e terne pitagoriche*. È facile ottenere per via grafica un risultato fondamentale, per il quale *ogni quadrato è la somma di due triangolari consecutivi.* Si prenda la tavola pitagorica; vi sono 10 numeri su ogni diagonale. Si contino i termini sopra e sotto la diagonale discendente da 1 a 100; sono la metà della differenza fra 100 e 10, cioè 45. Si aggiungano i dieci termini della diagonale a uno dei triangoli da questa separati, e si trova 55. I due numeri 45 e 55 sono evidentemente triangolari consecutivi. Più in generale, nel quadrato di lato n ed estensione n^2 aggiungiamo gli n punti della diagonale a uno dei due triangoli separati da questa, e otteniamo un triangolo con estensione $\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}$, successore del triangolo minore $\frac{n^2-n}{2}$. La tabella seguente esemplifica quanto detto per alcuni quadrati successivi a partire da 9:

$\frac{n^2-n}{2}$	$\frac{n^2+n}{2}$	n^2
3	6	9
6	10	16
10	15	25
15	21	36
21	28	49

- *Applicazione delle aree.* Eudemo (*vedi*) attribuiva le scoperte in proposito alla “musa pitagorica” intendendo con ciò la scuola dei pitagorici. L’argomento è di grande interesse, sia perché sarebbe una trattazione molto più antica di quella euclidea (Libro II, prop. 5, 6 in particolare), sia perché può essere intesa come una traduzione nel linguaggio della geometria di alcune notevoli equazioni di II grado. Le prime otto proposizioni del II libro di Euclide sono dimostrate indipendentemente dal teorema di Pitagora (HEATH), e sono considerate esempi di ‘algebra geometrica’, una tecnica che consiste nel dimostrare regole algebriche con la sola geometria.

Nella forma trattata da Euclide, la prop. 5 afferma che se un segmento AB è diviso in due parti uguali AC e CB e due disuguali in D, la somma del rettangolo che ha per lati le parti disuguali e del quadrato della parte compresa tra i punti di sezione C e D è equivalente al quadrato della metà [di AB].



Per le ipotesi abbiamo AC = CB, e per costruzione CG = DB, MNDC è un quadrato e LMGE e MOHG sono quadrati congruenti. Inoltre, CDFG e NOBD sono congruenti, e così pure ALMC, MNFG e MOBC. Si tratta di dimostrare che ADFE + CMND = MOHG. La dimostrazione di Euclide è alquanto elaborata; proverò in modo più semplice. Si tolgano ALMC da LMGE e MNFG da MOHG; abbiamo ACGE = NOHF perché differenze di figure rispettivamente congruenti. Sommiamo CDFG a ACGE e a NOHF. Il rettangolo ADFE è quindi equivalente allo gnomone NOHGCD. Sommando a entrambi il quadrato MNDC si ottiene la tesi.

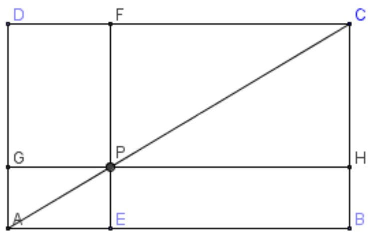
Questo teorema, posto che $a = AC$ e $b = CD$, corrisponde all'identità $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$. Volendo, si può intenderlo in funzione di una equazione nella quale AB = a e l'incognita sia BD. Il rettangolo ADFE è allora dato da $(a - x)\,x$. Se al rettangolo assegniamo un'area A, uguale a quella dello gnomone, abbiamo modo di trovare CD^2 come differenza tra CB^2 $= \frac{a^2}{4}$ e A. Poniamo $A = b^2$. Il problema sarebbe allora enunciato in questo modo: *dato un segmento di lunghezza* a *e un quadrato di lato* b, *trovare un segmento* x *in modo che il rettangolo di dimensioni* $a - x$ e x *sia equivalente al quadrato.* La soluzione si trova risolvendo CD^2 $= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b^2$ geometricamente, costruendo p. es. con il teorema di Pitagora il lato di $\frac{a^2}{4} - b^2$ e sottraendolo da $\frac{a}{2}$. Si tratta di un procedimento estremamente laborioso, di nessuna utilità, se confrontato con i molto più efficaci metodi babilonesi, e non si vede perché sostituire questi con una procedura pressoché inutile. È molto più sensato abbandonare l'idea che le applicazioni delle aree, così come sono descritte da Euclide nel II libro, siano in funzione della soluzione di equazioni di II grado, e non rientrino semplicemente nel gruppo dei teoremi di equivalenza tra figure piane. Se veramente – come Proclo afferma – i pitagorici giunsero agli stessi risultati, allora sarebbe stato lo stesso il loro modo di concepire la geometria. Questa anticipazione al VI sec. a.C. di una tecnica geometrica pienamente definita due secoli dopo, e della relativa *forma mentis*, non convince e sembra troppo dipendente dalle affermazioni di Proclo e dall'interpretazione di Neugebauer, che vedeva nella soluzione delle equazioni di secondo grado il *trait d'union* tra matematica babilonese e matematica greca. Non ha nulla a che vedere con quel poco che sappiamo della matematica della scuola di Crotone, che non raggiunge quel livello di abilità, o della relativa filosofia, e più che una riformulazione dell'algebra nelle forme della geometria, sembra rientrare in un programma di eliminazione della stessa dalle corrette procedure geometriche. O, forse, semplicemente è il segno che il calcolo algebrico e problemi relativi non erano tenuti in alcuna considerazione, sia che i pitagorici li conoscessero, sia che li ignorassero affatto; soprattutto, è in evidente contrasto con l'idea della priorità assoluta del numero. La manipolazione della figura implica attenzione verso tutte le sue proprietà utilizzabili, e non soprattutto verso l'aspetto quantitativo, che la lega direttamente al numero. Tutto lo sviluppo della geometria che ignora intenzionalmente il numero sembra affatto antitetico alla concezione originaria attribuita dalla tradizione a Pitagora; a meno che, e di nuovo non possiamo dare una risposta, il concetto del numero come fondamento di ogni cosa non fosse un principio di Filolao, non di tutta la scuola, contrapposto agli altri principi via via elaborati dalla scuola italica. Lo ritroviamo però anche nel Timeo Locrio che Platone fa parlare nell'omonimo dialogo, e – sembra, ma meno chiaramente – nei frammenti attribuiti ad Archita. Qualsiasi indagine che riguardi la fondazione della geometria greca e del suo rapporto con l'aritmetica non solo urta contro la mancanza di nozioni essenziali in proposito, ma si perde in un gran numero di presunte ricostruzioni, ipotesi, interpretazioni dove la creatività del commentatore e dello studioso hanno una funzione predominante.

Comunque sia, seguendo Proclo studiosi come *T. L. Heath* hanno confermato che il II Libro accolga risultati conseguiti dai pitagorici, ed è stata trovata una costruzione geometrica 'ragionevole' basata su quanto sopra esposto per risolvere equazioni di II grado; v. *Heath*, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2ª ed. a pag. 384 della ed. 'Dover', I Vol., 1956.

I pitagorici o chi altri avrebbero in tal modo trovato come risolvere un certo tipo di equazione di II grado senza conoscere un procedimento generale che equivalga alla formula risolutiva dell'equazione completa.

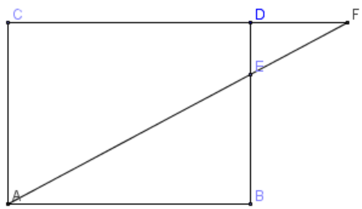
Allo stesso modo si può trattare il problema di trovare il rettangolo di dimensioni $a + x$ e x equivalente a un quadrato di lato assegnato.

Vi è almeno un'alternativa, di tipo sintetico puro, all'impostazione data da Heath, sul lato della geometria euclidea, e da Neugebauer su quello della connessione con la matematica mesopotamica (in particolare, quella del Regno Antico) del problema dell'applicazione delle aree, possibilmente accessibile ai matematici greci anteriori ad Euclide. Esaminiamo l'*applicazione semplice* [REGHINI 1978, 2012], che risolve il problema di "costruire un rettangolo noto un lato ed equivalente ad un rettangolo assegnato"; detti a il lato noto, b e c quelli del rettangolo assegnato e x il lato incognito, corrisponde all'equazione $ax = bc$. In sé è un problema di equivalenza di aree, e soprattutto calcola il quarto proporzionale, vale a dire il termine che completa una proporzione di cui sono dati tre termini; p. es. $x : b = c : a$ ecc.



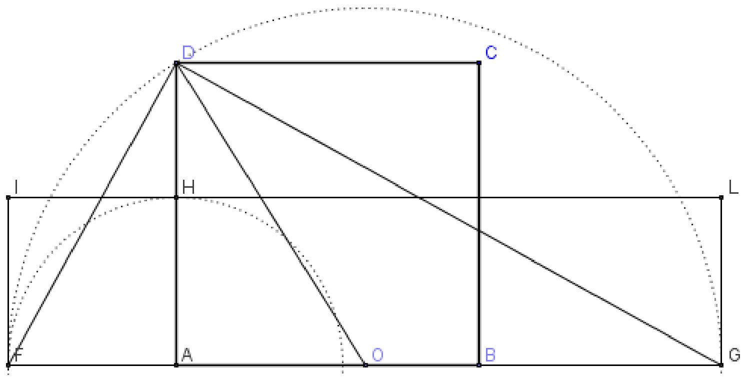
Il rettangolo assegnato è EBCF, b e c sono le misure di EB e BC rispettivamente, o viceversa. Supponiamo che a sia maggiore di b o di c, e sia AB un segmento di lunghezza

a . Tracciamo la parallela a AD e BC , che incrocia in P la diagonale AC , e la parallela a AB per il punto P . La similitudine tra i triangoli CHP e CBA implica che CH : HP = CB : AB $\rightarrow$ $x : b = c : a$ (b e c sono intercambiabili). Questa dimostrazione implica i criteri di similitudine; ma vi si può giungere attraverso somme e differenze di triangoli rettangoli congruenti [REGHINI 1978, p. 62], il che è perfettamente compatibile con una geometria dove la scomposizione della figura è un metodo comune. È chiaro che nel caso in cui a sia minore di b e di c la suddetta dimostrazione non è possibile, ma non è difficile produrne un'altra; il rettangolo ABDC ha lati AB = b e BD = c , e BG = a . Tracciamo la retta AG e la prolunghiamo finché incontra in F il prolungamento di CD :



I triangoli ABG e ACF sono simili, per cui BG : AB = AC : CF $\rightarrow$ $a : b = c : x$. Sembra facile, ma questa seconda costruzione esige la similitudine, e una teoria delle parallele. Se si postula che i pitagorici o comunque i matematici del V sec. a.C. abbiano applicato il metodo euclideo, non si può attribuire loro una dimostrazione siffatta; ma è proprio questo il punto: che nelle costruzioni non si procedesse inizialmente in base ad un completo sistema assiomatizzato, ma accettando come principio guida l'evidenza; in seguito, ad evitare obiezioni e alla ricerca di un criterio di certezza che superasse l'intuizione ingenua, si sarebbe avvertita la necessità di una revisione delle procedure utilizzate nelle costruzioni e della conseguente elaborazione dei principi (postulati) da cui dedurre tutta la geometria per teoremi.

I problemi più importanti sono l'applicazione in difetto (*ellissi*) e in eccesso (*iperbole*). Il Reghini ne dà due dimostrazioni sintetiche, verosimilmente accessibili ai pitagorici. La prima, dato un segmento a e un' area A, costruisce il rettangolo date la sua superficie A e la somma dei suoi lati a. Possiamo identificare A nella superficie di un quadrato di lato b ($2b < a$).

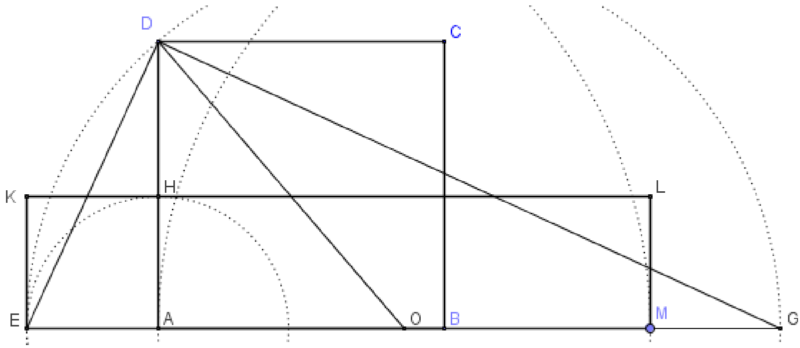


La dimostrazione data dal Reghini si basa sul secondo teorema di Euclide, avendo assunto che i pitagorici avessero già dimostrato il teorema di Pitagora, e su un teorema (dimostrato dal Reghini, che questi pensa fosse noto ai pitagorici) per il quale se sul lato maggiore di un triangolo un punto è equidistante dai tre vertici allora il triangolo è rettangolo. Si costruisce un quadrato ABCD di lato b e sul lato AB si prende un punto O tale che DO sia la metà di a, poi si costruisce il segmento FG di lunghezza a e di centro O. Allora, per il teorema del punto equidistante dai tre vertici, il triangolo FDG è rettangolo con vertice retto in D. Per il secondo di Euclide, il quadrato dell'altezza AD, cioè il quadrato ABCD, è equivalente al rettangolo di lati FA e AG. Stacchiamo su AD il segmento AH = FA; il rettangolo AGLH è la soluzione cercata.

Forse non era necessario introdurre il teorema del punto equidistante, se è vero che si attribuiva a Talete la dimostrazione del teorema per cui un angolo inscritto in un semicerchio è retto, che poteva quindi esser noto anche ai pitagorici della prima ora; per costruzione, F, D, G sono tre punti della stessa semicirconferenza di diametro FG e quindi FDG è un triangolo rettangolo. Evidentemente, Reghini ha pensato ad una dimostrazione affatto indipendente dalla scuola di Mileto.

Il caso più interessante, in quanto conduce direttamente alla costruzione completamente sintetica della sezione aurea, vale a dire che non presuppone la conoscenza del suo valore numerico, e non utilizza in nessun passo la radice quadrata di 5, è l'applicazione in eccesso, l'*iperbole* (come l'*ellissi*, non ha nulla a che vedere con le curve con quei nomi). Allora, il problema è costruire un rettangolo conoscendone la superficie A e la differenza dei lati, a.

La dimostrazione riprende in parte quella precedente.

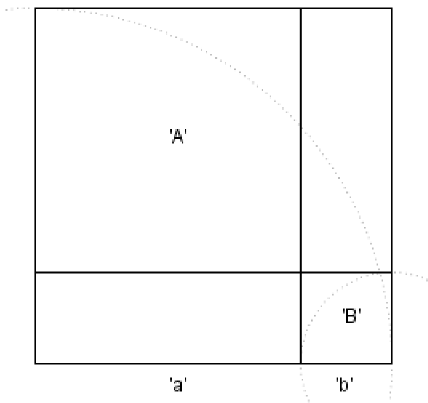


Si prolunga AB dalla parte di B fino al punto M in modo che AM = a . Si unisce poi il punto medio di AM con D , e sulla retta AB si prendono i punti E e G da parti opposte rispetto ad O in modo che OE = OD = OG . Il triangolo EDG è rettangolo in D , per cui il quadrato ABCD è equivalente al rettangolo di lati AH = EA e AG. I segmenti MG e EA sono uguali perché differenze di segmenti uguali, OG = OE e OM = OE , quindi EM = AG. Il rettangolo soluzione quindi è EMLK .

Nel caso in cui $a = b$, l'applicazione per eccesso equivale alla costruzione della sezione aurea, e vien da pensare che lo studio delle applicazioni fosse propedeutico a questo scopo. In realtà i pitagorici risolsero geometricamente i sistemi

$\begin{matrix} x+y=a \\ xy=A \end{matrix}$ e $\begin{matrix} x-y=a \\ xy=A \end{matrix}$. La sezione aurea corrisponde al caso $\begin{matrix} x-y=a \\ xy=a^2 \end{matrix}$ o più semplicemente $\begin{matrix} x-y=1 \\ xy=1 \end{matrix}$.

Ciò che non convince pienamente, nell’idea che i pitagorici o altri intendessero risolvere problemi di algebra attraverso la geometria, è che costoro non conoscevano l’algebra nel modo in cui noi la intendiamo. Se l’avessero conosciuta, sarebbe difficile giustificarne la sostituzione con metodi geometrici. E se impiegarono coscientemente la geometria in sostituzione di un’algebra della quale non abbiamo traccia evidente, allora dimostrarono teoremi di geometria e nient’altro. Si è (correttamente) osservato che molte proposizioni geometriche hanno un corrispettivo in algebra, ma rimane il fatto che i metodi adottati dai Greci erano procedure di scomposizione o ricomposizione di figure, che hanno senso di per sé nell’ambito dello studio delle equivalenze e delle trasformazioni. Per es., consideriamo la regola algebrica del quadrato del binomio, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. L’equivalente dimostrazione geometrica è evidente



L’assenza dell’impiego dell’algebra da parte dei Greci in forma esplicita è piuttosto una forma di arcaismo, frutto della conservazione di un’impostazione fissata sulla figura e non sulle quantità variabili. Non è detto infatti che sia una forma di reazione verso l’uso dei numeri per esprimere grandezze dovuta p. es. alla impossibilità di rappresentare un numero irrazionale in termini finiti, se non attraverso la geometria. Se l’algebra geometrica risale ai pitagorici, la motivazione originaria sta nella associazione tra operazioni sulle grandezze o quantità ed estensione, evidente nei numeri figurati. Numeri quadrati, numeri piani, numeri ‘oblunghi’ sono modi di manifestazione di una identificazione della quantità con l’estensione, in modo che le regole di calcolo sono a loro volta indistinguibili da relazioni tra figure: dice *Teone di Smirne*, un filosofo e matematico intorno al 100 d.C. di tendenze neopitagoriche citato da Heath, che "i numeri piani, i numeri triangolari, quadrati e solidi, e gli altri, non sono così chiamati indipendentemente ma in virtù della loro somiglianza alle aree che misurano; poiché 4, essendo che misura un'area quadrata, è chiamato quadrato per adattamento da essa, e 6 è chiamato oblungo per la stessa ragione."

La stupefacente espansione e perfezionamento della geometria tra i Greci sarebbe quindi stata un potenziamento del calcolo numerico, o meglio del ‘calcolo unificato’ di lontana origine pitagorica, con integrazione degli irrazionali. Le riforme di Eudosso, le soluzioni non canoniche della quadratura del cerchio ecc. e la cosiddetta algebra geometrica non sostituirono o ricoprirono nulla, erano calcoli non in funzione di soli fini pratici.

È ragionevole ipotizzare che questa scelta metodologica riflettesse all'inizio punti di vista comuni a quelle che potremmo definire civiltà dei costruttori, quali erano Fenici, Egizi, popoli mesopotamici, salvo poi allontanarsene sulla strada dell'astrazione. L'architettura, l'agrimensura ecc. connettono così strettamente forma ed estensione con la quantità da indurre a invertire, in un certo senso, il punto di vista attuale, tendenzialmente discriminante, dove la teoria formale e astratta viene appresa in quasi totale separazione dalle sue applicazioni; questa visione delle cose, che presenta la matematica come strumento delle scienze applicate, in realtà nasconde il contrario, l'essere queste il modello di quella. Essa viene incontro alle esigenze della cultura tecnocratica attuale, ma non può essere applicata alla comprensione di antiche culture. La prospettiva secondo la quale gli antichi vedevano le cose era molto più unificante; il 'numero' era nelle cose stesse, nelle realizzazioni dei costruttori, e questo carattere si mantiene anche nella più sofisticata geometria euclidea, che ha un forte carattere costruttivo. La costruzione e qualsiasi attività organizzata vuol dire procedura applicata passo a passo, come in geometria, nel calcolo, nell'organizzazione, secondo quanto sembra che Archita abbia voluto affermare con il concetto di *logistikà*, [*vedi*] tuttora compreso, in ambito molto più ristretto, nell'uso attuale del termine 'logistica'.

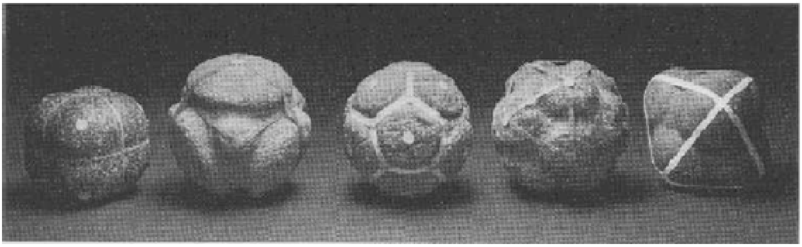
Idee di questo genere possono essere applicate, in una forma che *a posteriori* appare ingenua e primitiva (lo è, se guardiamo ai risultati), all'astronomia, alla cosmogonia. In questa prospettiva ebbero una funzione anche le ‘figure cosmiche’ come Proclo le definiva, cioè i poliedri, la cui scoperta, a quanto sembra affermare, sarebbe merito di Pitagora in persona.

Arturo Reghini, matematico ed esoterista

- *Poliedri regolari.* Su questo punto mi limiterò all'essenziale. Nel primo scolio del libro XIII degli *Elementi* si afferma che "in tutto il libro son descritte le figure dette di Platone, che non sono sue, tre di queste sono figure dei Pitagorici, cioè il cubo, la piramide e il dodecaedro, e poi l'ottaedro e l'icosaedro [sono] di Teeteto." [HEIBERG 1888, HEATH]. Questa testimonianza non permette di capire quali fossero le conoscenze dei pitagorici al riguardo, quali proprietà dei tre poliedri a loro attribuiti fossero a loro note. È pure strano che l'ottaedro non fosse nell'elenco (basta unire due piramidi a base quadrata e aventi per facce triangoli equilateri accostando le basi). Passi che non sapessero dell'icosaedro, anche se basta unire i centri delle facce del dodecaedro per tracciarne gli spigoli; lo stesso vale per il tetraedro, partendo dal cubo. Probabilmente, lo scoliaste intendeva significare che dei cinque poliedri la scuola di Pitagora ne aveva studiati solo tre, non sappiamo fino a che punto e l'analisi completa degli altri due sarebbe stata opera di Teeteto; ma tutto ciò appare vago e poco affidabile.[12]

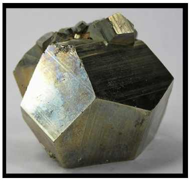
Abbiamo prove che i cinque poliedri regolari erano noti assai prima di Pitagora e Platone, essendo stati trovati in Scozia loro modelli in pietra risalenti a quanto sembra al 2000 a.C [ATIYAH-SUTCLIFFE 2003]. Non si vede perché non dovessero essere noti all'epoca di Pitagora, e anche prima in varie parti del mondo; ai pitagorici sarebbe da ascriversi solo l'inizio del loro studio sistematico tra i Greci.

12 Questo scolio, cioè nota di un commentatore, non compare nemmeno in tutte le edizioni che pur ne riportano altri. Non c'è p.es. in un'edizione pubblicata a Parigi nel 1558.



I modelli in pietra risalenti al Neolitico.
Immagine tratta dall'art. di Atiyah e Stutcliffe: Polyedra and Physics ecc. 2003

La figura più interessante è il dodecaedro. Se ne trovano in natura p. es. sotto forma di cristalli di pirite



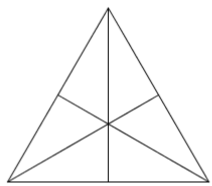
da Dodecahedron - Wikipedia

È quindi assai probabile che la scoperta di questi solidi, o almeno di alcuni, sia avvenuta osservando dei cristalli: "Si è congetturato che cristalli di pirite con la forma di un dodecaedro a facce pentagonali siano stati il modello del quarto solido ideale di Platone. Sono comuni in Sicilia e sarebbero stati noti ai Greci che colonizzavano l'Italia meridionale e quindi forse ai pitagorici…" [STEPHENSON 1993]; tuttavia tutti i poliedri, salvo forse l'icosaedro, sono facilmente costruibili. È notevole il loro significato simbolico – cosmogonico quale è già descritto nel *Timeo*, in particolare per quanto riguarda il dodecaedro, per via delle facce pentagonali e quindi della connessione con la sezione aurea: “Senza dubbio questo [lo scolio sopra riportato e una citazione dalla *Suida*[13]] significa che *Teeteto* fu il primo a scrivere un trattato completo e sistematico su tutti i solidi regolari; non esclude la possibilità che *Ippaso* o altri avessero già scritto sul dodecaedro. Il fatto che Teeteto scrisse sui solidi regolari concorda molto bene con le prove che possediamo dei suoi contributi alla teoria degli irrazionali, il cui legame con l'indagine sui solidi regolari è visibile nel Libro XIII di Euclide.” [HEATH]

Se componiamo le informazioni sopra riportate, le nozioni in possesso dei pitagorici – comprendendo con questo termine anche *Timeo da Locri*, il filosofo e matematico protagonista dell’omonimo dialogo – all’epoca di Platone dovevano essere almeno in parte contenute proprio nel dialogo a lui intitolato. La storicità di Timeo è stata contestata (questo tipo di attività sembra interessare gli studiosi soprattutto da almeno un secolo a questa parte), ma molti personaggi dei dialoghi platonici risultano dotati di realtà storica. Vi sono numerose citazioni di costui; è interessante il luogo di provenienza, non lontano da Crotone, dove Pitagora avrebbe insegnato. Tuttavia Diogene L. a proposito di Filolao riporta una storia, secondo la quale Platone avrebbe scritto il *Timeo* trascrivendolo da un libro acquistato dai parenti dello stesso Filolao; citazione che esprime chiaramente che qualche riserva sullo stesso dialogo platonico circolava già tra gli scrittori precedenti; Diogene stesso non aveva

13 Una sorta di enciclopedia bizantina del X secolo.

inserito Timeo nelle sue *Vite dei filosofi.* Comunque sia, non è messa in discussione la matrice pitagorica del dialogo platonico ed è possibile che questo personaggio esprima nozioni ascrivibili ai pitagorici dell'Italia meridionale in parte risalenti alla stessa scuola di Crotone. Il Timeo di Platone espone la genesi del mondo secondo principi aritmetici, geometrici ed armonici; la traccia pitagorica è evidente quando espone l'armonia cosmica a partire dalle progressioni geometriche aventi ragione 2 e 3, e nel considerare il triangolo rettangolo origine delle figure piane e quindi solide. Questo è di due specie, l'isoscele e lo scaleno, che ha infinite forme; tra queste, la migliore è quella in cui il cateto minore è la metà dell'ipotenusa, in quanto raddoppiandolo otteniamo il triangolo equilatero (il criterio estetico è fondamentale, in quanto espressione della bontà del dio creatore), o piuttosto questo è composto dei sei migliori triangoli rettangoli.



Unendo triangoli equilateri si costruiscono le facce dei poliedri regolari: tetraedro, ottaedro, icosaedro. Il cubo è costruito a partire da facce ottenute unendo triangoli rettangoli isosceli. I quattro solidi corrispondono agli elementi naturali, fuoco, aria, acqua, terra; il quinto, il dodecaedro, sarebbe stato aggiunto per abbellimento. È evidente la forzatura per costringere la molto radicata idea dei quattro elementi nello schema dei cinque poliedri regolari. Nel *Timeo* è chiaro che i poliedri regolari sono quelli e solo quelli, ma non emerge altro sulle loro proprietà geometriche.

Si può interpretare il *Timeo* come il dialogo che accoglie il contrasto cooperativo tra il Limite e l'Illimitato. Il confine definisce l'oggetto, non il contrario; la forma determina il significato della sostanza da essa racchiusa. Deve essere una trasposizione nella filosofia dell'opera dell'artigiano, che realizza oggetti plasmando una materia secondo un disegno definito, dandole funzione e significato.[14] Nel 'Demiurgo' di Platone possiamo riconoscere un artefice, allo stesso modo in cui i massoni fanno riferimento al Creatore come il 'Grande Architetto dell'Universo', salvo che l'Artefice di Platone sembra definire forme. Forse, la materia nel cosmo di Platone è solo effetto della forma, un'apparenza. Il punto o la monade è all'origine del processo che termina nella figura solida attraverso la linea e la superficie.

[14] Forse il padre di Pitagora era un intagliatore di gemme; v. Ferguson, cit.

Altre considerazioni - Tuttavia è lecito avanzare qualche dubbio non tanto sul pitagorismo della dottrina esposta, ma sull'idea che le conoscenze della scuola pitagorica di Crotone fossero così limitate. *In primis*: Pitagora ed altri avrebbero compiuto viaggi in Egitto e altrove. La leggenda afferma che avrebbe avuto accesso alla sapienza sacerdotale, ma anche se così non fosse, altri viaggiatori dovrebbero ben aver visto le piramidi per la loro stessa fama e potrebbero essersi interessati alle loro caratteristiche costruttive. Se la Grande Piramide contiene i rapporti che saranno esposti [vedi], se aveva un significato che non fosse solo quello del sepolcro di un sovrano megalomane, e se gli studiosi d'allora avevano un qualche interesse se non altro per la meraviglia della sua stessa esistenza, dovremmo attenderci che fosse stata oggetto di qualche ricerca, vuoi in base a informazioni ottenibili *in loco*, o in base a riflessioni autonome. Valgono a questo proposito le medesime osservazioni che si possono applicare alla povertà delle tavole babilonesi e ai papiri egizi. Questi documenti sono stati eccessivamente esaltati: non vi si trova altro che calcoli, come se questi non avessero alla base qualche nozione teorica quale formule ecc. Insomma, l'impressione è che manchi qualcosa, la cosa più importante, la teoria matematica. Il *Timeo* racconta una bella genesi cosmogonica, ma la sua geometria solida è quasi inesistente, a parte la nozione che i poliedri regolari sono quelli e solo quelli. Per di più, sappiamo che la scuola pitagorica originaria fu distrutta, e che i suoi membri erano tenuti al segreto. Pare che questo si estendesse anche alle scoperte matematiche, come emergerebbe dalla leggenda su *Ippaso*, cui fu eretto un monumento funebre a significare che per la scuola egli era morto perché aveva rivelato qualche segreto matematico. Sempre per lo stesso motivo sarebbe morto in mare. Molto probabilmente anche i pitagorici dell'epoca di Platone non erano particolarmente ciarlieri. Non solo; lo stesso Platone ammonisce a non diffondere la sapienza, nella quale la matematica doveva essere compresa. "Platone racconta che Dionisio II [tiranno di Siracusa, nel quale aveva confidato per attuare il proprio ideale di governo] aveva preteso di divulgare in un suo scritto la presunta dottrina segreta platonica. Sulla base di questo episodio, Platone contesta in linea generale alla scrittura la possibilità di esprimere un pensiero serio" [COLLI] affermando nella sua settima lettera: "Nessun uomo di senno oserà affidare i suoi pensieri filosofici ai discorsi e per di più a discorsi immobili, com'è il caso di quelli scritti con lettere" e "Perciò appunto ogni persona seria si guarda bene dallo scrivere cose serie per non esporle alla malevolenza e alla incomprensione degli uomini… quando si vedono opere scritte di qualcuno… si deve concludere che queste cose scritte non erano per l'autore la cosa più seria…"

Se questa era la sua opinione, dovremmo concludere che ciò che scrisse non fosse per lui la cosa più seria. Comunque, a parte questa apparente contraddizione, lo stesso Socrate nel *Fedro* afferma l'incapacità della forma scritta nel fissare la ricchezza del pensiero; infatti non scrisse nulla, e così pare abbia fatto Pitagora. Nel caso di quest'ultimo la ragione potrebbe essere semplice, vale a dire si riteneva inopportuno divulgare un sapere che doveva rimanere confinato in una corporazione di esperti, non proprio per i motivi esposti da Platone, ma con gli stessi effetti. Possiamo perciò aspettarci che della scuola di Pitagora, o di altre, come pure di ciò che sapessero i sacerdoti egizi e gli architetti babilonesi, ci sia rimasto assai poco rispetto alle conoscenze acquisite.

Platone, nella ‘Scuola di Atene’ di Raffaello

- *Medie e proporzioni*. Questa parte della (presunta) matematica pitagorica è quella centrale, unitamente al teorema del triangolo rettangolo e alla classificazione dei numeri in pari, ecc. Medie e proporzioni connettono armonia, geometria e aritmetica esaltando il numero come elemento comune e costante. La geometria diventa un insieme di rapporti e di relazioni tra rapporti, procedendo oltre la semplice relazione quantitativa, e combinata con l'armonia diventa il fondamento della concezione armonica del mondo. Il Dio creatore, o piuttosto formatore, è nello stesso tempo architetto e musico. Può essere che la motivazione che condusse Pitagora e seguaci all'indagine matematica sia nata da questa intuizione, verosimilmente di origine egizia e condivisa nell'area geografica che con l'Egitto aveva avuto scambi culturali e commerciali: la Fenicia anzitutto e, forse prima ancora, i Micenei e i Cretesi. La traccia che porta all'Egitto è riconoscibile nell'edificazione delle piramidi e dei templi, e nella funzione che la classe sacerdotale e gli scribi avevano nella società e nella cultura egizie.

È evidente che medie aritmetiche ed armoniche esprimono, prima di ogni altra cosa, rapporti e intervalli armonici. Può essere che l'interesse originario della scuola pitagorica fosse proprio quello, prima dell'utilità che potevano avere in quanto metodi di calcolo. Anche la media geometrica può interessare l'acustica, dato che risolve la proporzione $a : x = x : b$; infatti, date le frequenze di oscillazione a e b, permette di determinare la frequenza intermedia x il cui rapporto con la minore è uguale al rapporto della maggiore con la stessa frequenza x.

In particolare, se il rapporto tra le frequenze di vibrazione è 2, avremo $x = \sqrt{2}$. È estremamente probabile che i pitagorici abbiano considerato il problema partendo dall'acustica, e non solo dalla diagonale del quadrato. Anche la divisione del tono in due intervalli uguali implica la stessa difficoltà, dovendo quelli soddisfare l'equazione $x^2 = 9 / 8$ (in acustica, la 'differenza' tra due intervalli è in realtà un rapporto; il tono, cioè la differenza tra una quinta ($\frac{3}{2}$ della fondamentale in una scala ascendente) e una quarta ($\frac{4}{3}$) è $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$).

È bene esaminare alcuni risultati dovuti ai Babilonesi al riguardo, con la riserva che la ricerca dei metodi di calcolo non sembra essere il fine della indagine pitagorica e dei suoi sviluppi. Sappiamo che i calcolatori babilonesi avevano ottenuto un'ottima approssimazione per $\sqrt{2}$; in decimali, 1,414213, che differisce dal valore esatto 1,414213562... per una parte su due milioni. Il *Neugebauer* ha dimostrato che si può arrivare al risultato calcolando la media aritmetica di $1{,}5$ e di $2:1{,}5 = \frac{4}{3}$, il cui risultato è $\frac{17}{12}$ e poi, iterando il procedimento, quella tra $\frac{17}{12}$ e $2 \cdot \frac{12}{17} = \frac{24}{17}$ ecc. fino a pervenire all'approssimazione desiderata; il procedimento, ovviamente, può essere condotto *ad libitum.* La quarta coppia di approssimazioni per difetto ed eccesso ottenute in questo modo coincidono fino alla 10ª cifra decimale. Si perviene allo stesso risultato con lo stesso numero di passaggi calcolando medie armoniche invece delle medie aritmetiche.

La media aritmetica quindi è elemento comune al calcolo geometrico e a quello armonico. A maggior ragione lo è quella 'armonica' o subcontraria di due numeri a e b, che algebricamente è data dal reciproco della media aritmetica dei reciproci; semplificando, $\frac{2ab}{a+b}$. Il termine 'subcontraria' si riferisce alla definizione secondo la quale la media armonica m tra a e b è dato dal reciproco della media aritmetica tra i reciproci dei numeri dati, cioè

$$m = \frac{1}{\frac{(\frac{1}{a})+(\frac{1}{b})}{2}} = \frac{2}{(\frac{1}{a})+(\frac{1}{b})}$$

Una interessante proprietà è che, se n è la media aritmetica dei numeri razionali p e q, il suo reciproco è la media armonica dei reciproci di p e q e viceversa. P. es., 15 è la media aritmetica tra 10 e 20 e $\frac{1}{15}$ è la media armonica tra $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{20}$; infatti, $\frac{1}{15} = \frac{2}{10+20}$; oppure, 12 è la media armonica di 10 e 15, quindi $\frac{1}{12}$ è la media aritmetica di $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{15}$. Altra proprietà interessante è che il prodotto di due numeri a e b è uguale a quello tra le loro medie, aritmetica e armonica.

Può essere definita anche come quel numero la cui differenza dal minore di due numeri, poniamo a, sia uguale alla differenza tra il maggiore b e il numero cercato moltiplicata per il rapporto tra a e b, vale a dire la media armonica di a e b con $a < b$ è data dalla soluzione dell'equazione $x - a = \frac{a}{b}(b - x)$

o dalla proporzione

$(x - a) : a = (b - x) : b$. Sembra che i pitagorici preferissero scriverla come uguaglianza tra un rapporto di differenze e un 'rapporto semplice':

$$(x - a) : (b - x) = a : b$$

Abbiamo una terza media, detta 'geometrica', che è il medio proporzionale tra due numeri dati

$$a : x = x : b \ \rightarrow x = \sqrt{ab}$$

Il significato geometrico è evidente: la media geometrica è il lato del quadrato equivalente a un rettangolo di dimensioni a e b. Si dimostra facilmente (per via algebrica) che la media armonica e quella geometrica di due numeri disuguali sono minori di quella aritmetica, e le tre coincidono se i due numeri sono uguali. Vale la proporzione

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$$

dalla quale si deduce che il prodotto delle medie aritmetica e armonica è uguale al quadrato di quella geometrica; quindi quest'ultima (se a non è uguale a b) è compresa tra quella aritmetica e quella armonica. Abbiamo quindi

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

Sarebbe tuttavia riduttivo dedurre che le tre medie fondamentali siano state introdotte solo per la loro utilità nel calcolo; questa è indubbia per l'aritmetica e la geometrica, un po' meno per l'armonica. Se tutte e tre avevano lo stesso fine, questo deve essere cercato piuttosto nella musica prima ancora che in altri campi, e con finalità non utilitaristiche; almeno, non principalmente. È da notare che la divisione di un intervallo musicale in due parti uguali implica il calcolo di una media geometria generalmente irrazionale, e le medie aritmetica e armonica ne sono in un certo modo l'approssimazione per eccesso e per difetto rispettivamente. In particolare, la divisione dell'intera ottava in due intervalli uguali conduce al calcolo di $\sqrt{2}$ (media geometrica tra 1 e 2), la media aritmetica dà $\frac{3}{2}$ cioè la quinta, quella armonica $\frac{4}{3}$ cioè la quarta.

Il *Timeo* – con tutta la prudenza che si deve usare per un testo del quale non è chiara la provenienza del contenuto, e il cui significato è nella filosofia platonica – indica chiaramente nell'armonia e nella geometria i fondamenti dell'intero cosmo.

È da escludere che le proporzioni siano invenzioni pitagoriche, anche se è possibile che siano state particolare oggetto di studio nella scuola di Pitagora, per la loro rilevanza in architettura e in molti campi, specialmente nella teoria musicale. Soprattutto le conoscenze in questo campo dovevano avere una vasta diffusione ed essere almeno in gran parte patrimonio comune in tutta l'area mediterranea orientale. L'interesse dei pitagorici per l'armonia derivava dall'averne riconosciuto la rilevanza in aritmetica.

I Pitagorici scrivevano tutte le medie come uguaglianze tra rapporti di differenze e rapporti 'semplici'. Le tre medie aritmetica, armonica e geometrica erano le incognite delle seguenti proporzioni o equazioni di primo grado, nell'ordine:

$$(b-x):(x-a) = a:a = b:b$$

$$(b-x):(x-a) = b:a$$

$$(b-x):(x-a) = b:x = x:a$$

Tutte queste proporzioni sono invariate rispetto allo scambio di a con b, ed è indifferente quale dei due sia il maggiore. La terza è l'unica nella quale l'incognita compare in entrambi i membri della proporzione, ed è alquanto artificiosa, in quanto così com'è scritta equivale all'equazione $bx - ab = bx - x^2$.

A queste tre, i pitagorici ne andrebbero aggiunte altre sette[15]:

$$(b-x):(x-a) = a:b \quad [\delta]$$

$$(b-x):(x-a) = a:x \quad [\varepsilon]$$

$$(b-x):(x-a) = x:b \quad [\zeta]$$

---

[15] Le riporto secondo l'elenco e l'ordine forniti dal *Boyer* (1980).

$$(x-a):(b-a) = a:b \quad [\eta]$$

$$(b-x):(b-a) = a:b \quad [\theta]$$

$$(x-a):(b-a) = a:x \quad [\iota]$$

$$(b-x):(b-a) = a:x \quad [\kappa]$$

L'analisi delle medie deve procedere cercando i metodi risolutivi più semplici in ogni caso; si potrà poi classificarle in base ai risultati forniti dall'indagine. I metodi fondamentali sono tre, puramente numerico, geometrico, algebrico. Quest'ultimo è da ritenersi effettivamente applicato solo se i precedenti non conducono alle soluzioni.

Per prima cosa si devono cercare le proporzioni nelle quali l'incognita è soluzione di un'equazione di II grado. Queste possono essere risolte algebricamente, o applicando metodi geometrici più complessi, e vanno cercate tra quelle nelle quali la x appare anche nei 'rapporti semplici', vale a dire **ε ζ ι κ** , escludendo la media geometrica che va trattata a parte, e vanno esaminate a parte. Le altre possono essere risolte numericamente, o geometricamente.

La media aritmetica è calcolabile immediatamente; geometricamente, basta bisecare il segmento somma dei due numeri.

La media armonica – definita secondo la proporzione pitagorica - è calcolabile per via numerica a partire dalla divisione di un intervallo numerico in due parti di cui si conosce il rapporto. Dati a e b con $b > a$, troviamo la media armonica dall'equazione $b\,(x - a) = a\,(b - x)$. Ma, se vogliamo evitare algebra ed equazioni, si può pensare di trovare il punto che divide il segmento $b - a$ in modo che la sua distanza da a e quella da b siano nel rapporto $a : b$; si può fare dividendo $b - a$ in $a + b$ parti uguali e prendendone a ; sommando il risultato ad a , si ottiene la media cercata. In formule, abbiamo $x = a + \frac{a}{a+b}(b - a)$; non se ne trovano neppure tra i Babilonesi o gli Egizi: forse non c'erano proprio, o erano mandate solo a memoria per tenerle segrete. Per calcolare la media armonica di 20 e 30 , che sono nel rapporto 2 : 3, dovremmo dividere la loro differenza $(30 - 20) = 10$ in $(20 + 30) = 50$ parti e prenderne 20 ottenendo $20 \cdot \frac{10}{50} = 4$, che aggiungiamo a 20. La media armonica quindi è 24. Non sappiamo come i pitagorici eseguissero effettivamente i calcoli, ma se si attenevano alla definizione senza eseguire passaggi algebrici a partire da quella il procedimento doveva essere pressappoco questo.

La media geometrica, come dice il nome, va trovata per via sintetica, qualora si vogliano evitare approssimazioni. Il metodo è illustrato da Euclide in VI.13 ; ma non è affatto detto che i primi pitagorici lo conoscessero, né si può escluderlo con certezza, dato che è immediatamente deducibile dalle proprietà dei triangoli rettangoli. Possiamo però supporre che, proprio per questo motivo, fosse noto ai successori, dato anche che può essere utile per trovare alcune altre medie.

La quarta, $(b - x) : (x - a) = a : b$, procede dalla armonica invertendo uno dei due rapporti. Ciò fa supporre che non dovesse risolvere alcun problema specifico, e che fosse stata considerata per esaminarne le varianti. Seguendo lo stesso metodo applicato alla media armonica, per la $\boldsymbol{\delta}$ otteniamo

$$x = a + \frac{b}{a+b}(b-a) = \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

che si può esprimere come la differenza tra la somma di due numeri e la loro media armonica $\boldsymbol{\beta}$; infatti,

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \rightarrow \frac{a^2+b^2}{a+b} = a + b - \boldsymbol{\beta}.$$

Non è necessario il calcolo letterale per giungere a questo risultato; dalla definizione aritmetica si vede subito che $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} = a + b$. Il suo significato geometrico immediato è che la somma di due quadrati è equivalente al rettangolo avente per dimensioni la somma dei lati dei due quadrati e la loro media $\boldsymbol{\delta}$. Potrebbe denotare un calcolo che conduce ad una uguaglianza geometrica, come potrebbe essere al contrario una uguaglianza geometrica tradotta in un calcolo; la testimonianza di Proclo potrebbe essere decisiva, se per 'dottrina delle proporzioni' intendeva una sistemazione del calcolo aritmetico autonoma rispetto a dimostrazioni geometriche, che in questo caso, e negli altri che seguono, potrebbero essere laboriose; teniamo però presente che, indicando con $\boldsymbol{\gamma}$ la media geometrica, la somma di due quadrati si può scrivere come

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a+b)^2 - 2\boldsymbol{\gamma}^2$$

Il fatto che Pitagora o qualcun altro abbia elaborato una ‘teoria delle proporzioni’ non ci autorizza a dedurne che queste non derivino da teoremi di geometria basati sul metodo di decomposizione, qual è la regola espressa algebricamente come $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ ed equivalenti. Proprio la stretta correlazione tra algebra elementare e geometria vieta di affermare con certezza la priorità cronologica e logica di un metodo rispetto ad un altro. È però assai verosimile che esempi di questo genere abbiano indotto i pitagorici a studiare le proporzioni in funzione dell’applicazione a questioni geometriche classificandole caso per caso, confortando l’idea che attraverso le proporzioni il ‘numero’ sia fondamentale prima ancora della figura; ma per arrivare a ciò doveva esser stato decisivo lo studio dei rapporti armonici, che hanno una relazione con i numeri più diretta rispetto alle figure.

La quinta proporzione $\boldsymbol{\varepsilon}$ è data da

$$(b - x) : (x - a) = a : x$$

Come nella $\boldsymbol{\gamma}$, dalla quale differisce solo per la sostituzione di b con a, l’incognita appare al secondo membro; il primo è sempre lo stesso rapporto incrementale. Una possibile interpretazione geometrica può essere la soluzione del problema nel quale, dati due segmenti $b > a$, si chiede di costruire il rettangolo di lati $b - a$ e x equivalente alla differenza tra il quadrato di lato x e quello di lato a. Infatti la soluzione si può ricavare dall’equazione $x^2 - a^2 = (b - a)\,x$, ottenuta dalla proporzione $\boldsymbol{\varepsilon}$ uguagliando i prodotti dei medi e degli estremi e riordinandone i termini, con $b > x > a$. Si tratta di un quesito piuttosto complesso e difficilmente attribuibile ai primi pitagorici; in effetti, le proporzioni a costoro ascrivibili sarebbero solo le prime tre, mentre tutte le successive sarebbero state studiate in una fase più avanzata.

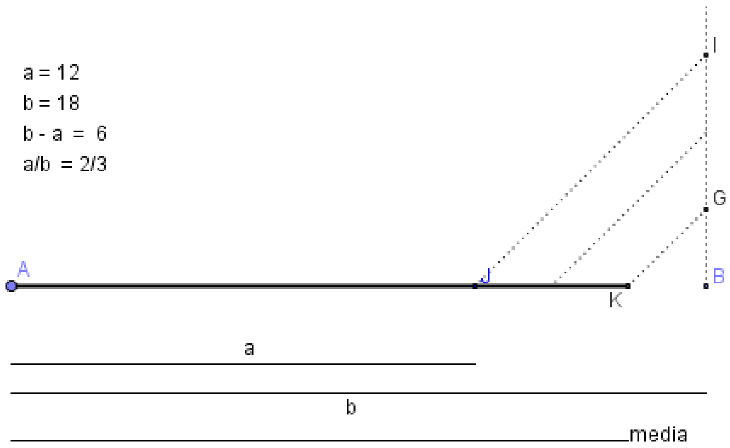
La sesta, ζ, è

$$(b-x):(x-a) = x:b$$

che può convertirsi in $b^2 - x^2 = (b - a)\,x$. La sesta proporzione è formalmente simile alla quinta, con la differenza che $x:b$ sostituisce $a:x$.

La settima, $\boldsymbol{\eta}$, è $(x-a):(b-a) = a:b$, con $b > a$ la cui soluzione è

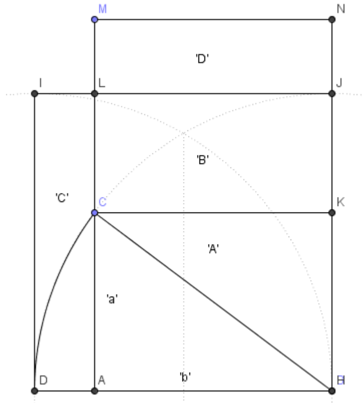
$x = a + \frac{a}{b}(b-a)$. Si può risolvere numericamente e geometricamente; se $a = 12$ e $b = 18$, $\boldsymbol{\eta} = 12 + 4 = 16$. Praticamente, si aggiunge ad a la frazione $\frac{a}{b}$ della differenza tra b e a.



L' ottava proporzione, **θ** , è $(b - x) : (b - a) = a : b$. È una variante della precedente, con $b > x > a$, risolta da

$$x = b - \frac{a}{b}(b-a) \text{ o anche } x = \frac{a^2+b^2-ab}{b} ;$$

può essere interpretata come trovare l'altezza del rettangolo di base $b > a$ equivalente alla differenza tra il quadrato della diagonale di un rettangolo di lati a e b e questo stesso rettangolo; in realtà non è un problema difficilissimo:



$x = KN$

La differenza tra il quadrato BJID e il rettangolo ABKC di area *ab* è la somma dei due rettangoli ‘B’ e ‘C’. Si costruisce sul segmento LJ il rettangolo ‘D’ equivalente a ‘C’ , in modo che il rettangolo somma di ‘B’ e ‘D’ sia equivalente alla differenza cercata. Dato che la sua base misura *b,* la sua altezza KN è la soluzione.

Le due ultime proporzioni, **ι** e **κ**, cioè

$$(x-a):(b-a) \;=\; a:x \quad \text{e} \quad (b-x):(b-a) \;=\; a:x$$

conducono a equazioni di II grado. La seconda ha due soluzioni, a e $b-a$; ovviamente si considera solo la seconda. Non è necessario impostare l’equazione risolvente, perché la soluzione algebrica $x = a$ è immediata, e permutando gli estremi si trova che sia a sia $b-a$ sono soluzioni.

In sintesi, solo sei medie – quella aritmetica, quella armonica, la quarta (**δ**), la settima (**η**), l’ottava (**θ**) e la decima (**κ**) – si possono calcolare aritmeticamente; la media geometrica può essere costruita geometricamente, con la teoria dei triangoli rettangoli.

Il problema sono le restanti tre. Non è chiaro il significato generale di un elenco disomogeneo di dieci medie; la prima impressione è di una ricerca delle variazioni possibili che estendano l'insieme delle prime tre o quattro, una sorta di classificazione fine a se stessa. Le equazioni loro associate sono ($b > a$)

$$x^2 - (b-a)\,x = a^2 \quad (\boldsymbol{\varepsilon})\,;$$
$$x^2 + (b-a)\,x = b^2 \quad (\boldsymbol{\zeta})\,;$$
$$x^2 - ax = a\,(b-a) \quad (\boldsymbol{\iota})\,.$$

La prima e la terza si riconducono alla forma normale $x^2 = px + q$; la seconda a $x^2 + px = q$. In linea di principio si possono risolvere per via geometrica con i metodi esposti da Euclide in II.5,6, cioè per applicazione delle aree, procedura che Proclo afferma risalire agli stessi pitagorici; ma *Pappo* di Alessandria (IV sec. d.C.) ha dimostrato che le medie pitagoriche possono essere calcolate per via aritmetica in determinati casi.

Analisi numerica. - Le sette medie aggiunte sono state elencate (insieme alle prime tre) da *Nicomaco* di Gerasa e da *Pappo*, con qualche differenza, ma furono introdotte prima di loro [HEATH, *A History of Greek Mathematics*, I Vol. pp. 85-89]. Inoltre, se le medie aritmetica e armonica sono chiaramente connesse all'acustica, non sembra si possa dire lo stesso delle altre, in particolare delle tre che conducono a equazioni di II grado.

È estremamente significativo che Pappo risolveva otto delle medie del suo elenco calcolando per ciascuna di esse un insieme di terne di soli numeri interi, contenenti i due estremi a e b e la loro media x, a partire da altri tre termini interi $\alpha\ \beta\ \gamma$ in proporzione geometrica, compreso il caso in cui siano tutti uguali a 1.

P. es., la seconda media della serie di Pappo, ovvero la geometrica, $(b-x):(x-a) = b:x = x:a$, corrisponde a tutte le terne date da $b = \alpha + 2\beta + \gamma$; $a = \alpha$; $x = \beta + \alpha$. Se $\alpha = \beta = \gamma = 1$, abbiamo la terna $b = 4$, $a = 1$, $x = 2 = \sqrt{4 \cdot 1}$. Poniamo $\alpha\ \beta\ \gamma$ rispettivamente uguali a 1, 2, 4; troviamo $b = 9$, $a = 1$, $x = 3 = \sqrt{9 \cdot 1}$; proviamo ancora con 3, 9, 27 ; otteniamo $b = 48$, $a = 3$, $x = 12 = \sqrt{144} = \sqrt{48 \cdot 3}$. Se i pitagorici già prima dell'epoca in cui visse Platone avessero conosciuto questo metodo, avrebbero potuto calcolare una media geometrica senza ricorrere a costruzioni geometriche, almeno nei casi notevoli in cui gli estremi e la media fossero tutti e tre interi, senza dover ricorrere all'estrazione di radice. Ora, ai pitagorici interessavano anzitutto i numeri interi; è lecito chiedersi se e da quale momento fossero a conoscenza del metodo di Pappo, e in tal caso, se a questo fossero pervenuti essi stessi, o se fosse stato loro trasmesso da altra fonte. A parte l'origine, ci possiamo chiedere in qual modo vi fossero arrivati. La via più semplice è osservare che, se la media geometrica è intera, il prodotto ab è un quadrato; assumendo $a = 1$, b deve essere un quadrato. In tal caso troviamo la progressione geometrica 1 n n^2 generalizzabile a 1, $n + 1$, $(n + 1)^2$ per ottenere 1, $n + 1$, $n^2 + 2n + 1$. Ponendo $n^2 = \gamma'$ e $\beta' = n$ otteniamo $b = 1 + 2\beta' + \gamma'$, dove $1, \beta', \gamma'$ sono termini di una progressione geometrica di ragione β' e $x = \beta' + 1$. Se moltiplichiamo tutti i termini per α, otteniamo proprio $b = \alpha + 2\beta + \gamma$ con $\gamma : \beta = \beta : \alpha$, $x = \beta + \alpha$, $a = \alpha$. In tutti i passaggi, possiamo scambiare α e γ, ponendo $n^2 = \alpha'$ e moltiplicando poi per γ. In questo modo si considerano anche i casi in cui il minore degli estremi non è 1, ma p. es. 4, e il massimo p. es. 9. Abbiamo quindi $\alpha = 4$, $9 = 4 + 2\beta + \gamma$, $2\beta + \gamma = 5$; le soluzioni intere sono $\beta = 2$ e $\gamma = 1$, e la media è $\beta + \alpha = 6$. Oppure, $\alpha = 1$, $9 = 1 + 2\beta + \gamma \rightarrow 2\beta + \gamma = 8$, da cui $\beta = 2$, $\gamma = 4$; il risultato non cambia se si scambiano α e γ. È evidente che lo scopo di questo metodo applicato a tutte le medie consente di trovare solo numeri interi per a, b, x. Se però fosse stato noto ai primi pitagorici, sarebbe stato indice di una certa abilità nell'analisi numerica ben superiore a quella rivelata dai numeri figurati.

Permette di ottenere per via puramente aritmetica medie che si calcolano con equazioni di II grado, e soprattutto di stabilire *a* *priori* quali termini estremi ammettano una media che sia intera. Consideriamo la quinta della serie di Pappo, cioè **ε** : $(b-x):(x-a) = a:x$; la soluzione generale proposta dallo stesso Pappo è $b = \alpha + 3\beta + \gamma$; $a = \alpha + \beta$; $x = \alpha + 2\beta + \gamma$. P. es., se poniamo $\alpha = 8$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$, otteniamo $b = 22$, $a = 12$, e $x = 18$. Infatti, $(22-18):6 = 12:18$. Invertendo l'ordine tra α β γ, abbiamo $a = 6$, e $(22-18):12 = 6:18$. Per questa, e per le altre medie che implicano equazioni di II grado, non è quindi necessaria una costruzione geometrica.

A parte il modo e lo scopo di questi procedimenti di analisi numerica, che *Heath* classifica come analisi indeterminata, è evidente la somiglianza con la procedura adottata nel *Timeo* [*vedi*] per costruire una certa serie numerica a partire da due progressioni geometriche, una di ragione due (1, 2, 4, 8), l'altra di ragione tre (1, 3, 9, 27) intercalandola con medie armoniche e aritmetiche. Progressioni geometriche e medie avrebbero avuto una funzione importante già prima di Platone, e questo metodo sembra in relazione stretta con le scale armoniche, il cui studio era nel vicino oriente alquanto progredito, molto prima dei primi pitagorici.

Pappo visse nella tarda antichità, ca. sette secoli dopo Platone. I mezzi di analisi numerica a sua disposizione dovevano essere assai più avanzati di quelli noti ai tempi di Platone, e non vi è ragione di pensare che fossero noti prima del IV sec. a.C.; l'analisi della successione numerica del *Timeo* però suggerisce che l'aritmetica greca del V-IV sec. andasse alquanto oltre i numeri figurati e le tre medie aritmetica, geometrica e armonica.

Anche se le medie introdotte successivamente non sono da ascriversi ai primi pitagorici, sono indicative dell'indifferenza dei matematici greci verso i metodi algebrici (*vedi*). Non è chiaro se fosse una cosciente ripulsa, o se non ne fossero affatto a conoscenza. L'algebra babilonese appartiene all'era dell'antico regno, non è chiaro cosa ne fosse rimasto nella tarda antichità; ma è evidente che le tre forme dell'equazione di II grado, che si è preteso essere in relazione con l'applicazione delle aree, possono essere risolte nell'insieme dei numeri naturali proprio con il metodo indicato da Pappo. Ci troviamo però di fronte a una formulazione che non è quella algebrica, nel senso che oggi attribuiamo a questa parola; in questi termini il problema è posto da *noi*, non dai Greci, il linguaggio matematico da loro impiegato è ancora quello delle proporzioni, e l'attenzione è rivolta anzitutto ai numeri interi. Sembra che non vi sia modo di riconoscere chiaramente l'algebra nelle procedure dei Greci; è sempre necessario tradurre nel suo formalismo qualcosa d'altro, geometria o proporzioni.

Metodi algebrici. - A mio avviso, nulla dimostra che i matematici greci impiegassero metodi definiti 'algebrici' nel senso che utilizzassero formule contenenti indeterminate, o analoghi a quelli documentati nelle tavolette babilonesi. Le regole di algebra elementarissima come quella del quadrato del binomio hanno un'interpretazione geometrica immediata (*vedi*) e non vi è ragione di negare che sia i Greci sia i Babilonesi vi fossero giunti direttamente proprio per quella via. L'espressione $x^2 \pm ax$ equivale a $(x \pm \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$. Se abbiamo dimostrato geometricamente che $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$, non dobbiamo percorrere molta strada per comprendere che $(x \pm \frac{a}{2})^2 = x^2 \pm ax + \frac{a^2}{4}$ ecc; più che di algebra, si tratta di combinare un po' di geometria e un po' di aritmetica. La formula $x^2 \pm (b - a)\, x$ può essere resa come 'differenza tra il quadrato della somma / differenza di x e della metà di $a - b$ e il quadrato della metà di a'. Quindi l'equazione $x^2 - (b - a)\, x = a^2$ [risolvente la quinta proporzione] viene ricondotta a

$$\left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

ecc., facilmente risolvibile (a parte l'estrazione di radice quadrata) numericamente, ma anche geometricamente col teorema di Pitagora, sia pure in modo molto più complicato. È proprio di questa complicazione che non vi sarebbe bisogno, a meno che non si vogliano introdurre gli irrazionali; solo per via geometrica infatti possiamo evitarne l'impiego esplicito come grandezze che possono essere solo approssimate.

Che i matematici greci, pitagorici o meno, abbiano applicato metodi come quello testé ipotizzato, non è provato; non è nemmeno molto verosimile, a meno che non si trovasse in qualche opera perduta, ma in ciò che ci è pervenuto non vi è nessuna citazione in proposito. A mio avviso, è fuori questione che i pitagorici di qualsiasi epoca non impiegarono metodi equivalenti alla soluzione di equazioni di II grado: erano interessati ai numeri interi, e abbiamo visto che le sette medie introdotte in seguito non venivano trattate con i metodi dei Babilonesi. In quanto ai metodi geometrici, vennero sviluppati senza l'algebra.

Il metodo di applicazione delle aree, così come è descritto da Euclide, è affatto differente dalla traduzione in forma geometrica del metodo di completamento del quadrato visto sopra, e a maggior ragione dai metodi di calcolo babilonesi. L'applicazione delle aree è concepita in modo del tutto indipendente, e non arriva dove arrivavano i Babilonesi, già dall'inizio. A rendere ancora più netta la differenza, concorre proprio la testimonianza di Proclo, che ascrive ai pitagorici l'elaborazione dell'applicazione delle aree, si direbbe nella forma che vi compare negli *Elementi.* Nel suo studio sull'argomento, *Heath* tratta la teoria di Euclide come la premessa per la risoluzione delle equazioni di II grado, ma il collegamento è difficile e assai artificioso, ed è svolto in una lunga nota alla proposizione II.5. Nel testo di Euclide non vi è nessun riferimento esplicito a problemi di secondo grado. Se vi è stata qualche influenza mesopotamica sulla prima fase della geometria greca, questa non comprendeva le modalità che i Greci avrebbero seguito per sviluppare la loro presunta 'algebra geometrica'. Se poi i pitagorici ebbero nozione degli efficienti metodi babilonesi, ammesso (e non concesso) che alla loro epoca fossero gli stessi documentati in tavolette risalenti a un millennio addietro, non si comprende perché avrebbero dovuto convertirli in complicate costruzioni geometriche; e se invece cercavano la perfezione geometrica, non si vede perché avrebbero dovuto interessarsi alle procedure di calcolo babilonesi. D'altronde, il metodo euclideo sembra affatto inutile a qualsiasi applicazione pratica, tutto il contrario della matematica babilonese. È anche difficile attribuire ai pitagorici il metodo di applicazione delle aree così com'è trattato da Euclide, dato che è alternativo ai metodi numerici ritenuti insufficienti specie dopo la scoperta degli irrazionali, mentre la loro matematica privilegiava il numero intero. Anche le medie poi aggiunte alle tre fondamentali sono state trattate da Pappo con metodi numerici.

Infine, *non vi è alcuna necessità di passare attraverso l'applicazione delle aree per risolvere geometricamente problemi di algebra ed equazioni di secondo grado.* La formula risolutiva generale dell'equazione di II grado può facilmente essere tradotta in forma grafica, come banale applicazione del teorema di Pitagora. Si possono trovare riferimenti in proposito anche nei manuali ad uso scolastico. Un metodo generale per risolvere geometricamente l'equazione generale di secondo grado, ottenuto da *J. Steiner*, è riportato dal *Santoboni* (*Elementi di geometria razionale Vol. II* 1972, p. 111-112).

Il teorema di Pitagora e gli incommensurabili saranno esaminati nei prossimi capitoli.

Euclide

È difficile negare che ciò che veramente sappiamo sugli inizi della matematica greca è così scarso, da doversi concludere che gran parte di ciò che è stato scritto in proposito, da antichi e moderni, sia nella maggioranza dei casi frutto di congetture. Le fonti sono tarde, talvolta assai tarde; di scarso valore Erodoto, un narratore; di dubbia utilità Diogene L., se non che prende da molti scrittori più antichi, ma che di solito per ciascuna informazione nomina una fonte soltanto; *Proclo* racconta cose di mille anni prima o quasi, e attraverso opere perdute seppur da altri citate. Non ci è pervenuta l'opera dello storico della matematica *Eudemo*, contemporaneo di Aristotele, se non attraverso citazioni. Si è detto che Talete e Pitagora incontrarono dei sapienti durante i loro viaggi in Egitto e in Oriente, ma non c'è dato di conoscere con certezza quale sapienza vi abbiano scoperta, dato che nel caso di Pitagora né la concezione del numero come principio di ogni cosa, né la metempsicosi, né i risultati conseguiti nello studio dell'armonia, sono chiaramente riconducibili a qualche fonte egiziana o del vicino oriente. In compenso, sarebbe stata appresa la necessità di mantenere il segreto. Non va molto meglio con Talete: le nozioni di geometria di cui cercava la dimostrazione sono così intuitive che non c'era bisogno di apprenderle altrove, e anche la similitudine, che secondo la leggenda avrebbe impiegato per misurare l'altezza della Grande Piramide, non ha nulla di particolarmente misterioso; inoltre, la relativa leggenda non rappresenta Talete nella veste di chi apprende, ma di chi sa come procedere. Diogene L.

e altri parlano di iniziazioni e misteri, ma non fanno cenno a precisate nozioni matematiche. L'episodio di Talete che misura la Grande Piramide può ben essere un'invenzione dello stesso Talete: era lì da millenni, ed è veramente difficile credere che in tanto tempo nessuno ci fosse arrivato, neppure i sacerdoti. Eppure, Aristotele ci assicura che costoro ne avevano, di tempo, per riflettere. Se le cose stanno così, c'è da chiedersi quale grande scienza fosse in possesso di costoro – nessuna, verrebbe da rispondere, almeno nel campo della geometria, salvo fare misure di terreni per metterci sopra delle tasse. Forse, proprio a quello voleva alludere l'aneddoto: 'non c'è da imparare fuori dalla Grecia', sembra voler significare, almeno nel campo della geometria; più esattamente, in quello della dimostrazione matematica, del quale era considerato il padre, perché in architettura e ingegneria gli Egizi non erano secondi a nessuno. I Greci, ricchi di iniziativa e curiosi, organizzati in libere comunità, potevano anche ritenersi superiori ai popoli vicini, governati da sovrani capricciosi e da cortigiani servili. Si esaltava il contrasto tra l'ingegno individuale e un sapere immobile, che consisteva di sola memoria. O forse è vero tutto l'opposto: l'aneddoto esprimeva il desiderio di celare esaltando la saggezza dei Greci che in realtà molte cose erano state apprese da fuori e dall'Egitto soprattutto. I due atteggiamenti, benché contrastanti, potevano benissimo coesistere. Inoltre, non è da credere seriamente che si possa attribuire a Talete o a qualcuno in particolare la scoperta della similitudine tra figure: "È sufficiente osservare la sorprendente facilità con cui la più umile e isolata donna indiana analfabeta di oggi [primi decenni del XXI sec.] è in grado di creare disegni geometrici simmetrici altamente complessi con polveri colorate… riferendosi a un piccolo disegno… per domandarsi se fosse proprio necessaria una comprensione della geometria matematica per creare un disegno complesso e per ingrandirlo mantenendo le proporzioni dell'originale." [FERGUSON 2010]. Basterebbe osservare che qualsiasi rappresentazione in scala implica la similitudine per rendersi conto che l'idea di una sua 'scoperta' è semplicemente assurda. Che questa sia stata teorizzata in un secondo momento, e che Euclide la posponga ad altre parti della sua geometria, sta bene; ma altro è la sistematizzazione in uno schema ordinato deduttivamente, altro il momento della scoperta. Lo stesso vale per la musica; le abilità relative non necessitano di una conoscenza matematica precedente. Pitagora, Talete e altri hanno riflettuto su ciò che osservavano nel mondo, e le loro scoperte sono legate a queste riflessioni anzitutto; la 'sapienza' segreta che avrebbero appreso, appunto perché tale, storicamente è solo una congettura, la cui consistenza non possiamo valutare. Detto altrimenti: non importa se i racconti dei viaggi loro attribuiti siano veri, non è in essi l'origine della matematica greca.

A Talete vennero attribuite le dimostrazioni di cinque teoremi [BOYER]:

un angolo inscritto in un semicerchio è un angolo retto;
un cerchio viene bisecato dal suo diametro;
gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali;
le coppie di angoli al vertice formati da due rette che si intersecano sono uguali;

se due triangoli sono tali che due angoli e un lato di uno di essi siano uguali rispettivamente a due angoli e a un lato dell'altro, i triangoli sono congruenti.

Nessun documento antico può esser portato a prova che Talete fosse giunto a questi risultati, afferma il *Boyer*, tuttavia "la tradizione è unanime su questo punto." In realtà, la cosa non è così chiara; di tutti i teoremi di cui sopra, Diogene L. ne cita uno solo, "primo inscrisse in un cerchio il triangolo rettangolo" e sacrificò un bue – "altri ciò raccontano di Pitagora". L'accostamento non è casuale: entrambe le scoperte vertono sul triangolo rettangolo. Questa figura è collegata all'angolo retto, all'architettura, al filo a piombo, alla squadra. Come disegnarla esattamente, era molto verosimilmente un problema la cui risoluzione sarebbe stata utile, e se vogliamo tracciare esattamente un triangolo rettangolo senza una squadra, la cosa più semplice è disegnare una semicirconferenza, prendere su di essa un punto qualsivoglia, e unirlo agli estremi del diametro. Si vede che questa costruzione si collega alla congruenza dei due semicerchi tagliati da un diametro. Inoltre, per dimostrare in senso rigoroso che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali, si può tracciarne l'altezza relativa alla base, e dimostrare – col criterio di congruenza sopra esposto – che sono congruenti i due triangoli rettangoli così ottenuti, da cui discende immediatamente l'uguaglianza degli angoli alla base. I cinque teoremi esposti sono quindi strettamente connessi tra di loro e alle congruenze.

Potremmo tentare di spiegare l'interesse di Talete per il triangolo rettangolo con il tracciamento di un angolo retto. Questa non è un'operazione così semplice come potrebbe sembrare, quando si raggiunge la precisione con cui è stato disegnato il perimetro della base della Grande Piramide, un quadrato quasi perfetto. Forse Talete, o i primi geometri greci, apprese da altri certe tecniche in architettura, agrimensura, forse navigazione, e ricercò i principi concettuali che andassero oltre le nozioni meramente tecniche. Questo sforzo di superamento dell'aspetto tecnico, operativo, per inoltrarsi nell'ambito di una comprensione scientifica dell'universo, non limitata alle attività quotidiane, onnicomprensiva, era caratteristica dei Greci e non derivava da altri, ma aveva origine nello stile di vita di navigatori, mercanti, esploratori e fondatori di città, nonché nell'organizzazione politica in piccole città-stato; in breve, era effetto di uno spirito di iniziativa individuale che non era incentivato dal tipo di governo dei grandi imperi vicini con la loro pletora di funzionari, cortigiani, sacerdoti, corporazioni di vario tipo.

Diogene L. attribuisce anche altro a Talete. "Apprese Geometria dagli Egizii, al riferire di *Pamfila*" (donna dottissima vissuta al tempo di Nerone, citata anche da Gellio); "accrebbe assai le scoperte, che Callimaco… attribuisce al frigio *Euforbo,* cioè i triangoli scaleni e tutto ciò che spetta alla teorica delle linee"; ancora i triangoli. Vi è più di un personaggio di questo nome, e il più illustre era il guerriero troiano di cui si narra nell'Iliade, che non avrebbe nulla in comune con costui, ma in compenso sarebbe stato una delle precedenti incarnazioni di Pitagora. Il nostro – intorno al quale nulla sappiamo, se non la citazione di Diogene L. - venne nominato nella *Cronica de Matematici* dal poeta e matematico *Bernardino Baldi* (1553-1617), che a quanto pare si fidava di Diogene, ripetendone le parole pressoché alla lettera ma tralasciando Callimaco. Non sembra quindi esservi altro a suo riguardo; ma abbiamo già visto che le fonti sono rare, e quanto riferito spessissimo deriva da una sola. Tuttavia, i riferimenti ai triangoli potrebbero indicare qualcosa di più preciso. I pitagorici classificavano i numeri in triangolari, quadrati ecc.; la decade è il terzo numero triangolare (3, 6, 10…); nel *Timeo* Platone spiega come il Demiurgo componga le facce dei solidi geometrici unendo triangoli rettangoli. Ma, a parte significati cosmogonici e simbolici, i triangoli sono i poligoni più semplici, e qualsiasi poligono può essere decomposto in somma di triangoli.

Lo stesso Diogene L. afferma che a Talete furono da alcuni attribuiti due trattati di astronomia sui solstizi e gli equinozi; che fosse il primo ad occuparsi di 'astrologia' e predicesse le eclissi di Sole e i solstizi, secondo quanto avrebbe affermato *Eudemo*; "primo aver egli ritrovato il corso del sole da solstizio a solstizio; e la grandezza del sole dimostrata settecentoventi volte quella lunare… primo ad aver dato il nome di trentesimo all'ultimo del mese;…". Il punto notevole è la misura del diametro del sole. Il metodo che gli altri riferimenti di Diogene L. suggeriscono, e la previsione di eclissi in particolare, è che in una eclisse totale di sole il disco della luna copre esattamente o quasi quello solare. Conoscendo i rapporti tra le rispettive distanze dalla Terra, cioè dal punto di osservazione, è possibile calcolare il rapporto tra i diametri. In realtà, il calcolo dei diametri della luna e del sole e delle rispettive distanze dalla Terra è generalmente attribuito ad *Aristarco di Samo* (ca. 310 – 230 a.C.), i cui risultati erano lontani dai valori corretti.[16] I reperti babilonesi dimostrano conoscenze molto più antiche di quelle dei Greci, ma in questo caso tabelle di terne pitagoriche e simili non sembrano sufficienti; ancora Diogene L. ci viene in soccorso, quando parla di triangoli scaleni e di 'teorica delle linee'. Ora, il triangolo scaleno non sembra una figura attraente, ma è molto interessante per via delle relazioni dei rapporti tra i lati e gli angoli. Se quello cui Diogene allude sono conoscenze di trigonometria, dovremmo dedurre che i Greci ne abbiano accolto dai Frigi quanto bastava per fare calcoli astronomici. Ma Frigi, Babilonesi, Egizi potevano ben avere conoscenze comuni sufficienti per ottenere certi risultati, che forse eran loro già noti da secoli, vista anche la grande importanza attribuita all'astronomia; solo che verosimilmente non venivano divulgate, mentre Talete o altri non si sarebbero fatti problemi nel renderle note. Il risultato di 720, di cui sopra, ammesso che Diogene abbia riportato la cifra ritenuta corretta ai tempi suoi, non è quello vero: oggi sappiamo che il diametro solare è ca. 400 volte quello lunare (e 109 volte quello terrestre) e l'errore è quindi di un fattore quasi uguale a due: ma sarebbe stata comunque una mi-

---

16 v. C.C. Carman e R.P. Buzón, *Aristarchus of Samos : on the Sizes and Distances of the Sun and Moon* 2023. Un brevissimo riassunto è in Wikipedia, *On the Sizes and Distances (Aristarchus).*

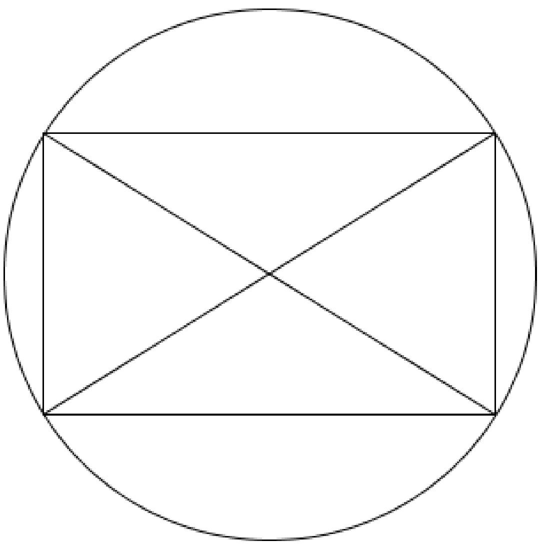
sura notevole. A giudicare dalla storia successiva, i risultati dei Greci sarebbero in larga misura delle riscoperte.

In sintesi: parrebbe, dando fiducia alle affermazioni di Diogene L., che da Talete almeno in poi i Greci avessero nozioni sufficienti di trigonometria e sapessero applicarle all'astronomia. Questo tipo di sapere era meno legato a temi mistici di quello dei pitagorici. Bisogna anche tener presente che Greci, Frigi, Fenici ecc., molto di più dei popoli mesopotamici, erano navigatori – il che implica un po' di astronomia – e quindi sapevano trattare distanze ed angoli. L'arte della navigazione comprende molte conoscenze e abilità, che non venivano messe per iscritto, e che forse erano tenute gelosamente nascoste dagli esperti di navigazione: prima di cercare tra sacerdoti che guardavano le stelle, si dovrebbe considerare il ruolo non certo marginale di marinai e armatori, e le loro relazioni con i mercanti. Sia Talete che Pitagora avevano strette relazioni con il commercio (Mileto e Samo erano città mercantili la cui ricchezza era dovuta ai traffici) ed erano imparentati con genti non greche. Erano quindi in possesso di conoscenze comuni nell'area mediterranea, sulle quali avrebbero potuto riflettere senza l'aiuto di saggi o sacerdoti.

La scienza di Talete, come quella di Pitagora, fu alquanto esagerata dagli storici greci, spesso male informati e propensi a raccontare leggende; quando si cercano riscontri di quello che riferiscono, spesso si è delusi: si considerino le misure della Piramide di Cheope da loro riportate; sono tutte sbagliate, e anche di molto, da Erodoto a Plinio. Eppure, non era molto difficile verificarle: la Piramide è sempre stata dove si trova. Il fatto è che non avevano i mezzi per valutare l'attendibilità delle loro fonti; s'aggiungano gli eventuali errori dei copisti. Il racconto della previsione dell'eclisse di Sole fatta da Talete è un tipico esempio di leggenda creduta per ignoranza: "Il ciclo di circa 19 anni per le eclissi di Luna era ben conosciuto a quel tempo, ma il ciclo per le eclissi di Sole era più difficile da individuare poiché le eclissi erano visibili in luoghi diversi della Terra. La previsione dell'eclissi del 585 a.C. da parte di Talete era probabilmente un'ipotesi basata sulla conoscenza che un'eclissi intorno a quel periodo era possibile. Le affermazioni secondo cui Talete avrebbe utilizzato il saros babilonese, un ciclo della durata di 18 anni, 10 giorni e 8 ore, per prevedere l'eclissi sono state dimostrate da Neugebauer come altamente improbabili, poiché Neugebauer mostra… che il saros era un'invenzione di Halley." [MAC TUTOR, 'Thales of Miletus']. Sentiamo lo stesso Neugebauer: "… non esiste alcun ciclo per le eclissi solari visibili in un dato luogo: tutti i cicli moderni riguardano la Terra nel suo insieme. Non esisteva alcuna teoria babilonese per prevedere un'eclissi solare nel 600 a.C., come si può notare dalla situazione molto insoddisfacente di 400 anni dopo, né i babilonesi svilupparono mai una teoria che tenesse conto dell'influenza della latitudine geografica." [*Ibid.*; la citazione è contenuta in *The Exact Sciences in Antiquity*]. *Non esisteva nessun metodo per prevedere un'eclisse di Sole, e tanto meno sarebbe stato noto ai Babilonesi.*

Per quanto riguarda le ‘dimostrazioni’ attribuite a Talete in geometria: la seconda (un cerchio viene bisecato dal suo diametro) potrebbe essere stata empirica, e pare assai intuitiva; forse, poteva averla dedotta dall’essere in una circonferenza arco, settore circolare e relativo angolo al centro direttamente proporzionali: se due angoli al centro sono uguali, lo sono i rispettivi settori circolari, e quindi se sono angoli piatti opposti, i cui lati coincidano ricoprendo il diametro, saranno uguali i rispettivi settori circolari, cioè i semicerchi. O, forse, assumendo che una corda divida il cerchio in due segmenti circolari, questi debbono essere uguali se la corda è quella massima, cioè il diametro per ragioni di simmetria. Ma teniamo presente che ai tempi di Talete si era lontani dall’ordinamento assiomatico di Euclide, per cui non possiamo sapere quali postulati fossero accettati come tali e cosa si dovesse provare a partire da quelli.

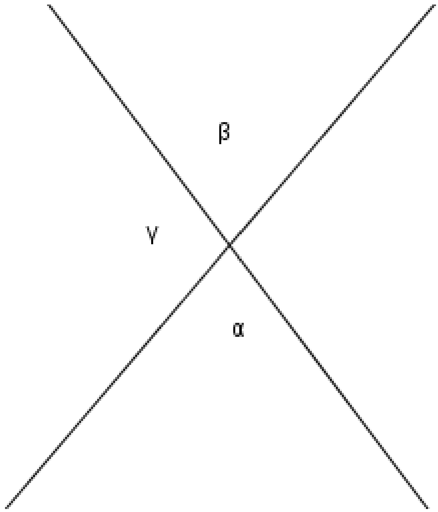
La prima (un angolo inscritto in un semicerchio è un angolo retto) non sembra difficile; questo disegno suggerisce una possibile dimostrazione immediata:



Probabilmente la dimostrazione data da Talete si basava sul quarto e quinto dei teoremi a lui attribuiti, ma come già visto, non sapendo quali fossero i principi accettati, ammesso che ve ne fossero (ma dovevano esserci, come proprietà delle figure facilmente intuibili), non possiamo stabilirne i passi esatti. L'esempio fornito nella seconda parte del *Menone* mostra come Socrate svolgesse la sua dimostrazione senza omettere alcun passo, chiedendo sempre l'assenso dell'interlocutore, e fondandosi sull'evidenza immediata, supponendo sia comune a tutti. È possibile che Talete procedesse allo stesso modo, un passo per volta, come potrebbe essere che fosse comunemente accettato in quanto evidente che un rettangolo sia inscrivibile in un cerchio, e che la tesi conseguisse immediatamente essendo le diagonali due diametri.

Tuttavia, quando i Greci parlavano di dimostrazioni, intendevano procedimenti logici a partire da principi evidenti, che in alcuni casi provano relazioni anch'esse evidenti, ma che vengono derivate da quelli. Gli enunciati del teorema degli angoli opposti e quello degli angoli alla base del triangolo isoscele ne sono gli esempi migliori. Se veramente Talete o chiunque altro del suo tempo sentiva la necessità di cercare una loro dimostrazione non ostante la loro evidenza, avremmo la prova che già nel VII sec. a.C. qualcuno fosse cosciente dell'esistenza di relazioni logiche in geometria e della possibilità di ordinarle deduttivamente. La ricerca dei principi in geometria si affiancava a quella dell' ἀρχή , del principio di tutte le cose, cui Talete era interessato. È quindi verosimile che l'origine della dimostrazione così come la intendevano i matematici greci si trovi in indagini rivolte allo scoprimento dei principi della geometria.

Vediamo il teorema degli angoli opposti al vertice.



Gli angoli α e β sono uguali perché entrambi sono differenza tra l'angolo piatto e γ. Il ragionamento impiega l'assioma per cui differenze di cose uguali sono uguali, cioè il terzo assioma di Euclide (gli αξιώματα non vanno confusi con i postulati; quelli sono 'nozioni comuni', principi di ragionamento, questi sono principi particolari della geometria). Il problema è: quando si afferma che Talete o altri 'dimostra' qualcosa, si intende necessariamente che procedesse come avrebbe proceduto Euclide, o, detto altrimenti, gli scrittori antichi elencando le presunte dimostrazioni attribuite a Talete, intendevano questo termine nello stesso significato di Euclide, o in un senso meno esigente sotto l'aspetto logico? Inoltre, Diogene L. e altri potevano non essere affatto precisi essi stessi nella terminologia impiegata, anzi Diogene non sembra affatto esserlo. Nel caso degli angoli opposti al vertice, non sembra esservi alcuna necessità di una dimostrazione; cosa quindi avrebbe fatto Talete? Avrebbe inteso dimostrare che una evidente proprietà degli angoli deriva dal principio logico per il quale differenze di cose uguali sono uguali? Forse, il nesso così evidenziato tra una proprietà geometrica e le regole logiche comunemente accettate poteva essere significativo, se si cerca di fondare una nuova scienza, o piuttosto di indagare i fondamenti di una già antica. Vi è da chiedersi se nessuno vi abbia pensato prima di Talete, e fuori dalla Grecia, durante tanti secoli. Forse Babilonesi ed Egizi erigevano piramidi e studiavano trigonometria senza porsi troppi problemi.

Anche il teorema degli angoli alla base di un triangolo isoscele è evidente, ed è chiaramente un'applicazione del secondo criterio di congruenza (quello attribuito a Talete) ai triangoli rettangoli. Valgono al riguardo le stesse considerazioni svolte sopra.

Vi è infine un teorema, tradizionalmente detto 'di Talete' non facente parte dell'elenco riportato sopra, e presentato come tale nei manuali scolastici in uso in Italia, per il quale un fascio di rette parallele forma su due trasversali due classi di segmenti direttamente proporzionali. La dimostrazione (di Euclide) richiede il teorema per cui gli angoli formati da una trasversale con due o più parallele ('angoli corrispondenti') sono congruenti, e i criteri di similitudine tra triangoli. Ma una tavoletta babilonese acquistata dal Louvre poco prima del 1934 contiene chiari riferimenti al teorema 'di Talete'[THUREAU-DANGIN 1934]. Vi si risolve per via numerica un problema nel quale un trapezio è tagliato da alcune linee parallele alle basi. Non si danno formule esplicite con indeterminate, ma queste sono implicite nell'impostazione dei calcoli, come per le equazioni di II grado. Le lunghezze di tre delle linee di separazione sono calcolate a partire da alcuni dati applicando il teorema per cui la somma dei rispettivi quadrati delle due basi di un trapezio è uguale al doppio del quadrato della parallela alle basi, che divide questo trapezio in due aree uguali. Si tratta di una proprietà non proprio banale[17], e tutto il procedimento si basa su un'applica-

[17] Si prolunghino i lati obliqui del trapezio fino alla loro intersezione in V. Siano a e c le basi maggiore e minore rispettivamente, e b il segmento che lo divide in due altri trapezi equivalenti di basi b, c e a, b. Dette h_1 e h_2 le loro rispettive altezze, la condizione imposta equivale a

$$h_1(b+c) = h_2(a+b) \quad \text{e quindi} \quad \frac{b+c}{a+b} = \frac{h_2}{h_1}$$

Il rapporto tra le altezze è uguale a quello tra i rispettivi lati obliqui, appartenenti ad uno stesso lato del trapezio dato, ed essendo simili i triangoli di vertice V e basi a e b otteniamo

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{a-b}{b-c} \quad \text{e quindi} \quad \frac{a-b}{b-c} = \frac{b+c}{a+b},$$

dalla quale ricaviamo

zione del teorema di Talete (ogni parallela a uno dei lati di un triangolo divide gli altri due in segmenti proporzionali) e sulla similitudine tra triangoli. Il reperto non contiene alcuna dimostrazione, ma solo i calcoli. Quella però doveva esser stata prodotta, e non sappiamo se fosse geometrica o algebrica, e nel secondo caso come avessero trattato le quantità indeterminate. Si tratta di un esercizio o di un esempio che risolve un problema pratico, dividere un campo a forma di trapezio in due altri anch'essi a forma di trapezio aventi aree uguali.

In sintesi: quel poco che possiamo ricavare dalle notizie su Talete, anche alla luce del ricco materiale emerso dall'esame delle tavolette babilonesi, indica nella trigonometria il ponte tra gli inizi (e non solo) della matematica greca e quella di altri popoli: dell'area siro-fenicia anzitutto, culturalmente connessa agli Egizi, ma anche mesopotamica. Molte sono le possibili applicazioni: architettura, astronomia, navigazione. Che rapporto c'era tra navigazione, che implica orientamento rispetto alle coste e rispetto agli astri, e conoscenze di trigonometria? Doveva essere importante per civiltà marinare come quella greca e fenicia soprattutto. Cosa sapevano Greci e Fenici delle tabelle numeriche babilonesi? Potevano servire, o al contrario ne facevano a meno? Ne avevano per conto loro, che non ci sono pervenute perché redatte su materiale deteriorabile e perché ai geometri greci come Euclide le applicazioni apparivano indegne di uno spirito libero? E poi, l'astronomia – a parte la reda-

---

$$b^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

zione di un calendario e l'impiego nella navigazione – era veramente importante? Sembrerebbero più utili tabelle di conversione tra misure, regole su aree e volumi, loro connessione coi pesi, ecc.

Dalla traduzione del Lechi, 1842

Si è con ragione stupiti, dato il livello raggiunto dai Babilonesi in questo reperto (*vedi*), ma è necessario essere prudenti nelle conclusioni: possiamo anche supporre che il teorema ‘di Talete’ sia stato scoperto molto prima e un bel po’ ad est della Grecia, ma non avremmo certo provato che sia stato importato; è una di quelle nozioni cui si può arrivare anche con l’intuizione. Se Talete o chiunque altro sapeva misurare l’altezza della Piramide, poteva anche arrivare ad enunciare il teorema delle classi di segmenti direttamente proporzionali che da lui prende il nome. Ma il problema non è questo; abbiamo seguito la ricostruzione offerta dal Thureau-Dangin, (*vedi*) che non è l’unica. Abbiamo visto che presuppone una matematica di alto livello. Non sappiamo quando esattamente la tavoletta sia stata redatta; non sarebbe neppure un dato essenziale, perché potrebbe pur essere che vi siano applicate conoscenze ben più antiche ma non documentate. Attenerci strettamente solo a ciò che è ritrovato materialmente non distrugge l’ipotesi di un sapere molto più antico di quello dei Greci del VI sec. a.C., e se così fosse, sarebbe un problema: forse i meravigliosi Greci avrebbero solo scoperto una seconda volta ciò che intanto era andato perduto. Ma intanto non sappiamo con precisione a quale epoca risalga il reperto (classificato AO17264); in generale, “la nostra conoscenza riguardo a data e luogo di provenienza… è così inadeguata che non possiamo attenderci di riordinare il materiale in accordo con tale punto di vista. Ciò che noi possiamo fare è soltanto separare il vasto gruppo di tavole ‘Babilonesi Antiche’

("Old - Babylonian", ca. 1900 – 1600 a.C.) dalle 'Neo-assire'…" ecc.; Neugebauer, *Mathematical Cuneiform Texts*, nell'introd. al cap. III. Il Thureau-Dangin si è limitato a stabilire, in base a considerazioni stilistiche, che è "meno antica delle tavolette matematiche della stessa provenienza"; ma anche questa non è certissima (Warka, anticamente Uruk). Il problema esposto in AO17264 sembra basarsi sulla soluzione di quello proposto in YBC4675, che è trattato dal Neugebauer nel III cap. del testo sopra citato, e che è classificato tra i reperti antichi, ma non tra i più antichi. Le datazioni proposte dal Thureau-Dangin e dal Neugebauer quindi collimano. YBC4675 chiede di dividere un trapezio noti i lati e l'area in due parti uguali, e calcolare le misure della linea di separazione e dei lati delle parti separate. "Sebbene questi problemi siano talvolta accompagnati da disegni… e la terminologia sia geometrica, tutto il trattamento è fortemente algebrico ("strongly algebraic"). La geometria è implicata solo nella misura in cui conduce alle necessarie relazioni tra le quantità date; la soluzione, comunque, procede in maniera puramente algebrica, e in nessun luogo troviamo qualsiasi traccia certa del genere di argomentazione geometrica così a noi familiare dal modo in cui i Greci trattavano questa sorta di problemi." [Ibid.] In realtà, i procedimenti sono puramente l'applicazione di algoritmi e impiegano solo quantità; le formule sono introdotte dal N. per spiegare il senso dei passaggi. L'algebra è introdotta per giustificare le procedure.

Il metodo adottato dal N. (e non solo) è quindi una forma di assiomatizzazione: si risale dai casi particolari a principi più generali, assumendo che quelli fossero applicati a questi ultimi. Ma è assai ragionevole supporre che le cose stessero così; il problema è *come* i Babilonesi, specie del periodo antico, giungessero ai 'principi' primi ovvero alle regole che impiegavano.

Abbiamo visto che la teoria alla base della soluzione del problema proposto in AO17264 sembra non banale. Altre soluzioni (mi sono basato sull'interpretazione del Thureau-Dangin, che corregge il testo, trovando che i dati sono insufficienti) sono state proposte. *M. Caveign* (1985) – che colloca il reperto all'epoca cassita, dal XVI al XII sec. a.C.[18] - ha condotto un'analisi assai dettagliata, applicando lo stesso metodo: giustificare passaggi e numeri ottenuti cercando le formule algebriche di cui potrebbero essere applicazioni. Queste – occorre ricordarlo – non sono esplicitamente enunciate e debbono essere ricostruite a partire dai calcoli. Ma il metodo impiegato dallo scriba per ottenere i numeri del problema consiste nello sceglierli da elenchi opportuni ("La véritable question en effet que pose ce texte est de découvrir comment les Babyloniens ont trouvé les nombres qui entrent dans le problème."). Non c'è nulla di strano; nei problemi di geometria – come quelli tuttora proposti come esercizi o esempi – i dati solitamente non sono forniti a caso, ma in modo da giungere alla soluzione senza perdersi in calcoli troppo difficili, e le soluzioni non devono es-

---

[18] I Cassiti erano un popolo originario dei monti Zagros; alcuni di loro sarebbero immigrati in Babilonia a partire dal XVIII o XVII sec. a.C. e sono menzionati funzionari cassiti prima della grave sconfitta che gli Ittiti inflissero ai Babilonesi, all'inizio del XVI sec. Ne avrebbe approfittato il loro re, Argum II, per assumere il potere.

sere troppo complicate. Nel nostro caso, la formula risolutiva per la lunghezza del segmento che biseca un trapezio di basi a e c:

$$2t^2 = a^2 + c^2$$

può essere espressa come una terna pitagorica

$$t^2 = p^2 + q^2$$

attraverso le sostituzioni $a = p + q$; $c = p - q$.

I Babilonesi avevano costruito tabelle di terne pitagoriche, calcolabili in funzione di un solo parametro naturale n:

$$t = \frac{n^2+1}{2} \quad ; \quad p = \frac{n^2-1}{2} \quad ; \quad q = n$$

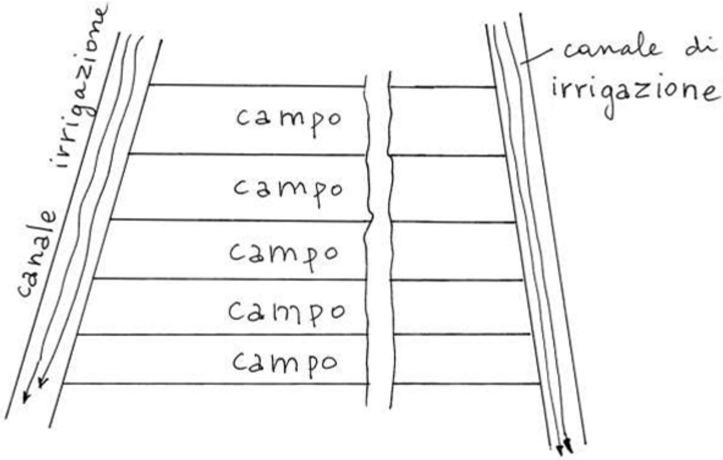
da cui otteniamo

$$a = \frac{n^2+2n-1}{2} \quad \text{e} \quad c = \frac{n^2-2n-1}{2}$$

Quindi avevano a disposizione una successione di trapezi che soddisfacevano le condizioni del problema. Seguono altre congetture sui numeri del problema e le conclusioni.

Una interessante interpretazione di AO17264 è stata proposta da *P. Yuste* 2005. Il problema consisterebbe nel ripartire un campo a forma di trapezio fra tre coppie di fratelli gemelli in modo che i fratelli della stessa età ricevano la stessa quantità di terreno. Il problema, benché in sé teorico, si ispira a questioni di ordine pratico, ed è una complicazione della divisione di un trapezio in parti di uguale estensione. Questo – trattato in YBC

4675 dal Neugebauer – si risolverebbe elementarmente dividendolo mediante il segmento che unisce i punti medi delle basi, ma questo metodo non sarebbe stato sempre applicabile. La cosa appare chiara se si considera come erano ripartiti i terreni tra i Sumeri e presumibilmente anche dopo: “buona parte dei campi avevano una forma molto allungata per poter attingere acqua dai canali di irrigazione. I terreni agricoli avevano forma di un campo lungo perché erano il frutto di una colonizzazione pianificata. Il lato corto confinava con un canale; l’altro lato corto poteva confinare con un altro canale o con un territorio non coltivato (come un bacino, una palude, una zona semi arida). La scelta di questa particolare disposizione dei campi era imposta dalla necessità di irrigarne la maggiore quantità possibile”: [CALZOLANI 2017]. Si noti la somiglianza con la costruzione del teorema di Talete (v. pag. seguente):



I due canali potevano essere costruiti a livelli leggermente differenti: ad esempio, quello di sinistra poteva essere leggermente più elevato di quello di destra e l'acqua scorreva nei campi da sinistra verso destra, per fluire nel canale a destra.

Il disegno rappresenta una situazione quasi identica a quella del nostro problema. "*M. Liverani* ha così descritto i metodi di irrigazione impiegati nella bassa Mesopotamia ai tempi dei Sumeri (da "Uruk la prima città", pp. 20-21): " … del resto la coincidenza delle zone di alluvio irriguo con le sedi delle più antiche civiltà era un fatto già avvertito dagli studiosi del secolo scorso. Ma solo di recente si è messo in evidenza come il momento essenziale in tale processo sia stata la messa a punto del sistema dei campi lunghi, con irrigazione a solco"... " [*Ibid.*].

Il metodo proposto dal Yuste utilizza una serie di manipolazioni geometriche con le quali, applicando la 'formula dell'agrimensore' per il calcolo approssimato dell'area di un quadrilatero (si fa il prodotto delle medie aritmetiche dei lati opposti), si perviene infine con un facile passaggio algebrico alla formula corretta.

Questa soluzione – benché corretta – appare come una serie di aggiustamenti e di modifiche a prima vista arbitrarie, salvo essere giustificati dal risultato; dà cioè l’impressione di derivare dal perfezionamento di un’approssimazione. Si tratterebbe di un metodo che parte da regole ‘pratiche’ senza troppo riguardo per il rigore, anzi nessuno, ma che infine raggiunge lo scopo. Un procedimento del genere, si direbbe per tentativi, si definisce empirico ed euristico, ed è abbastanza frequente nelle fasi in cui un settore della matematica è ancora nella fase iniziale e non è già ben sistematizzato. Tuttavia è razionale, non essendo completamente sperimentale, e – non ostante la complessità e l’apparente artificiosità – sembra più concreto della soluzione, più astratta, proposta dal Caveign, che però in compenso è più logica. Sono indicative in tal senso anche le collezioni di serie numeriche; queste ampliano le regole elementari delle tabelline, e costituivano una base di dati dalla quale ricavare gli esempi, gli esercizi, e definire un ordinamento dell’aritmetica che, pur essendo di tutt’altra natura dalla geometria greca, di fatto sostituisce almeno in parte la dimostrazione con il calcolo.

Quel che non si comprende, nella matematica babilonese, è come ricavassero le formule implicite nei loro calcoli. Questo vale in particolare proprio per il problema della bisezione di un trapezio, dove abbiamo visto che il segmento cercato b è dato in funzione delle basi da

$$b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

La somiglianza con la formula pitagorica è così evidente, da indurre a cercarne la giustificazione in quella direzione. Ma, se ragioniamo in termini euristici e sperimentali, non è affatto detto che i Babilonesi abbiano ragionato come molto tempo dopo avrebbero fatto i Greci, partendo da un insieme ben definito di assiomi e teoremi immediati o quasi. Potrebbero benissimo esservi giunti per tentativi, per ipotesi, verificando di volta in volta se la soluzione provvisoriamente trovata corrispondesse alle misurazioni, o se reggesse alla verifica del calcolo.

Per es., se il trapezio è un rettangolo, la sua bisezione è banalmente ottenuta tracciando le parallele ai lati opposti e da questi equidistanti. Ma, se restringiamo una delle basi, dovremo compensarne la riduzione spostando la linea di separazione parallelamente alle basi, avvicinandola alla base maggiore; possiamo provare con qualche media che non sia quella aritmetica per scoprire che né quella geometrica, né quella armonica ci danno il risultato corretto. Possiamo ammettere che, non ottenendo nulla con medie tra lunghezze, si possa tentare con medie tra aree; si prova a calcolare la media aritmetica dei quadrati delle basi, e si trova che questa è il quadrato della lunghezza cercata.

È più che giusto obiettare che questo modo di procedere non è soddisfacente, se ragioniamo in termini rigorosi ovvero deduttivi, ma si tratta di un modo di procedere perfettamente scientifico. Ma non escluderei che fossero impiegati metodi anche più grossolani, puramente sperimentali giustificato solo dai risultati. Inoltre, gli studiosi della nostra epoca (XX – XXI sec.) tendono a riflettere la propria metodologia nei metodi degli antichi, verosimilmente amplificandone la ‘razionalità’ in senso moderno a scapito di ciò che di intuitivo, congetturale, approssimativo, verificato solo sperimentalmente ecc. poteva esservi.

L'esame dei reperti studiati dal Neugebauer in *Mathematical Cuneiform Texts* (MCT) consente di comprendere alcuni aspetti della matematica babilonese. Il materiale è stato classificato come segue:

Tavole numeriche (cap. II). Contengono elenchi di reciproci, a partire dai reciproci dei naturali espressi in base 60: $\frac{1}{2} = 30$, perché $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{48} = 1{,}15$[19] cioè $1 + \frac{15}{60} = \frac{5}{4}$ perché $\frac{5}{4} : 60 = \frac{1}{48}$, ecc. si noti che il reciproco di q è calcolato come $\frac{60}{q}$

È interessante notare che negli elenchi compaiono anche i reciproci di frazioni come $\frac{9}{8}$ (che scrivevano $1{,}7{,}30 = 1 + \frac{7{,}5}{60} = 1 + \frac{1}{8}$) il cui risultato, $\frac{160}{3}$, corrisponde nel sistema sessagesimale a 53,20 ($53 + \frac{1}{3}$), con l'utilizzo di un numero finito di cifre (perché 60 è multiplo di 3), ma troviamo anche coppie come 1,5,50,37,2,13,20 ($= \frac{800}{729}$) e 54,40,30 ($= \frac{2187}{40}$); infatti il loro prodotto è 60. Forse i Babilonesi erano interessati alle frazioni con denominatori potenze di 3, come $729 = 3^4$, non facilmente trattabili in base 10, il che prova: 1. era per loro ne-

19 Si intenda a,b,c come $a + \frac{b}{60} + \frac{c}{3600}$. La notazione è sessagesimale posizionale.

cessario svolgere calcoli di una certa complessità, evitando per quanto possibile numeri periodici; 2. ricorrevano alla memoria scritta per aumentare la velocità di esecuzione; l'uso di tabelle evitava di eseguirli di volta in volta, risparmiando tempo. Un riscontro in questo senso si può avere osservando che nelle tavolette i reciproci erano utilizzati nelle moltiplicazioni, sostituendo il divisore con il suo reciproco in modo da evitare l'esecuzione diretta della divisione. In questo differivano dagli Egizi, che impiegavano un laborioso metodo di 'duplicazione del divisore' [BOYER]. Sembra che avessero una impostazione fortemente legata alla rapidità e certezza dei calcoli, che migliorano se questi non devono essere eseguiti di volta in volta, la stessa che avrebbe condotto *Briggs* (1561-1630) alla stesura di tavole logaritmiche.

Gli esempi visti finora sono di reciproci 'regolari', calcolabili mediante un numero finito di passi. Vi sono elenchi anche di reciproci 'irregolari', quando si divide 60 per un numero i cui fattori primi non sono tutti fattori primi anche di 60, es. 13, 21, 51. In questo caso si forniscono approssimazioni; p. es. il reciproco di 1,5 $= 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$ cioè $\frac{12}{13}$ è calcolato come 55,23,4,30 = 0,9230741124 in base 10, mentre il valore corretto approssimato alla sesta cifra decimale è 0,923077. Si noti che l'errore è di ca. tre parti su un milione, un risultato non disprezzabile a fini pratici.

Seguono tavole con moltiplicazioni, quadrati, radici quadrate, logaritmi.

Terne pitagoriche (cap. III). La tavoletta nota come ‘Plimpton 322’ risale al periodo dal 1900 al 1600 a.C; non è nota la provenienza. Contiene le lunghezze, tutte espresse da numeri interi, dei lati di quindici triangoli rettangoli; mancano i valori del cateto maggiore, essendosi persa parte del reperto. I numeri sono disposti su colonne affiancate, quelli sulla stessa linea orizzontale si riferiscono allo stesso triangolo. Posto che l, b, d denotino rispettivamente il cateto maggiore, quello minore e l’ipotenusa, procedendo da sinistra a destra abbiamo nella prima colonna i rapporti $\frac{d^2}{l^2}$, nella seconda e nella terza i valori di d e b, rispettivamente. Scorrendo la tabella dall’alto verso il basso si nota che il rapporto $\frac{d}{l}$ diminuisce progressivamente.

Un teorema fondamentale[20] afferma che tutte e sole le terne pitagoriche primitive a, b, c (cioè, tali che non esiste un loro divisore comune) si possono ottenere da due numeri naturali p e q che siano primi tra di loro e uno pari e l’altro dispari. Posto inoltre $p > q$, la forma generale di una terna primitiva è (F1):

$$p^2 + q^2 \quad ; \quad 2pq \quad ; \quad p^2 - q^2$$

Proclo nel suo *Commentario al I libro degli Elementi* descrive due metodi per ottenere terne pitagoriche primitive in funzione di un solo parametro naturale n: [MORROW 1970]

---

20 Neugebauer lo attribuisce a Kronecker, ma una formula dipendente solo dal naturale n sarebbe stata nota a Proclo; v. oltre. Il X libro degli *Elementi*, al primo lemma della prop. 29, enuncia un metodo per generare le terne pitagoriche sostanzialmente equivalente alle F1 (v. pag. seg.)

“Per trovare tali triangoli [rettangoli] sono stati tramandati alcuni metodi, uno dei quali attribuito a Platone, l'altro a Pitagora. Il metodo di Pitagora inizia con i numeri dispari, postulando un dato numero dispari come il minore dei due lati contenenti l'angolo, prendendone il quadrato, sottraendone uno e postulando metà del resto come il maggiore dei lati attorno all'angolo retto [$\frac{n^2-1}{2}$ con n dispari]; quindi aggiungendone uno a questo [$\frac{n^2-1}{2}+1 = \frac{n^2+1}{2}$], ottiene il lato rimanente, quello che sottende l'angolo [l’ipotenusa]. Ad esempio, prende tre, lo eleva al quadrato, sottrae uno da nove, prende la metà di otto, cioè quattro, poi aggiunge uno a questo e ottiene cinque; e così si trova il triangolo rettangolo con i lati di tre, quattro e cinque. Il metodo platonico procede dai numeri pari. Prende un dato numero pari come uno dei lati adiacente all'angolo retto, lo divide in due e ne eleva al quadrato la metà, quindi aggiungendo uno si ottiene l’ipotenusa e sottraendo uno dal quadrato si ottiene l'altro lato adiacente all'angolo retto [rispettivamente, $\left(\frac{n}{2}\right)^2+1$ e $\left(\frac{n}{2}\right)^2-1$]. Ad esempio, prende quattro, lo dimezza ed eleva al quadrato la sua metà, vale a dire due, ottenendo quattro; poi sottraendo uno ottiene tre e sommando uno ottiene cinque, e così ha costruito lo stesso triangolo ottenuto con l'altro metodo.” La terna pitagorica descritta da Proclo sarebbe quindi, nell'ordine ipotenusa – cateto maggiore – cateto minore e con n pari: (F2)

$$\frac{n^2+1}{2} \;;\; \frac{n^2-1}{2} \;;\; n$$

Sostituendo $\frac{p}{q}$ a n, con $p > q$ e moltiplicando poi tutti i termini per $2q^2$, si ottengono le formule (F1) che generano tutte le terne; se in F2 n è naturale, si ottengono tutte e sole quelle contenenti due termini la cui differenza è uno, come (5, 12, 13). Invece, (8, 15, 17) si può ottenere con $p = 2$ e $q = 1$. Ponendo $p = 7$ e $q = 4$ otteniamo (33, 56, 65) ecc.

Una discussione assai approfondita sulla dimostrazione del famoso teorema (dimostrato da Euclide nel I libro, prop. 47) e delle terne pitagoriche si trova in *T. L. Heath* nel suo studio sugli *Elementi* [Dover Ed. 1956, vol. 1, pp. 349 segg.]. Non vi sarebbe alcun dubbio che i pitagorici abbiano scoperto gli irrazionali attraverso $\sqrt{2}$:

*"*Non è tuttavia contestato che i Pitagorici scoprirono gli irrazionali (cfr. lo scolio n. 1 al Libro X). Ora tutto dimostra che questa scoperta dell'irrazionale è stata fatta con riferimento a $\sqrt{2}$, il rapporto tra la diagonale di un quadrato e il suo lato.

È chiaro che ciò presuppone la conoscenza che I.47 [l'enunciato del teorema di Pitagora] è vero per un triangolo rettangolo isoscele; e il fatto che alcuni triangoli di cui si era scoperto che era vero fossero triangoli rettangoli razionali [cioè, i cui lati erano espressi solo da numeri razionali] era senza dubbio ciò che suggeriva di indagare se anche il rapporto tra le lunghezze della diagonale e del lato di un quadrato potesse essere espresso in numeri interi. Nel complesso, quindi, non vedo ragioni sufficienti per mettere in discussione la tradizione secondo cui, per quanto riguarda la geometria greca... Pitagora fu il primo a introdurre il teorema di I.47 e a darne una dimostrazione generale."

Seguono dettagliate analisi sulle origini della dimostrazione del teorema e delle terne pitagoriche.

Nel suo studio, Neugebauer ammette che chi aveva compilato la serie di terne contenute in Plimpton 322 conoscesse le F1 e propone un metodo per calcolarle: dalle F1 ricaviamo (F3)

$$\frac{d}{l} = \frac{p^2+q^2}{2\,pq} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{p}{q}\right)+\left(\frac{q}{p}\right)\right)$$

e quindi è necessario che p e q siano 'regolari' per ottenere risultati esprimibili con un numero finito di cifre. Si noti che $2pq$ deve essere maggiore di $p^2 - q^2$. Ad ogni rapporto dato di $\frac{d}{l}$, dalle tavole di moltiplicazione si sarebbero selezionati i valori di p, q e dei loro reciproci ad esso corrispondenti secondo la F3, e da questi, applicando le F1, si sarebbero ottenute le terne pitagoriche riportate. Resta da capire come le F1 fossero state ottenute; più avanti proporrò una possibile spiegazione.

Problemi di geometria piana (ancora cap. III). Ve ne sono di semplici come il calcolo delle diagonali di un quadrato, il calcolo approssimato di radici quadrate, di aree di trapezi con la solita regola, di sezioni di un triangolo in un triangolo a quello interno e un trapezio, partizioni di triangoli e trapezi in più parti (come la già esaminata AO 17264) ecc.; sono chiaramente esempi che si riferiscono alla divisione dei terreni. L'origine di questi problemi si trova nella civiltà sumera, nel modo in cui i campi erano distribuiti rispetto ai canali di irrigazione. Le tavolette dovevano riportare una scienza ancora molto più antica.

Equazioni di primo grado in una incognita (cap. III). I problemi sono posti attraverso esempi realistici; l'incognita non è denotata da un simbolo specifico come '*x*' ma attraverso un oggetto concreto (una pietra, di solito): "Ho trovato una pietra, ma non l'ho pesata; ho aggiunto la settima e poi l'undicesima parte [del risultato parziale ottenuto], ottenendo alla fine 1" (in una certa unità di misura, "ma-na"). Si dà la risposta. L'equazione risolvente è molto semplice:

$$\left(x+\frac{x}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right) = 1 \quad [= 60 / 60] \; ;$$

la soluzione è $\left(\frac{55}{60}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}\right) = 48 + \frac{1}{8}$ sessantesimi, che scrivevano 48;7,30 "gin" [60 *gin* fanno un *ma-na*].

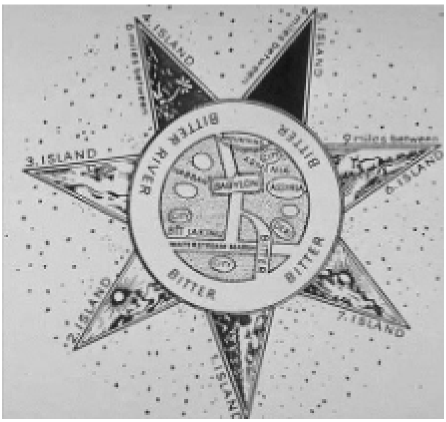
Problemi di II grado

Una serie di problemi chiede di risolvere un sistema nel quale sono dati il prodotto di due incognite e la somma di una delle due con una espressione di primo grado dipendente da entrambe; Neugebauer lo scrive nella forma:

$$\begin{aligned} xy &= A \\ x + f(x,y) &= b \end{aligned}$$

e varianti; altri richiedono di risolvere un sistema dati il prodotto e la differenza delle incognite; altri ancora si risolvono applicando il teorema di Pitagora.

Un carattere è la sacralità del numero sette. Veramente questa non è peculiare delle civiltà mesopotamiche, ma p. es. i pitagorici assegnavano maggiore importanza al tre, al quattro (la *tetractýs*) e soprattutto al dieci. “In lingua sumerica il concetto di universo era espresso con il simbolo corrispondente al numero sette” [GIACARDI – ROERO 1979], e la creazione nella Bibbia ha luogo in sette giorni ecc. Probabilmente l’origine di queste idee va cercata nell’astronomia, essendo sette i pianeti, come parrebbe confermato dai nomi dei giorni della settimana, e nella convinzione che il mondo terreno riflette quello celeste. La *Mappa del mondo di Babilonia* (ca. 500 a.C.), la più antica pervenutaci, contiene una stella a sette punte.



La mappa è su una tavoletta d’argilla parzialmente danneggiata; l’immagine riportata ne è una ricostruzione. Da mapa-babilonio-nota2.jpg.

Un’altra caratteristica è l’uso del numero 60 come base. Sono state addotte più ragioni per questa scelta; inizialmente, i Sumeri utilizzavano anche il sistema decimale, che non sarebbe più stato in uso verso il 2500 a.C. [GIACARDI ROERO]. La migliore sembra essere la maggior facilità nell’eseguire calcoli, specialmente quelli dei reciproci dato che 60 ha molti divisori tra cui 3: $\frac{1}{3}$ è esprimibile come 20 sessantesimi, $\frac{1}{9}$ è $6+\frac{2}{3}$ cioè 6;40 sessantesimi, ecc. e questo è un discreto vantaggio, perché si evita di ottenere risultati con infinite cifre. Inoltre, l’anno è ca. 360 giorni, le ore del giorno presso i Babilonesi erano 12 (da tramonto a tramonto; i Greci invece seguivano gli Egizi, cioè dividevano il giorno in 24 parti). Infine, sono dodici i segni dello zodiaco, che secondo il Neugebauer sarebbe stato introdotto verso il 450 a.C. In effetti anche 12 è un numero carico di significato simbolico.

Se per il sette possiamo riconoscere l’origine della sua importanza nell’astronomia e nella musica, che nel vicino oriente sembrano fossero correlate, per il dodici vi possono essere ragioni di tipo matematico: *a.* è una buona base per un sistema di numerazione, migliore del dieci essendo il minore tra i numeri con quattro divisori distinti da uno e da dodici; *b.* sono suoi multipli o semimultipli dispari molti numeri notevoli: 24, 36, 72, 108… 30, 90; inoltre, multipli di 3, di 9 ecc. sono in rapporto semplice con 12; p. es. $\frac{27}{12} = \frac{9}{4}$; *c.* è collegato agli angoli di molti poligoni notevoli: 36°, 72°, 60°,108°, 120°, 180°...

Tra i possibili metodi, due mi sembrano accessibili alle possibilità dei Babilonesi, uno di carattere algebrico, l'altro numerico ed euristico.

Il primo impiega la regola per cui la differenza di due quadrati è uguale al prodotto della somma e della differenza delle rispettive basi. La relazione con la matematica babilonese passa per la loro attenzione ai calcoli con i reciproci. Se nell'uguaglianza

$$a^2 - b^2 = c^2$$

sostituiamo il primo membro con $(a+b)(a-b)$ e dividiamo tutti i termini per c^2, otteniamo

$$(x+y)(x-y) = 1.$$

Poniamo $x + y = \frac{p}{q}$ e $x - y = \frac{q}{p}$, da cui otteniamo

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) = \frac{p^2+q^2}{2pq} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right) = \frac{p^2-q^2}{2pq}$$

Se p e q sono interi, moltiplicando per $2pq$ otteniamo la terna di interi (F4)

$$p^2 + q^2 \;;\; 2pq \;;\; p^2 - q^2$$

nella quale il primo termine è l'ipotenusa, il secondo il cateto maggiore. È possibile ridurre le formule a un solo parametro, $n = \frac{p}{q}$ dividendole per $2q^2$ in modo da sostituire n a $2pq$. Si ottengono $\frac{n^2+1}{2}$, n , $\frac{n^2-1}{2}$. Il parametro n è un razionale; se lo poniamo intero, non otterremo tutte le terne pitagoriche, dato che la differenza tra il primo e l'ultimo termine è uno qualunque sia n; una terna come (65, 56, 33) non fa parte delle terne dipendenti da un solo parametro naturale (*vedi*). Queste formule generano solo le terne primitive, cioè i loro termini non hanno divisori comuni. Affinché siano tutti numeri interi, n deve essere dispari, e il primo e l'ultimo non possono essere entrambi pari o dispari. Le terne primitive quindi contengono due termini dispari e uno pari.

Un metodo meno rigoroso, ma più accessibile e forse quello effettivamente applicato consiste nel sommare e sottrarre ad un numero razionale x il suo reciproco. Infatti la differenza dei quadrati

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

ha la stessa forma della relazione pitagorica. Sostituendo x con $\frac{p}{q}$ e dopo alcuni calcoli ritroviamo la F(4).

Sembra che questo metodo fosse assai affine a una 'regola generatrice' di terne pitagoriche regolari cioè senza approssimazioni trovata nel reperto MS 3971, costituite dalla semisomma e dalla semidifferenza di un numero razionale e del suo reciproco, e da 1 [FRIBERG 2008].

A risultati analoghi possiamo giungere con terne ottenibili da

$$1+\frac{1}{x} \quad , \quad 1-\frac{1}{x} \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{x}}$$

con x quadrato di un numero razionale. Per es., se poniamo $x = \frac{25}{9}$, otteniamo la terna $\left(\frac{34}{25}\ ,\ \frac{16}{25}\ ,\ \frac{6}{5}\right)$ riducibile a

(17 , 8, 15); infatti 289 = 64 + 225. Le terne riportate nella tavoletta *Plimpton 322* comprendono in effetti numeri razionali, con numeratore e denominatore relativamente elevati; la prima riga (che corrisponde al quadrato del rapporto tra ipotenusa e cateto maggiore uguale a 1,59,0,15 = $1+\frac{59}{60}+\frac{15}{60^3}$) riporta $\frac{119}{60}$ e $\frac{169}{60}$ rispettivamente per il cateto minore e per l'ipotenusa, che conducono al valore $\sqrt{\frac{14400}{3600}} = 2$ per il cateto maggiore. Il quadrato di $\frac{169}{60} : 2$, cioè $\frac{28561}{14400}$, coincide in effetti con 1,59,0,15.

Si può giungervi anche attraverso i quadrati dei binomi. Nel X libro, 1° lemma della prop. 29, Euclide sviluppa un perfezionamento dell'identità numerica, geometricamente rappresentabile, basata su quadrati di binomi

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2+xy \quad = \quad \left[\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)+y\right]^2$$

che individua la terna $\sqrt{xy}\ ,\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}\ ,\ \left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)+y$.

L'identità algebrica $\left[\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2 + xy = \left[\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2$ si applica a qualsiasi coppia x, y di numeri reali; se si cercano soluzioni intere, si deve partire dalla dimostrazione di Euclide. Egli rappresenta i numeri (interi) come segmenti, e inizia osservando che la differenza tra due numeri m e n con la stessa parità è un numero pari. Poniamo che sia $m > n$. Allora, la loro semidifferenza è ancora un intero. Euclide traccia un segmento AB comprendente CB corrispondenti a m e n rispettivamente, e divide AC a metà nel punto D. Abbiamo quindi AD $= \frac{m-n}{2}$ e DB $= \frac{m-n}{2} + n$, quindi gli interi m, n corrispondono a x, y rispettivamente. A questo punto Euclide introduce l'ipotesi che m e n siano numeri piani 'simili', vale a dire sono le aree di rettangoli simili, o entrambi quadrati, che ne sono un caso particolare, per cui possiamo (algebricamente) porre $m = k^2 n$. Allora AB·CB $= k^2 n^2$ è un quadrato. La somma di AB·CB e del quadrato di CD è uguale al quadrato di BD, algebricamente: $m \cdot n + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$. Sostituiamo ora $k^2 n$ a m, e otteniamo la terna tutta intera $\left(\frac{k^2-1}{2}\right) \cdot n$, kn, $\left(\frac{k^2+1}{2}\right) \cdot n$ che contiene terne non primitive e non tutte se k è intero. Ma l'ipotesi di Euclide, che i due numeri m ed n siano simili include il caso in cui k sia non intero e anche irrazionale (si ponga il caso in cui il rapporto tra le aree di due rettangoli sia $2: m = 18, n = 9$. Si ottiene la terna euclidea $\frac{9}{2}$, $9\sqrt{2}$, $\frac{27}{2}$ dalla quale si può ricavare una terna irrazionale non frazionaria: $9, 18\sqrt{2}, 27$). Se vogliamo ottenere solo terne primitive intere, dobbiamo sostituire a k il rapporto $\frac{m}{n}$ e moltiplicare per n, e abbiamo la soluzione cercata, $\frac{m^2-n^2}{2}$, mn, $\left(\frac{m^2-n^2}{2}\right)$.

Una via più breve (ma non esattamente rispondente al procedimento di Euclide) è assumere che AB e CB siano quadrati, e non solo numeri piani simili.[21]

Interpretando alla lettera il testo di Euclide, l'ipotesi che AB e CB siano numeri piani simili implica – limitandoci a rapporti tra lati corrispondenti razionali – che siano i prodotti mp^2 e mq^2 rispettivamente (HEATH 1956 pp. 64,65), in modo che il loro rapporto sia $\frac{p^2}{q^2}$ per cui $AB \cdot CB = m^2p^2q^2$, $CD = \frac{mp^2-mq^2}{2}$, $BD = mq^2+\frac{mp^2-mq^2}{2} = \frac{mp^2+mq^2}{2}$ costituiscono una terna di interi; infatti $m^2p^2q^2 + \left(\frac{mp^2-mq^2}{2}\right)^2 = \frac{m^2p^4+2m^2p^2q^2+m^2q^4}{4} = \left(\frac{mp^2+mq^2}{2}\right)^2$. Per selezionare le

[21] v. p. es. Euclid's Elements, Book X, Proposition 29.

sole terne primitive, dividiamo tutto per m^2 e otteniamo le terne pq , $\frac{p^2-q^2}{2}$, $\frac{p^2+q^2}{2}$.

Il procedimento sembra complicato, ma in tal modo Euclide trova tutte le terne pitagoriche di numeri interi, anche quelle non primitive.

Molto difficilmente i Babilonesi o gli Egizi avrebbero seguito la stessa procedura, ma una tecnica basata su quadrati di binomi poteva esser loro accessibile. Si consideri l'identità

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

Si possono – senza uso di altre formule – ottenere coppie di reciproci a e b (già tabulate, come abbiamo visto), e calcolare le somme e differenze. Per es., poniamo $a = 7$, $b = \frac{1}{7}$; otteniamo una terna $\frac{50}{7}$, $\frac{48}{7}$, 2 e, moltiplicando per $\frac{7}{2}$ infine abbiamo (25, 24, 7). In questo modo, procedendo a partire da 2, si possono calcolare tutte le terne pitagoriche; ma non è detto che, almeno inizialmente, non abbiano proceduto empiricamente.

Un metodo euristico può consistere nel calcolare la somma dei quadrati di alcuni interi (o la loro differenza) e verificare in quali casi si ottengano dei quadrati, cercando di ricavarne regole generali. Per via empirica – ragionando su terne molto più semplici di quelle della *Plimpton* – si può osservare che in alcune terne di numeri interi, quelle nelle quali due termini a e b

differiscono di uno, il quadrato del terzo termine è la somma di a e b ($3^2 = 4 + 5$; $5^2 = 12 + 13$). Seguendo questa traccia si devono decomporre i quadrati dei numeri dispari:

$7^2 = 49$	25	24
$9^2 = 81$	41	40
$11^2 = 121$	61	60
$13^2 = 169$	81	80
$15^2 = 225$	113	112
...	...	...

Non sembra difficile riconoscere che i numeri della colonna centrale e di quella di destra si ottengono aggiungendo o togliendo uno dai quadrati nella prima colonna, e dividendo il risultato per due, il che corrisponde alle formule F2 sopra riportate, che Proclo ascrive a Pitagora. I Babilonesi potrebbero aver esteso il procedimento ai numeri razionali, moltiplicando poi i risultati per numeri interi, ecc. Si devono quindi risolvere sistemi nei quali la somma di due numeri è il quadrato di un numero anche razionale assegnato, e la loro differenza è uguale a uno; seguendo questa idea non servono formule, ma solo semplici procedure di calcolo. Se il numero assegnato è 10, dobbiamo risolvere

$$x + y = 100 \,;\; x - y = 1$$

da cui 50,5 e 49,5 . Se vogliamo solo numeri interi, raddoppiando otteniamo la terna (101, 99, 20); infatti 100201 – 99801 = 400. È chiaro che un metodo sistematico dovrebbe procedere partendo da numeri interi, ma la relativa facilità della soluzione di sistemi di primo grado del tipo somma / differenza avrebbe consentito di procedere a partire da numeri razionali qualsiasi. Non è facile però stabilire se i calcolatori babilonesi avessero proceduto in modo sistematico, se applicavano formule o solo algoritmi scoperti empiricamente, e se i numeri che ci sono pervenuti avessero qualche significato, o fossero esempi, esercizi di calcolo per addestrare gli studenti.

Schema della tavoletta nota come Plimpton 322

Non è possibile analizzare ciò che fu attribuito alla 'scuola pitagorica' prescindendo dal metodo, o piuttosto dall'orientamento di chi conduce l'analisi. Vi sono due condizionamenti: uno ideologico, per cui l' 'idealismo', o lo 'spiritualismo', o semplicemente la 'filosofia' nel senso in cui si pensava che Pitagora l'intendesse, sarebbe stato lo spirito-guida della scuola, o, al contrario, l'indirizzo fosse il 'realismo', la sistematizzazione di regole utili; l'altro metodologico, di impronta matematica. Gli studiosi hanno generalmente privilegiato algebra e geometria. *Reghini*, un matematico italiano (1878-1946) che dedicò tutta la vita allo studio del pitagorismo, scrisse *Per la restituzione della geometria pitagorica*, Neugebauer parlava insistentemente di algebra babilonese. Se ne faccia la sintesi: ne nasce l'algebra geometrica, frutto di metodologia o fase reale nello sviluppo della matematica?

I documenti emersi dalla Mesopotamia indicano senza ombra di dubbio che – a parte i problemi di geometria, riconducibili all'agrimensura – il loro contenuto è prevalentemente 'analisi numerica non formalizzata'. Questa affermazione non ha nulla di straordinario, anzi sarebbe banale, se non fosse che l'attenzione pressoché esclusiva verso algebra e geometria ne ha offuscato la presenza onnipervasiva. Per chiarirne il concetto, prendiamo la somma dei primi n numeri, o, più discorsivamente in modo da evitare l'indeterminata n, la somma dei primi tre, quattro, cinque,… dieci numeri e così via. Sappiamo che

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

e la formula trovata permette di rispondere a una domanda come ‘quanto vale la somma dei primi cento numeri, a partire da 1 compreso?’ Basta sostituire 100 al posto di n , e il risultato è subito trovato: 5050. Ma possiamo dire ‘moltiplica 100 per (il successore) 101 e dividi poi per 2’. Nel primo caso operiamo a partire da una formula dipendente da un parametro, nel secondo non vi è esplicitamente né formula né parametro, ma la procedura risolutiva (che è generale) applicata ad un caso particolare.

Questo tipo di procedura si avvale di tabelle numeriche. Lo è la stessa tavola pitagorica: invece di imparare a memoria decine e decine di moltiplicazioni m x n, si cerca nella tavola il numero nell’incrocio tra la m – esima riga e la n – esima colonna, o viceversa. Generalmente, la formula sembra offrire maggiore velocità di calcolo; non è sempre così. Una volta redatta la tabella, basta cercare all’interno di quella il risultato. Questo metodo è stato impiegato in età moderna; si prenda il *triangolo di Tartaglia* per il calcolo dei coefficienti binomiali, ecc.

Le tabulazioni forniscono talvolta i risultati di procedure iterate. Prendiamo la somma dei primi n numeri: possiamo procedere con la somma dei primi due, poi dei primi tre, ecc. fino ad arrivare al numero n prefissato. Ogni passo presuppone il precedente. *Iterazione e assenza di indeterminate* sono la base degli algoritmi che portano alle tabelle, e la ricerca nelle tabelle equivale all'applicazione di algoritmi. Il metodo aritmetico dei Babilonesi è di questo genere, senza dubbio, certificato dalla presenza massiccia delle tabelle e dall'assenza di formule. Non è 'algebra' come la intenderemmo oggidì, è calcolo aritmetico codificato immediatamente utilizzabile *esattamente come la tavola pitagorica.*

Proprio questa denominazione dovrebbe indurre a porre più chiaramente il rapporto tra la (presunta) aritmetica pitagorica e quella mesopotamica. I pitagorici facevano uso di tabelle, o, più esattamente, il loro impiego era stato a loro attribuito, anzi ne sarebbero stati gli iniziatori. Questa è una congettura estremamente significativa, se ci guida a comprendere come vi possa essere stata connessione tra Greci e altre culture – segnatamente, mesopotamiche e circostanti. È necessario fare a meno delle idealizzazioni, o meglio pregiudizi intorno alla scuola pitagorica. Limitiamoci a confrontare alcune nozioni in nostro possesso sull'aritmetica pitagorica, prescindendo dalla sua origine e presunte finalità; ci basti che è antica, precedente Platone, e abbandoniamo per un momento l'idea che nei numeri figurati vi sia la ricerca della sintesi tra il numero stesso e la figura: cosa resta? La risposta è semplice: 'regole espresse con figure geometriche per trovare subito, senza rifare calcoli di volta in volta, la somma dei primi n numeri, e non solo'.

Vediamo la generazione per via grafica dei numeri triangolari:

•

• • •

• • • • • •

• • • • • • • • • •

I numeri ‘triangolari’ (3, 6, 10…) sono ottenuti dal precedente, che sta sulla n – esima linea (poniamo $n = 0$ in corrispondenza di 1) aggiungendogli il successivo secondo una formula ricorsiva come

$$T(n) = T(n - 1) + n + 1$$

Per es., 6 (il secondo triangolare partendo da 3) è dato da T(1) (= 3) più 2 + 1; 10 (il terzo, quindi n = 3) da T(2) (= 6) + 3 + 1 ecc. Il 10, o meglio la *decade*, è al contempo la somma dei primi quattro numeri (il punto, la linea retta, la superficie, il solido, ovvero la monade, la diade, la terna, dai quali si ottengono i rapporti armonici fondamentali: 2 : 1, 3 : 2, 4 : 3) ed è il terzo numero triangolare, e riveste perciò un ruolo fondamentale.

A questa figura i pitagorici attribuivano carattere sacro, che faceva del numero il ponte tra la quantità (mondo sensibile), la forma (intelligibile) e l’aspetto misterico, il livello più alto della comprensione, non direttamente esprimibile. La monade sul vertice indica il movimento discendente verso il mondo sensibile (il quattro, che è anche il completamento della formazione del mondo) dall’uno indiviso e isolato, la potenzialità da cui tutto viene generato, ma in un certo senso incompleto in quanto non include ancora il molteplice. La diade è l'inizio del processo di formazione, simbolo di tutti gli opposti complementari come il pari e il dispari, il maschile e il femminile, ecc. Se l'uno – come unità originaria del tutto – è il vertice della comprensione al termine del moto ascendente dal sensibile al Principio, la diade è l'origine della discriminazione, del discernimento, della differenziazione, il livello della dialettica. La triade risolve in sé il contrasto (diade) tra l'uno e la diade stessa in quanto unità questa volta completa del suo opposto, è la vera unità dell'uno isolato e del molteplice. La monade, il diverso, il due sono tre distinti indissolubilmente legati nell'unità onnicomprensiva, che è il tre, il principio dell'Essere, non ancora manifestato nel livello del sensibile. In termini teologici, l'Uno è Dio 'prima' della creazione, il Due il suo principio, distinto dall'Uno ma ad esso unito nella Triade, che riconduce all'Uno. Il Quattro, come livello successivo al Tre nel moto discendente, è collegato al mondo sensibile, come numero dei livelli riassume il processo della creazione completo, come unità del tutto riunisce l'Uno con l'Essere attraverso tutte le distinzioni e relazioni che ne sono l'articolazione intelligibile.

Se sotto l'aspetto concettuale e simbolico tutto può sembrare chiaro, molto meno lo è quando ci poniamo il problema dell'origine e del significato di tutto questo. Il numero figurato può rappresentare simbolicamente tutto ciò che vogliamo, come accade per qualsiasi figura: triangolo, pentagramma, esagramma, ecc; ma è oggettivo che è collegato al calcolo della somma dei primi naturali, partendo da 1. Questo è il punto: all'origine del pitagorismo vi è la ricerca di relazioni tra numeri e figura, quasi si voglia comprendere regole di cui non si vedeva la ragione, o vi è una filosofia simbolica che unisce aritmetica, dialettica, cosmologia ecc.? Si deve porre l'accento sul simbolo e puntare verso l'alto, come Platone nel celebre affresco di Raffaello sembra indicare alzando l'indice verso il cielo, o seguire il gesto piano di Aristotele, che invita alla moderazione e al realismo? La scelta non è obbligatoria, ma la struttura oggettiva della matematica ci conduce alla seconda via piuttosto che alla prima, e l'innegabile suggestione simbolica del numero fa propendere piuttosto verso la prima. Si aggiunga quella del triangolo equilatero, per la sua stessa simmetria, e per tutto quello che può significare per la sua stessa forma. Se consideriamo fondamentale la valenza simbolica, l'attenzione verso la struttura sintattica matematica è una perdita di significato, una restrizione della coscienza, un prevalere dell'attenzione al particolare rispetto alla realizzazione spirituale, qualcosa di peccaminoso. Se accettiamo come fondamentale la *necessità* intrinseca al calcolo, all'impossibilità di sottrarsi alla verità matematica e alle sue conseguenze, insomma alla 'realtà', il simbolismo appare come una divagazione della mente, una forma di illusione dovuta alla ricerca di significati creati dalla fantasia e nient'altro, una modalità primitiva, prerazionale e non soprarazionale, ma al di sotto della ragione: o fantasia sterile sul piano cognitivo, o tentativo primitivo di comprendere ciò che si può capire con mezzi 'scientifici'.

Lasciando da parte considerazioni filosofiche, è evidente che tra numeri figurati e tabelle babilonesi vi è una qualche affinità. Ciò non implica necessariamente una derivazione storica, una imitazione dei metodi babilonesi. Non è neppure certo che il calcolo numerico fosse la priorità dei pitagorici; i numeri figurati potevano essere in funzione dell'esplorazione delle proprietà delle stesse figure geometriche. Ma è un errore partire dalle finalità che possiamo riconoscere in una ricerca in base a pochissime notizie frammentarie e incerte: queste finalità possono essere proiezioni dello studioso. Nel caso in questione, è evidente che la procedura seguita partiva dai numeri, e basta questo per definirla come una forma di analisi numerica. La stessa denominazione di 'terne pitagoriche' ci orienta verso questa direzione, e abbiamo visto che i Babilonesi ne sapevano molto, anche troppo, dato che la mancanza di formule non significa che le ignorassero; semplicemente, non le scrivevano – non serviva scriverle. La stessa frase 'Tutto è numero', che molti vogliono intendere in senso cosmologico, come se il numero fosse il principio universale, non può realisticamente derivare da altro che non sia la priorità dell'aritmetica sulle altre matematiche – geometria, astronomia, acustica ecc; "l'aritmetica è un presupposto, non una conseguenza dell' astronomia o della geometria"[22] [GIACARDI – ROERO 1979, p. 128]. Il 'numero'

[22] Quest'affermazione va presa *cum grano salis.* È pur vero che ogni immagine che troviamo nella geometria contiene relazioni numeriche, e in un certo senso non c'è figura senza il numero, ma realisticamente possiamo solo convenire che la scoperta delle suddette relazioni sarebbe impossibile senza possederne nozione. Tuttavia, l'immagine sta all'aritmetica come l'universo fisico sta alle leggi fisiche. Non abbiamo biso-

le unisce tutte, non era necessaria chissà quale ispirazione, la quale peraltro poteva ben esserci stata: sogni, divinazioni, illuminazioni improvvise, oracoli potevano aver rafforzato un'intuizione che però era nei fatti, nella stessa produzione della conoscenza tecnica. Nulla esclude che il 'divino' e l' 'umano' avessero composto la stessa intuizione del 'numero' secondo Pitagora; anzi parrebbe l'unico modo che noi moderni abbiamo per spiegarci questa per noi strana commistione tra sacro e profano, tra ispirazione e calcolo. È possibile immaginare che gran parte di ciò che i Greci fecero nel corso del VI sec. a.C. fosse puramente greco, ma è veramente difficile pensare ad una completa indipendenza tra la cultura greca di quell'epoca e quelle circostanti. L'interpretazione più verosimili, direi inevitabili, sono che nozioni non greche e non direttamente attinenti a problemi quotidiani siano state assimilate in ambienti (scuole iniziatiche come quella pitagorica) e reinterpretate in una forma nuova, sapienziale, indifferente agli scopi utilitaristici che avevano ispirato l'analisi numerica originaria o all'opposto, e forse più realisticamente, proprio il carattere simbolico-misterico poteva essere stato importato o meglio ancora condiviso, come afferma la tradizione antica nel fare riferimento ai viaggi di Talete e di Pitagora soprattutto, per poi evolvere verso una speculazione più 'scientifica' e infine una tecnica matematica altamente specialistica. I due processi possono pure essere avvenuti contemporaneamente, rafforzandosi a vicenda. Questa nuova

gno dell'aritmetica per disegnare angoli retti o rette parallele, come non c'è bisogno di conoscere la termodinamica per sentire caldo o freddo.

motivazione avrebbe portato al peculiare carattere universale e astratto che caratterizzò la matematica greca.

L'affinità tra la 'aritmogeometria' pitagorica e risultati babilonesi non si limita ai numeri triangolari e analoghi; verosimilmente si estende alla somma dei quadrati dei primi n numeri, che i Babilonesi sapevano calcolare almeno nel caso $n = 10$. Ne avrebbe dato una dimostrazione il Neugebauer, ma con un metodo caratteristico dei primi pitagorici [GIACARDI – ROERO p. 133]. Anche in questo caso, ci si può dividere tra chi, osservando le affinità, propende verso una qualche derivazione dell'aritmetica pitagorica da quella del vicino Oriente, e chi ne rileva le differenze optando per sviluppi autonomi, ma necessariamente affini in quanto connaturati a certi stadi della conoscenza e a certi scopi.

I reperti pervenuteci sono assai meno numerosi e indicativi di quelli scoperti in Mesopotamia; tuttavia è possibile individuare qualche caratteristica dei loro procedimenti. I documenti originali son meno di dieci papiri [GIACARDI-ROERO]; il più importante è il *Rhind* del 1650 a.C. con 87 problemi, forse copiati da una fonte del 2000 – 1800 a.C. seguito dal *Papiro di Mosca* del 1890 con 25 problemi, da quello di Berlino, di Kahun ecc. con numeri ridotti di problemi.

L'aritmetica presenta alcuni caratteri analoghi a quella babilonese: ricorso sistematico a tavole numeriche, assenza di teoremi e formule generali, problemi di vita quotidiana come esempi particolari relativi a distribuzioni di beni di consumo in parti uguali o disuguali, ma la tecnica di calcolo appare di un livello alquanto inferiore. Non abbiamo una quantità di reperti che consenta di stabilire se nel corso dei secoli i procedimenti di calcolo siano stati migliorati, data la loro difficoltà di esecuzione e complicazione. Forse, il ricorso sistematico alle tabulazioni non stimolava la ricerca di una maggiore efficienza di calcolo; può darsi non ve ne fosse bisogno, ma è singolare che la perizia tecnica e la logistica testimoniata dalla costruzione delle piramidi, e in generale dall'organizzazione dell'economia e dell'amministrazione pubblica, non sembra avere riscontro nell'abilità del calcolo manifestata nei papiri: è lecito il sospetto che molto, troppo non ci sia affatto pervenuto, o perché i documenti relativi non si sono conservati (la stragrande maggioranza), o perché semplicemente non c'erano; i metodi di calcolo sarebbero stati tramandati a memoria nell'ambito della corporazione chiusa degli scribi e dei sacerdoti, o al più registrati in pochissimi scritti, inaccessibili e andati persi. La riservatezza per motivi politici e la sacralità avrebbero separato dalla cultura popolare una conoscenza più approfondita di quanto emerge da ciò che ci è pervenuto, cosa che non avvenne in Grecia; questo verosimilmente è all'origine dei differenti sviluppi della matematica. Quelle egizia e mesopotamica sarebbero state codificate una volta per tutte e si sarebbe evitata la loro diffusione incontrollata.

Forse la spiegazione più semplice del contrasto tra un'aritmetica molto semplice e le imponenti realizzazioni architettoniche consiste nell'ammettere che queste non richiedessero una tecnica di calcolo particolarmente avanzata, ma competenze progettuali e organizzative oltre alla conoscenza di pesi e misure; p. es. riuscire a tracciare bene linee rette, angoli retti, trasportare i materiali, dare la giusta forma a mattoni, massi ecc., valutare costi e mezzi ecc. Organizzazione e lavorazione implicano l'applicazione di procedure e la loro integrazione, ovvero la successione ordinata di azioni finalizzate alla realizzazione di un progetto, e il calcolo è solo un tipo particolare di procedura, quella che impiega numeri, certamente non la prima storicamente dato il grado di astrazione da esso richiesto. Le procedure adottate da artigiani, costruttori, pianificatori verosimilmente precedettero la teoria aritmetica forse di secoli, e forse anche il calcolo aritmetico elementare, per cui un insieme di tecniche evolute trasmissibili anche solo per via orale poteva essersi consolidata ben prima dello studio sistematico dei numeri.

L'operazione fondamentale dell'aritmetica egizia era l'addizione applicata agli interi positivi, ai loro reciproci (frazioni con numeratore unitario) e alla frazione speciale $\frac{2}{3}$. Dati e risultati sono generalmente espressi come somme di questo insieme ristretto di numeri razionali, non come rapporti di interi. Si tratta quindi di un'aritmetica minimale, fatta di sole somme e divisioni di un intero in parti uguali. Le tecniche di calcolo consistevano essenzialmente di raddoppiare una quantità, dimezzarla, prenderne due terzi, moltiplicarla per 10 e prenderne 1/10, e di trovare moltiplicatori frazionari usando i reciproci dei prodotti derivanti dall'uso dei moltiplicatori sopra menzionati. Si direbbe un'aritmetica fortemente legata alla misura e alla manipolazione di quantità concrete, multipli di una unità e loro reciproci. Per poterla impiegare era necessario eseguire moltiplicazioni e divisioni non attraverso algoritmi specifici come facciamo oggi, ma applicando solo i mezzi di cui sopra, il che richiede per compensarne l'estrema povertà l'utilizzo di tecniche di calcolo che eventualmente comportano lunghi calcoli, l'applicazione di procedure particolari a seconda del problema, metodi per ricondurre frazioni proprie a somme di reciproci di numeri interi, e l'impiego di tabelle che permettano al calcolatore di ridurre i tempi di calcolo, nonché un addestramento specifico e una notevole abilità tecnica. Un esempio è la 'Tabella del Due', che riporta i risultati delle divisioni per 2 dei numeri dispari da 3 a 101 come somme di reciproci dei numeri naturali, ma ve ne sono molte altre. Frazioni con denominatori molto grandi, e quindi non adatte a esprimere misure, obbligavano in tal caso a impiegare approssimazioni. Anche i calcoli più complessi, in particolare delle divisioni, si svolgono mediante successive approssimazioni di avvicinamento al risultato, testando di volta in volta il grado di approssimazione raggiunto. La pratica diffusa della ‘prova per verifica’, che consiste nel lavorare a ritroso con la risposta calcolata al fine di mostrare che questa soddisfa l’enunciato del problema, conferma il carattere euristico della matematica egizia. In geometria, si cercava di misurare le figure curvilinee in due o tre dimensioni riducendole a parti di piano o di spazio limitate da linee rette o da superfici piane.

In mancanza di una scomposizione del numero in somma di potenze di 10 o di qualche altra base moltiplicate ciascuna per un opportuno coefficiente, e quindi di una regola generale che deduca il risultato della moltiplicazione dai prodotti dalle cifre sfruttando la notazione posizionale, gli Egizi si avvalevano di alcuni metodi di scomposizione in somma per eseguire una moltiplicazione o una divisione sommando prodotti o quozienti parziali, in particolare la duplicazione. Supponiamo si debba calcolare a x b. Si scompone a nella somma di potenze di 2 (compreso 1, cioè 2^0) che si scrivono in colonna in sequenza ascendente; iniziando da b si affianca a quella una serie in cui ogni termine è il doppio del precedente (b, $2b$, $4b$…) in linea col corrispondente della scomposizione di a ; si sommano i suoi termini, non tutti, ma solo quelli che corrispondono a un termine presente nella scomposizione di a e si ottiene il risultato. In formule: da $\sum_{k=0} c_k \cdot 2^k = a$ troviamo i coefficienti c_k non nulli, che applichiamo in $\sum_{k=0} c_k b \cdot 2^k$ per ottenere ab calcolando ogni termine $b \cdot 2^k$ come $b \cdot 2^{k-1} + b \cdot 2^{k-1}$. Proviamo a moltiplicare 23 per 17. Poiché $23 = 1 + 2 + 4 + 16$, a partire da 17 calcoliamo $2 \cdot 17 = 34$, $4 \cdot 17 = 34 + 34 = 68$, saltiamo $8 \cdot 17$ (136) e passiamo a $136 + 136 = 272$.

1	*17*
2	*34*
4	*68*
16	*272*

Il risultato cercato è la somma dei numeri della colonna di destra, cioè 391.

La moltiplicazione e anche la divisione venivano eseguite con l'ausilio di alcuni moltiplicatori fondamentali, cioè raddoppiando, prendendo i 2/3, dimezzando, moltiplicando per 10 o prendendo 1/10, utilizzando quante più di queste operazioni fossero necessarie per completare il calcolo. Questi procedimenti erano applicati anche al calcolo di potenze, vediamo quello del quadrato di 12, effettuato nello stesso stile del precedente:

$$\begin{array}{ll} [\,1 & 12\,] \\ [\,2 & 24\,] \\ 4 & 48 \\ 8 & 96 \end{array}$$

Le prime due righe non contano, dato che 12 = 4 + 8. Il risultato è 48 + 96 = 144. Si può procedere anche nel modo seguente [CLAGETT 1999] :

$$\begin{array}{ll} [\,1 & 12\,] \\ 2 & 24 \\ 10 & 120 \end{array}$$

Tra i moltiplicatori abbiamo la frazione notevole $\frac{2}{3}$, come nel caso seguente in cui si deve calcolare il prodotto di $1 + \frac{1}{3}$ per 9:

$$\begin{array}{ll} 1 & 9 \\ [\,\frac{2}{3} & 6\,] \\ \frac{1}{3} & 3 \end{array}$$

Nel peculiare metodo degli Egizi, $\frac{4}{3}$ è la somma di due termini dei quali uno è il reciproco di un intero e per aggiungere un terzo si passa attraverso $\frac{2}{3}$ diviso per 2 . $\frac{2}{3}$ e il corrispondente nella colonna del 9 non contano se non per questa mediazione. Si direbbe che gli Egizi si obbligassero ad impiegare in modo rigido solo un ristretto numero di moltiplicatori, anche quando non sembra affatto necessario.

La divisione richiedeva molto calcolo e lavoro con le frazioni, nonché un certo grado di abilità. Il primo passo consisteva nel raddoppiare successivamente il divisore senza superare il dividendo (si rammenti che i Babilonesi la eseguivano moltiplicando il dividendo per il reciproco del divisore, il che è indice di una maggior conoscenza delle proprietà dei numeri), per poi trovare il resto come somma di frazioni con numeratore uguale a 1. Per eseguire i calcoli, gli Egizi ricorrevano sistematicamente ai reciproci dei naturali, e alla frazione $\frac{2}{3}$, l'unica il cui numeratore non fosse 1. Le frazioni della forma generale $\frac{2}{n}$ erano ricondotte alla somma di reciproci di numeri naturali, ma senza ripetizioni: p. es. $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Un esempio dei più semplici può essere il calcolo di $49 : 18$. poiché $18 \cdot 3 > 49$, il quoziente è 2 , e dobbiamo scrivere il resto di $\frac{13}{18}$ come somma di frazioni con numeratori unitari. Può essere fatto come $\frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$. I calcoli potevano essere molto più complicati, specialmente se il divisore era espresso mediante una somma di frazioni. Il carattere euristico della divisione egizia è evidente nel seguente esempio, dove si cerca il quoziente esatto di 3200 : 365. I primi quattro passi della procedura applicano il metodo del raddoppio come nella moltiplicazione, salvo che si deve controllare ad ogni passo che il prodotto tra il quoziente provvisorio dato da una potenza di 2 e il corrispondente multiplo secondo 2 di 365 non superi il dividendo 3200.

1	*365*
2	*730*
4	*1460*
8	*2920*

Aggiungendo 365 alla colonna di destra si supera il dividendo 3200, quindi non possiamo continuare con 1 nella colonna di sinistra, dove calcoliamo il quoziente. Possiamo tentare con $\frac{2}{3}$, ma, sempre per non superare 3200 , non dobbiamo proseguire con $\frac{1}{2}$ ma con $\frac{1}{10}$. A questo punto il quoziente sale a $8 + \frac{2}{3} + $ $+ \frac{1}{10}$ che, moltiplicato per 365 , dà $2920 + 243 + \frac{1}{3} + 36 + \frac{1}{2}$ $= \ 3199 + \frac{5}{6}$ cioè $3200 - \frac{1}{6}$. Dobbiamo quindi completare a sinistra con $\frac{1}{6 \cdot 365} = \frac{1}{2190}$. Lo schema finale è

8	*2920*
$\frac{2}{3}$	$243 + \frac{1}{3}$
$\frac{1}{10}$	$36 + \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2190}$	$\frac{1}{6}$

Il quoziente cercato è la somma di tutti i termini a sinistra, il dividendo quella di tutti i termini a destra.

Un altro aspetto interessante è la riduzione delle frazioni proprie a somma di frazioni con numeratore uguale a 1. P. es. $\frac{2}{9}$ può essere decomposto in $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$. Non è chiaro se gli Egizi applicassero un metodo generale per effettuare le loro decomposizioni. In questo caso, potrebbero aver moltiplicato per 2 numeratore e denominatore, e aver osservato che $4 = 3 + 1$, e che 3 divide 18. Un metodo generale può consistere nel moltiplicare numeratore e denominatore per un fattore p in modo che $2p - 1$ sia un divisore di pn. Applicando questa procedura a $\frac{2}{5}$ otteniamo $\frac{6}{15} = \frac{5+1}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; oppure, $\frac{2}{7} = \frac{8}{28} = \frac{7+1}{28} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. Sembra naturale iterare il procedimento calcolando $\frac{m+1}{n}$ come

$\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$, ma non sembra che procedessero in modo così consequenziale. Per es., in un problema la somma $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$ è trasformata in $\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$, con l'evidente vantaggio di ridurre al minimo il numero dei termini. Gli Egizi quindi sapevano come 'ottimizzare' la velocità di calcolo impiegando un insieme minimale di numeri e di metodi, adattandoli ai casi particolari.

C'è da chiedersi se siffatti procedimenti, che richiedevano una particolare abilità, fossero conservati solo per mantenere il prestigio della classe degli scribi, o se fossero esercizi per sviluppare le capacità di calcolo degli studenti. Ma che questa strategia sia il risultato di un metodo euristico basato su un criterio di economia (pochi numeri alla base del calcolo, operazioni semplici per quanto possibile) sembra innegabile; può essere che la corporazione degli scribi abbia fermato ogni riforma del calcolo. Le corporazioni tendono alla conservazione e al mantenimento del segreto. Certamente quanto ci è pervenuto dai papiri può essere esercizio di addestramento ed esempio, ma è comunque una illustrazione di come i professionisti dovevano procedere. La 'forza' del numero appare soprattutto se non si impiegano algoritmi relativamente sofisticati come quelli oggi in uso già nella fase di apprendimento, ma quando si procede per così dire a tentoni, passando attraverso la scoperta delle infinite relazioni tra i numeri, senza fa uso di formule, che spostano l'attenzione verso gli automatismi procedurali. È possibile che il concetto pitagorico del numero sia stato importato proprio dalla suggestione indotta dall'impiego dei metodi egiziani o simili; metodi peraltro diffusi presumibilmente nelle aree circostanti. I Babilonesi – a parte la distanza geografica – avevano già da tempo realizzato metodi più potenti, e comunque non sappiamo quanto della loro matematica sopravvivesse ai tempi di Talete e Pitagora; ma alcuni indizi (le testimonianze degli scrittori antichi sui contatti con i sacerdoti egizi) ci orientano piuttosto in direzione dell'Egitto e delle civiltà rivierasche.

A parte la questione dell'eventuale influenza dell'aritmetica egizia su quella greca e delle sue modalità in relazione alla formazione del concetto pitagorico del numero, potremmo chiederci se la sua struttura non sia il passaggio necessario e quindi universale che dal semplice contare conduce gradualmente a forme più evolute, come presso i popoli mesopotamici. A favore di questa tesi è il carattere chiaramente 'minimale' dell'aritmetica dei papiri. L'obiezione è che si può procedere più efficacemente elaborando procedure di calcolo capaci di eseguire rapidamente moltiplicazioni e divisioni. Sembrerebbe che i Babilonesi abbiano seguito piuttosto la seconda via, ma potrebbe essere che ciò sia avvenuto in un momento successivo, qualora avessero riflettuto sulla possibilità di migliorare superando il metodo in uso. Il metodo egiziano è chiaramente euristico, ed è verosimile che questo approccio sia il primo che storicamente sia stato adottato, nella fase di formazione del metodo, e per di più è condizionato dalla misurazione e dalla ripartizione di quantità concrete; sotto questo aspetto, è la miglior risposta che oggi potremmo dare al problema del passaggio dal contare al calcolare. Ancora a favore di questa tesi, per quanto sia un indizio da non sopravvalutare, è l'uso nel *Baudhāyana Śulbasūtra* vedico di somme e differenze di frazioni con numeratore unitario per esprimere numeri razionali con numeratori e denominatori elevati, e il probabile utilizzo di metodi analoghi alle approssimazioni di figure curvilinee mediante figure rettilinee.

Sembra che gli Egizi riuscissero a calcolare la somma della serie dei quadrati $\sum_{1}^{n} k^2$ senza conoscere alcuna formula al riguardo. La procedura è relativamente banale, basata sul calcolare la potenza $n -$ esima di k moltiplicando quella precedente nella serie, cioè di esponente $n - 1$, per k.

Gli Egizi avevano quindi un concetto della ricorsione, che applicavano iterando semplicissime *routines* di calcolo.

Non è chiaro se fossero a conoscenza di formule algebriche elementari quali

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \text{ o } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Esempi di calcolo di radici quadrate farebbero supporre che sapessero sviluppare il quadrato di un binomio. Due problemi chiedono il calcolo delle radici quadrate di $6 + \frac{1}{4}$ e di $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. Il risultato non è immediato, *se ammettiamo che in ogni caso impiegassero frazioni con numeratore uguale a 1, even-*

tualmente limitandosi alle potenze di $\frac{1}{2}$. Si consideri $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \left(1+\frac{1}{4}\right)^2$; ora è immediato che la radice quadrata è $\frac{5}{4}$. Nel primo caso, cerchiamo a e b anche frazionari tali che il numero proposto sia il quadrato di un binomio. Posto $b = \frac{1}{2}$, troviamo che il quadrato di a sommato al doppio prodotto di a per $\frac{1}{2}$, cioè $a^2 + a$, deve essere 6; si vede che $a = 2$. La radice cercata è $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$, che avremmo subito trovato calcolando direttamente $\sqrt{\frac{25}{4}}$.

I procedimenti esposti sono estremamente artificiosi, ma sono giustificati dall'uso di scomporre i dati in somme di potenze di 2 o di $\frac{1}{2}$ o comunque di impiegare solo frazioni con numeratore unitario. Si tratta di limitazioni di calcolo fortissime, superabili in parte solo con il ricorso sistematico a tabulazioni assai estese, che lasciano molti dubbi sulle nostre conoscenze intorno alle capacità di calcolo degli antichi Egizi. Possibile che in tanti secoli non avessero escogitato di meglio? Poteva esservi qualche impedimento al riguardo, come la sacralità dei metodi impiegati? Non sembra una buona spiegazione, pur tenendo conto della differenza di 'forma mentis' che ci separa; i problemi di cui siamo a conoscenza avevano carattere pratico, e pratiche avrebbero dovuto esserlo anche le tecniche di calcolo.

Sembra che gli Egizi approssimassero il rapporto tra circonferenza e raggio a $8\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{512}{81} =$ ca. 6,321, corrispondente a $\pi = 3{,}16049\ldots$ mentre il valore corretto è $3,\ 14159\ldots$ Lo si deduce da un problema del papiro Rhind, che chiede di calcolare l'area di un cerchio di diametro 9 'khet' dando la risposta 64 'setat' ottenuta sottraendo dal diametro la nona parte ed elevando il resto al quadrato. Infatti, detto d il diametro, la formula $\frac{\pi}{4}d^2 = (\frac{4\cdot 64}{4\cdot 81})\cdot 81$ fornisce 64. Lo scriba avrebbe considerato l'area di un cerchio equivalente a quella di un quadrato di lato uguale agli otto noni del diametro, un metodo euristico e artigianale matematicamente assai primitivo, con un risultato meno corretto dell'approssimazione di π a $3 + \frac{1}{7}$ alla quale sembra riferirsi la costruzione della Grande Piramide, precedente di ca. un millennio. Il confronto tra i due valori è la principale obiezione all'idea che il perimetro della base della Piramide si riferisca al rapporto tra circonferenza e raggio, in base direi principalmente al concetto per cui la conoscenza debba progredire invariabilmente nel procedere del tempo. È evidente che se si accetta che i suoi progettatori avessero fissato nella costruzione una conoscenza superiore a quella scritta in papiri molto più recenti si deve dedurre una qualche decadenza della matematica e più in generale della scienza nell'antico Egitto, ovvero che ben prima dell'epoca della redazione dei papiri a noi pervenuti si fosse in possesso di un sapere superiore a quanto documentato. Lo stesso sospetto può essere formulato rispetto alla matematica babilonese del regno antico [ROBSON 2005]. L'aritmetica del *Baudhāyana Śulbasûtra* è inferiore a quella delle tavolette babilonesi pur essendo di mille anni più recente; ma non è necessario fare paragoni tra periodi diversi della stessa civiltà o di civiltà diverse, peraltro incerti, basterebbe considerare ciò che è accaduto nell'area mediterranea e nell'Europa occidentale nei secoli tra la tardissima antichità e il XII secolo circa. Benché qualsiasi speculazione su un sapere antico superiore sia solo tale per la totale o quasi assenza di documentazione, l'ipotesi sottostante non può essere *a priori* scartata in base ad un'altra ipotesi – quella della crescita irreversibile del sapere – le cui basi sono storicamente ancora più deboli, in quantro controfattuali.

L'aritmetica esposta nei papiri appare tutt'altro che efficace, anzi è difficilmente applicabile, richiede procedimenti lunghi e 'soggettivi' nella misura in cui esigono abilità da parte del calcolatore. Inoltre, *non sappiamo quale fosse lo scopo dei documenti pervenutici*, il che dovrebbe applicarsi anche alle tavolette babilonesi. Sembrano essere spesso collezioni di esempi, non documenti di archivio relativi a progetti, o di carattere amministrativo, ma piuttosto adatti all'addestramento dei giovani aspiranti alla professione del calcolatore. Non è possibile spiegare diversamente la compresenza di problemi diversi, e soprattutto il fatto che i numeri che vi compaiono sono tali per cui si arriva al risultato senza eccessivo sforzo. È quindi azzardato pensare che quanto ci è pervenuto dell'aritmetica, in particolare di quella egizia (per i Babilonesi abbiamo una quantità di reperti tale da consentirci di avere un quadro più chiaro), sia veramente rappresentativo delle loro abilità di calcolo.

Se i metodi di calcolo ci sembrano farraginosi, le nozioni di geometria sono più sicure. Nei papiri troviamo correttamente risolti problemi di aree e volumi anche di solidi: trovare il volume di un cilindro dati il diametro delle basi e l'altezza, o di un tronco di piramide a basi quadrate, applicando anche in questo caso una formula generale. Non è chiaro però come vi fossero giunti.

Il rapporto tra circonferenza e diametro sarebbe incorporato nelle misure della Grande Piramide di Giza, essendo approssimato correttamente fino alla seconda cifra decimale dal rapporto tra il perimetro della sua base quadrata e l'altezza. I lati della base e l'altezza misurano rispettivamente 230,6 m e 146,7 m (questa era la misura originaria; quella attuale è minore). La base è quasi esattamente quadrata, con un errore sulla lunghezza dei lati di 5,8 cm, e sull'ampiezza degli angoli ai vertici di 12 secondi d'arco. Gli errori percentuali sono di una parte su quattromila per quanto riguarda i lati, di un quinto di minuto primo cioè di un trecentesimo di grado per gli angoli della base. Tutte le piramidi simili a una piramide data sono caratterizzate da un solo parametro, che può essere il rapporto tra la metà del lato della base con l'altezza, o l'ampiezza del diedro formato da ciascuna faccia laterale col piano orizzontale della base, o angolo di inclinazione. Dato il parametro e l'altezza o il lato di base, tutte le altre grandezze sono univocamente determinate. Le relazioni tra il rapporto r della metà del lato con l'altezza e l'angolo di inclinazione α sono date da $r = \operatorname{cotg} \alpha$ e $\alpha = \operatorname{arccotg} r$.

È notevole che il rapporto tra il perimetro della base e l'altezza, cioè $\dfrac{922{,}4}{146{,}7} = 6{,}28766\ldots$ sia assai vicino al valore corretto di 2π, cioè 6,28318… dal quale differisce di ca. tre parti su 4000. Difficilmente potrebbe essere una fortunatissima coincidenza, anche se non si può dare per certo che fosse intenzionale, potendo anche dipendere dal metodo seguito per progettare la costruzione. È chiaro che il progettista ha prefissato il rapporto tra la profondità e l'altezza in modo da ottenere il rapporto tra circonferenza e diametro, ponendo uguale a 1 la misura dell'altezza, e a $\frac{5}{7}+\frac{1}{14}$ quella della metà del lato di base. Questi numeri non sono casuali, e riflettono le unità di misura; il cubito, l'unità fondamentale delle misure di lunghezza, è diviso in sette 'mani' o 'palmi'; ogni palmo a sua volta è quattro dita. Perciò l'altezza della Grande Piramide sta a 1 cubito reale come la metà del lato di base sta alla somma di 5 palmi e due dita $(5/7+2/(7\cdot4)$. Infatti, $\frac{5}{7}+\frac{2}{28}=\frac{11}{14}$; moltiplichiamo per 8 il risultato e riduciamo; otteniamo che il rapporto tra il perimetro della base e l'altezza è $\frac{44}{7}$ = ca. 6,28571… in ottimo accordo con il valore 6,28766… calcolato prima a partire dalle misure di lunghezza (ne differisce per una parte su tremila). Questo corrisponde a un angolo di inclinazione uguale ad $\operatorname{arcotg}\left(\frac{115{,}3}{146{,}7}\right)$ = ca. 51° 50' 3''; il valore 'teorico' $\frac{44}{7}$ corrisponde a ca. 51° 50' 34''. La differenza è poco più di mezzo primo. Se, data la base, adottassimo un valore di 2π differente di 0,01 da quello indicato dalla Piramide, l'altezza varierebbe di $115{,}3\cdot0{,}01{:}8$ m, cioè di ca. 15 cm. La differenza tra il valore $\frac{44}{7}$ che attribuiamo alle intenzioni del progettista e quello 'realizzato' è $2{:}1000$, cinque volte più piccolo di 0,01. Se veramente le dimensioni furono scelte intenzionalmente, la precisione della costruzione ha dell'incredibile. Forse, questa è l'obiezione principale contro l'idea che la Piramide possa realizzare nelle sue dimensioni il rapporto tra circonferenza e diametro: la precisione necessaria per l'altezza è paragonabile a quella con cui furono tracciati i lati.

Stranamente, parrebbe che gli scribi preferissero $8 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$ al più corretto (e semplice) $\frac{44}{7}$. Forse, nozioni acquisite in tempi antichissimi furono andate perdute, a causa p. es. di torbidi politici, o della volontà di mantenere il segreto.

Proprio in base a questa discrepanza tra il valore approssimato di π del papiro Rhind e quello riconoscibile nella Grande Piramide si è negato che in questa si volesse rappresentarlo: "Vi sarebbero parecchi aneddoti sulle presunte relazioni geometriche esistenti tra le dimensioni della Grande Piramide, ma alcuni sono evidentemente falsi", tra i quali quello appena esaminato, dove si mette in dubbio l'*intenzione* di raffigurare 2π nel rapporto tra perimetro della base e altezza della piramide [BOYER], nel senso che non è detto che i progettisti conoscessero l'approssimazione di 2π con $\frac{44}{7}$. Ora, la prudenza – necessaria vista l'infondatezza di presunte scoperte matematiche riguardanti la Grande Piramide – non deve giungere al punto di negare l'evidenza, l'essere l'approssimazione suggerita dalle misure della Piramide migliore di quella riportata nel Rhind.

Escluso il caso, che sembra estremamente improbabile, di una fortunatissima coincidenza, o di un risultato non voluto ma dovuto al modo in cui la Piramide fu costruita (detto altrimenti: i progettisti riuscirono a edificarla con grande precisione senza sapere quello che facevano), non si vedono altre spiegazioni che escludano l'intenzionalità. Può essere che, data l'estrema precisione nella scelta delle dimensioni, l'esser andati così vicini al valore esatto di π fosse fortuna, pur ammettendo che i costruttori avessero in mente il valore approssimato dato da $\frac{44}{7}$ un numero dato da una formula semplice, otto volte la somma di cinque palmi di mano e due dita. L'obiezione del Boyer è che il valore di π adottato dallo scriba del Rhind è diverso da quello ricavabile dalle misure, ed essendo il primo quello prevalente, diremmo 'ufficiale', il secondo non possa essere ritenuto parte delle conoscenze dei progettisti. Questa obiezione è debolissima, per almeno due motivi. Anzitutto, dai pochi documenti in nostro possesso, è molto difficile dedurre che vi fosse un valore accettato universalmente di π in tutta la storia precedente la redazione del Rhind, o anche dopo. Il calcolo di π aveva carattere semiempirico; certamente furono proposti valori diversi. In secondo luogo, non è da escludere che le conoscenze dell'epoca in cui fu edificata la Piramide fossero superiori a quelle rivelate dal Rhind, date la perizia tecnica e le capacità organizzative che la costruzione doveva aver richiesto.

Ammesso che la Grande Piramide celi il mistero di 2π, abbiamo una spiegazione sufficiente della forma che le fu data, spiegazione che è a nostro avviso un forte indizio a favore. Ci dobbiamo chiedere il perché fu costruita secondo un preciso disegno. Non si costruisce una struttura così imponente con dimensioni scelte arbitrariamente, ma dopo aver deciso di assegnare un valore ben preciso a un parametro, da cui la forma dipenda. Questo dovrebbe essere un angolo di inclinazione, tra gli spigoli laterali e il piano della base, o – meglio – tra le altezze e mediane delle facce laterali e la giacitura della base. Ricordiamo che i costruttori erano capaci di tracciare angoli (retti) con grandissima precisione; supponiamo fossero in grado di erigere la piramide in modo da mantenere costante una inclinazione entro l'errore di un primo, o poco più (12" per gli angoli di base). Questa dipende dal rapporto tra profondità della base e altezza: realizzato un modello in scala, da questo si può dedurre l'inclinazione; vista la precisione richiesta, dovrebbe essere stata ottenuta mediante calcoli, ma nulla dimostra che sapessero eseguirli. Non è però detto che fosse necessario: un modello di triangolo rettangolo nel quale i cateti hanno dimensioni prefissate (nel rapporto $1 : \frac{11}{14}$), se ben realizzato, costruisce l'angolo. Supponendo che la precisione dei cateti sia una parte su mille, l'errore assoluto sull'angolo sarebbe di 6' (una parte su 500 di 50°); ma dovrebbe essere possibile fare di meglio, quanto sarebbe bastato – con un po' di fortuna – per realizzare nella Piramide le cui dimensioni si avvicinano al valore desiderato di $\frac{44}{7} = 2\pi$.

Resta da comprendere come fossero giunti a $\frac{44}{7}$. Piuttosto che a calcoli approssimativi e ragionamenti lambiccati, potevano essersi risolti ad una misura fisica diretta, facendo scorrere su una retta un cilindro o disco di raggio o diametro noto, e misurare il percorso descritto per un giro completo. Si osservi che il denominatore è il rapporto tra il cubito reale e il ‘palmo’, cioè appunto 7 , e quindi la circonferenza rettificata di diametro 1 cubito misura 22 palmi cioè 3 cubiti più un palmo, ca.3,14286 cubiti.

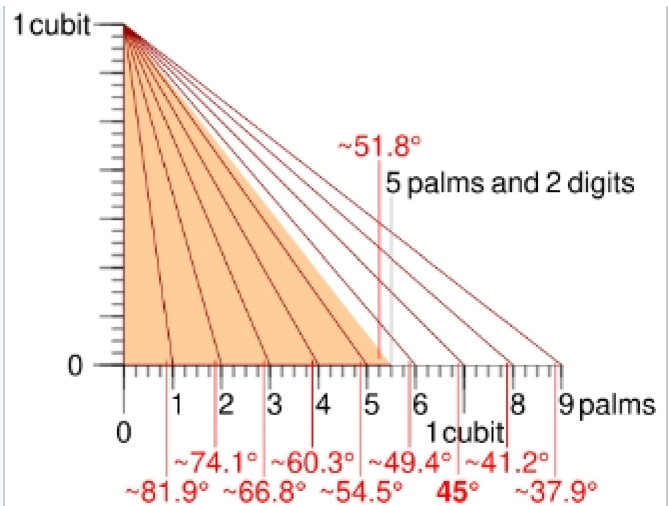


Illustrazione dell’inclinazione della Grande Piramide (la zona colorata) da: [Seked - Wikipedia]

Abbiamo esaminato le dimensioni della Piramide di Cheope assumendo che la giustificazione delle sue dimensioni stia nel rapporto tra circonferenza e diametro, ma le sue caratteristiche geometriche, invero straordinarie, possono essere interpretate anche in altri modi.

L'area delle facce laterali uguaglia il quadrato dell'altezza.[23]

---

[23] Ho assunto questa informazione dalla lettura della monografia sul numero aureo del prof. Mario Livio, astrofisico israeliano (Bucarest 1945), che erroneamente la attribuisce ad Erodoto. Questi parla delle piramidi nel II libro delle *Storie* riportando quanto avrebbe appreso dai sacerdoti, e descrivendo le tecniche adottate in particolare per quanto riguarda la costruzione della piramide di Cheope. La misura riportata per i lati di base è corretta (800 piedi; un piede è ca. 0,3 m), ma sbaglia quando afferma che l'altezza è uguale al lato di base. Invece sarebbe corretta la misurazione attribuita a Talete, dando credito a *Spence-Regan*, 'Defining Similarity'; *Mathematics 3° ESO,* 'Thales and the Great Pyramid of Cheops'. La misurazione sarebbe stata effettuata nel momento in cui la lunghezza dell'ombra uguaglia l'altezza; questa indicazione sembra improbabile, perché la narrazione tradizionalmente tramandata suggerisce che per trovare l'altezza Talete avrebbe sottratto dalla distanza tra il vertice dell'ombra della piramide e il centro della base metà del lato di base, il che esige che il raggio del sole passante per il vertice della piramide e terminante nella punta dell'ombra sia complanare con l'altezza di una delle facce laterali, il che può accadere più di una volta durante il giorno, ma non necessariamente quando l'inclinazione dei raggi del Sole è di 45°. Tutto il racconto della misurazione di Talete appare improbabile. Né Erodoto né Plinio il Vecchio ne fanno cenno.

Plinio il Vecchio riporta correttamente la lunghezza del lato di base, ma anche lui fornisce una misura molto errata dell'altezza.

Anche l'idea che il rapporto tra altezza di ciascuna faccia laterale e metà del lato sia uguale al numero aureo φ è stata avanzata dal prof. Livio.

L'altezza di ciascuna faccia laterale è 186,6 m, deducibile dall'altezza della Piramide e dalla metà del lato di base. Il quadrato dell'altezza è $(146{,}7)^2$ m^2 = ca. 21.521 m^2, con la precisione di una parte su cinquecento approssimativamente[24], e l'area delle facce laterali 115,3 x 186,6 m^2 = ca. 21.514 m^2, pressappoco con quella di una parte su duemila. Le due misure sono vicinissime, differiscono per ca. una parte su tremila. Il risultato è migliore di quanto si dovrebbe dedurre dal calcolo teorico della precisione, che dovrebbe essere ancora una parte su cinquecento, ma l'idea che $h^2 = a\,x$ dove h, a, x sono rispettivamente l'altezza della piramide, quella delle facce laterali e la profondità, o metà del lato di base, sembra confermata dai calcoli.

Il rapporto tra le altezze delle facce laterali e la profondità della Piramide è uguale al numero aureo 'φ' = ca. 1,61803… Il valore esatto è $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; il reciproco è la 'sezione aurea'.

[24] Queste valutazioni sono solo indicative. Per l'altezza, non ho modo di calcolare l'errore di misura; l'incertezza assoluta deducibile dalle misure rese note sembra dell'ordine di 10 cm, che appare un po' troppo ottimistica. In mancanza di dati più accurati, ho ipotizzato che quello fosse l'errore compiuto a costruzione completata. Ma, se veramente la Piramide era stata costruita con un angolo di inclinazione di 51,8° rispettando la precisione di 12'' degli angoli del quadrato di base, l'incertezza sull'altezza avrebbe potuto essere di pochi centimetri, paragonabile a quella dei lati della base. Non è possibile valutare esattamente fino a qual punto giunsero le capacità tecniche dei costruttori, e probabilmente i calcoli qui riportati sono eccessivamente ottimistici.

In effetti, $\frac{a}{x} = 1{,}61838$; se accettiamo la quarta cifra decimale arrotondata a 4, la differenza dal valore esatto è di quattro parti su 10.000.

Questi risultati non possono non lasciare stupiti. Per quanto sia assolutamente legittimo dubitare delle misure dei lati, non si può trascurare che nella Piramide due rapporti approssimano anche troppo bene π e φ; una coincidenza potrebbe essere un caso, ma è difficile pensare che lo sia la compresenza di due numeri peraltro significativi. Se aggiungiamo l'equivalenza del quadrato dell'altezza e delle superfici delle facce laterali, l'idea che tutto ciò sia casuale diventa estremamente improbabile, a meno di ammettere che i costruttori mirassero a realizzare solo una delle caratteristiche geometriche (p. es., l'uguaglianza delle aree), ottenendo le altre non intenzionalmente. È un'idea strana, ma possiamo ammettere che la Piramide fosse in sé eccezionale proprio per la compresenza delle tre caratteristiche: in tal modo però troviamo una più che plausibile ragione per costruirla in un certo modo, appunto l'eccezionalità.

Il numero φ si ritrova anche nel rapporto $\left(\frac{h}{x}\right)^2$, come si può verificare direttamente; ma ci possiamo arrivare anche algebricamente. Il problema, a questo punto, è se i progettatori si rendessero conto di queste relazioni geometriche. Infatti, da

$$h^2 = a\,x \quad \text{e} \quad a = \sqrt{h^2 + x^2}$$

otteniamo

$$h^2 = x\sqrt{h^2+x^2} \quad \text{e} \quad h^2 = x^2\sqrt{\left(\frac{h}{x}\right)^2+1} \;,\; \left(\frac{h}{x}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{h}{x}\right)^2+1}$$

poniamo ora $\left(\frac{h}{x}\right)^2 = z$ ed eleviamo al quadrato; otteniamo

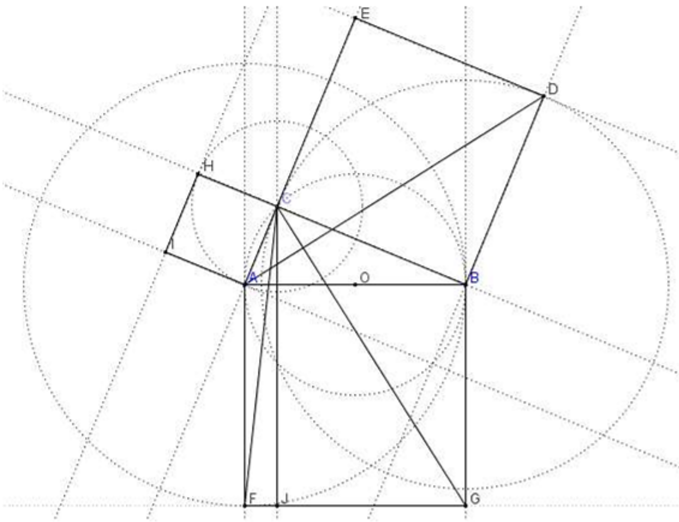
$z^2 = z + 1$, la cui soluzione positiva è appunto φ.

È evidente che la costruzione dipende dall'angolo di inclinazione, α. Se – come già discusso in precedenza – i costruttori sono partiti dall'idea che il perimetro di base fosse 2π volte l'altezza h, allora la Piramide soddisfa l'uguaglianza

$$\tan(\alpha) = \frac{4}{\pi} .$$

Questo teorema è fondamentale per la trigonometria, intesa nel senso generico di calcolo dei lati di un triangolo a partire da alcuni dati noti. In generale, questi sono tre tra angoli e lati, ma uno dei dati deve essere un lato. Tutti i poligoni sono unione di triangoli, e tutti i triangoli sono somma o differenza di triangoli rettangoli.

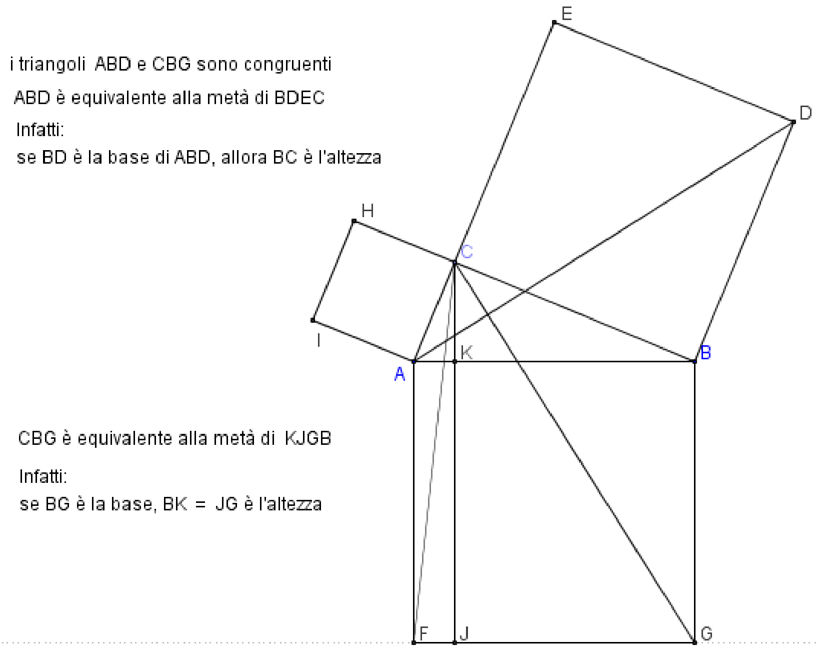
Nella 47ª proposizione del libro I, Euclide ci ha offerto una magistrale dimostrazione. Pur non essendo con tutta probabilità la dimostrazione data dai pitagorici, vale la pena esaminarla se non altro per constatare la potenza dei metodi della geometria piana basati su equivalenze e similitudini.



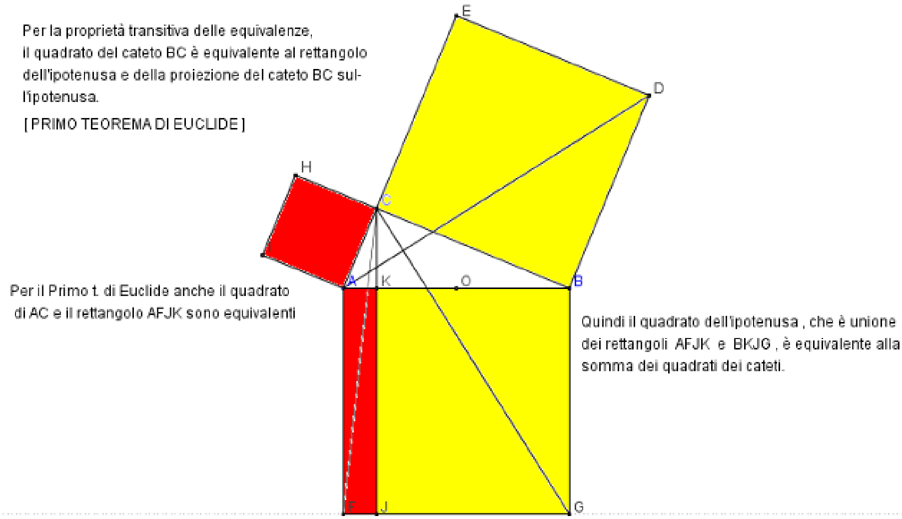
Dobbiamo dimostrare che il quadrato costruito su AB è la somma dei quadrati costruiti sui cateti AC e CB.

Il primo passo consiste nel dimostrare che i due triangoli ABD e CBG sono congruenti, per il primo criterio.

Saranno quindi equivalenti anche il quadrato di lato CB e il rettangolo di lati KB e AF, cioè il cateto BC e l'ipotenusa (fig. seguente):

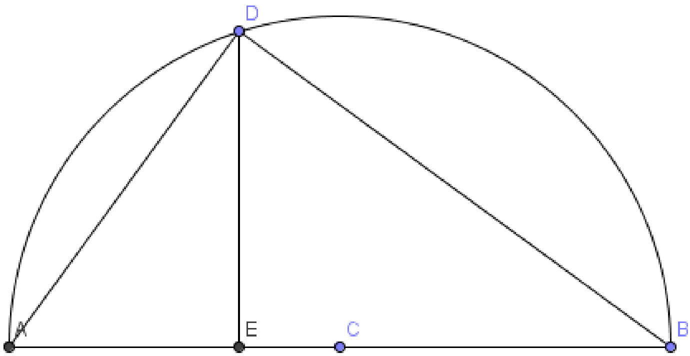


Abbiamo ottenuto la dimostrazione del primo teorema di Euclide, per il quale il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa. Applicato al cateto AC, otteniamo che anche il quadrato di AC è equivalente al rettangolo di lati AK e AF (non è necessario eseguire nuovamente gli stessi passaggi per il cateto AC ; comunque, i due triangoli equivalenti sono ACF equivalente a metà del rettangolo AFJK , e ABI equivalente a metà del quadrato del cateto). La somma dei quadrati dei cateti equivale quindi al quadrato dell'ipotenusa.



Questa elegante, raffinata costruzione implica solo la congruenza dei triangoli, l'equivalenza di un triangolo con la metà di un quadrato o rettangolo avente stessa base e altezza, e l'assioma per cui $a = b$ e $c = d$ implicano $a + c = b + d$. In teoria sembra alla portata dei matematici del V secolo e forse anche prima, se guardiamo solo alle nozioni sufficienti per la dimostrazione, ma ci dobbiamo attendere che le prime dimostrazioni non manifestassero tanto stile. Inoltre, *la prova offerta da Euclide confronta i quadrati dei cateti con rettangoli aventi un lato congruente all'ipotenusa*, e quindi è in funzione di una tesi che in realtà è già nota. È quindi una verifica del teorema, e può essere che lo fosse anche la prima dimostrazione; il teorema potrebbe essere stato congetturato in base a dati parziali ottenuti empiricamente. Dobbiamo quindi separare la dimostrazione dalla scoperta della relazione tra cateti e ipotenusa, che logicamente era una congettura formulata su base empirica.

Nella sua monumentale traduzione e commento degli *Elementi*, in una nota alla prop. 47 del I libro, il prof. *Heath* esplora i problemi e i misteri che legano il teorema al suo presunto scopritore. In realtà non ha molta importanza a chi in particolare fosse dovuta la dimostrazione; d'altronde, se veramente risale alla scuola pitagorica originaria, la paternità della scoperta o dimostrazione era condivisa. Ma lo stesso Heath, nella sua nota-commento, ci offre un'indicazione citando Proclo, il quale pur dicendosi ammirato dalla prova del I libro, lo è ancor di più perché in VI.31 Euclide "dimostrò irrefutabilmente il teorema più generale [esteso ad altre figure oltre al quadrato] con irrefragabili argomenti scientifici nel VI libro. Perché in quel libro dimostra in generale che, nei triangoli rettangoli, la figura [costruita] sull'ipotenusa è uguale alle figure simili costruite allo stesso modo sui cateti [cioè, è uguale alla somma delle figure ecc.]." Il 'teorema più generale' si appoggia ai triangoli simili separati dall'altezza relativa all'ipotenusa. Tutto il VI di Euclide elabora la teoria della similitudine, e vi troviamo la proposizione 8, dalla quale il teorema discende direttamente: "Se in un triangolo rettangolo si traccia la perpendicolare dall'angolo retto alla base [l'altezza relativa all'ipotenusa], i triangoli adiacenti alla perpendicolare sono simili sia all'intero [triangolo] che l'un l'altro". Più oltre, nella prop. 13, ci è spiegato come costruire la media geometrica di due segmenti dati:



Dalla similitudine dei triangoli AED e EBD con ABD troviamo che i cateti sono medi proporzionali tra l'ipotenusa di ABD e le rispettive loro proiezioni sulla stessa; da cui

$$AD^2 + BD^2 = AE \cdot AB + EB \cdot AB = (AE + EB) \cdot AB = AB^2;$$

dalla similitudine tra AED e EBD, che l'altezza DE è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa AB.

La costruzione era fattibile già da Talete, se davvero sapeva che un angolo retto è inscrivibile in un semicerchio. Come già detto, la similitudine doveva essergli nota. (*vedi*)

Questo richiamo alla similitudine è suffragato dal seguente giudizio del *Tannery*[25] (1887): "Proclo afferma chiaramente che la dimostrazione dovuta ad Euclide è proprio sua; ma quella di

25 A pag. 105.

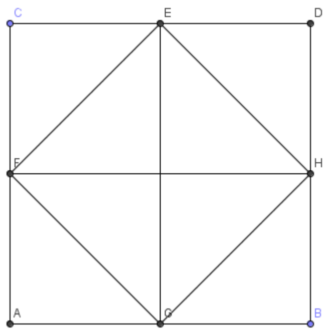
Pitagora è a noi assolutamente ignota, *ed è una fatica inutile cercare i ragionamenti più primitivi per attribuirglieli*. *La Geometria Pitagorica era già abbastanza avanzata perché potesse fare la dimostrazione per mezzo di triangoli simili.*" E ancora: "La sostanza del I Libro di Euclide, seguendo le abbastanza precise testimonianze di Proclo, appartiene in ogni caso ai pitagorici e a loro attribuisce anche le teorie del libro VI."

La cosa più sensata sembra quella di seguire il suggerimento di Tannery, e ammettere che i pitagorici avessero elaborato una dimostrazione del teorema basata sulla similitudine. A parte le affermazioni di Proclo, vi concorrono due elementi: primo, la tradizione afferma che Talete conosceva la similitudine e sapeva farne uso; ora, Talete precede Pitagora forse di sessant'anni e forse più, e non si vede come Pitagora potesse conoscere la scienza degli Egizi e chissà cos'altro e nello stesso tempo ignorare i risultati ottenuti da Talete; secondo, se fra le tre prime medie troviamo la geometrica, vi è da supporre che i primi pitagorici sapessero come costruirla. È chiaro che non impiegavano approssimazioni, già possedendo un metodo geometrico che restituisce *esattamente* il risultato. Può anche essere che, prima di questa, fossero note altre prove; ma qui si entra nell'ambito della speculazione.

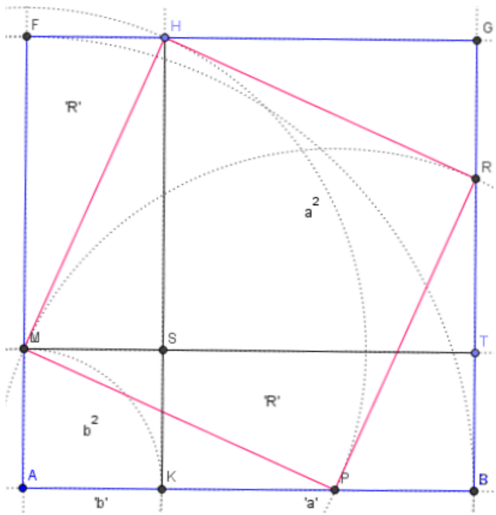
Ma, se era così semplice ottenere certi risultati, è lecito pensare che vi fossero pervenuti ben prima le più antiche civiltà geograficamente vicine alla Grecia. È impensabile che non conoscessero la similitudine (serve per fare disegni in scala), o che ignorassero l'inscrivibilità di un angolo retto in un semicerchio (basta accorgersi che per i vertici di un rettangolo passa una circonferenza avente per diametro la diagonale). Le ‘scoperte’ o nozioni attribuite a Talete riguardano proprio gli argomenti che stiamo trattando. Gli antichi scrittori ci assicurano che Talete cercò le prove di ciò che forse aveva appreso (se si apprende qualcosa di cui non si conosce la dimostrazione, si può esser tentati di cercarla, o almeno di accertarsene); ma a maggior ragione dovevano esservi pervenuti proprio coloro che per primi avevano scoperte certe proprietà. Eppure, non abbiamo nessun indizio di ciò che sembra naturale supporre, che anche i metodi e non solo le informazioni giunte in possesso ai Greci venissero dai popoli vicini. Non solo; qualunque fosse il punto di partenza, gli sviluppi successivi in Grecia sembrano indipendenti da influssi esterni. Dico ‘sembrano’ perché potrebbero essere stati più consistenti delle apparenze, ma taciuti o mascherati. Il punto centrale su cui forse gli studiosi a noi contemporanei hanno troppo insistito è l’algebra geometrica. I Babilonesi e gli Egizi, e altri, potrebbero aver risolto molti problemi senza esprimerne le soluzioni in un linguaggio formale, ma essersi limitati a esemplificare i risultati ottenuti attraverso singoli esempi che fungessero da paradigmi. Non ci sarebbe stato bisogno di formule, e di nessuna algebra. I metodi sarebbero illustrati dagli esempi paradigmatici offerti agli studenti. Se le cose stavano in questo modo, poteva essere molto difficile per un forestiero apprendere i metodi oltre alle semplici informazioni. Le formule servono anche a trasmettere la scienza matematica, proprio perché la condensano in pochi simboli, facili a memorizzare, universalmente applicabili.

Se proprio si vuol cercare una dimostrazione più semplice o più ‘primitiva’ perché non fa uso della similitudine e delle proporzioni, *benché avvertiti che Pitagora si interessò proprio alle proporzioni*, le risposte non mancano, alcune effettivamente alla portata di una matematica non ancora molto avanzata, che ignori i risultati attribuiti a Talete.

La più ragionevole sembra essere quella che sfrutta il metodo di scomposizione. Supponiamo di inscrivere in un quadrato A di lato l un altro quadrato B, in modo che i suoi quattro vertici coincidano con i punti medi dei lati di A. È chiaro che B equivale alla metà di A, metà che a sua volta è la somma di due quadrati aventi per lato la metà di l. Ma ogni lato di B è l’ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono uguali alla metà di l, e quindi – nel caso particolare del triangolo rettangolo isoscele – il quadrato dell’ipotenusa è proprio la somma dei quadrati dei cateti. Un disegno ci fa comprendere immediatamente quanto esposto:

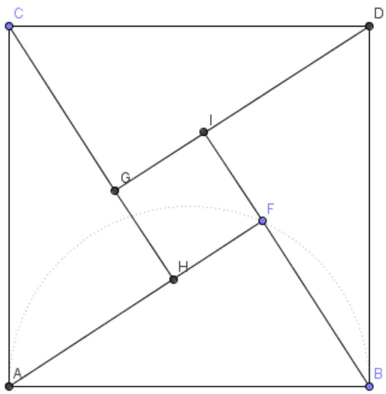


Ci possiamo chiedere se la proprietà vera in un caso singolo possa estendersi anche a casi in cui il quadrato inscritto è diversamente orientato, rompendo la simmetria della figura.



Il quadrato interno stacca dal maggiore quattro triangoli rettangoli congruenti, le cui ipotenuse sono lati del quadrato interno, lasciando come resto la somma di due quadrati di lati a e b , che sono i cateti dei triangoli rettangoli. Quindi il quadrato delle ipotenuse è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti. Questa dimostrazione è stata sostenuta dal *Bretschneider* (1870) ed è ritenuta la più verosimile da parte del *Reghini* nella sua *Restituzione della geometria pitagorica* (1935). *Heath* la prende in considerazione, con riserva, ma preferisce la dimostrazione basata sui triangoli rettangoli simili separati dall'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

A titolo di curiosità, riporto la dimostrazione di *Bhāskara*, matematico indiano del XII sec.



La somma dei quattro triangoli rettangoli congruenti è equivalente alla differenza tra il quadrato maggiore e il quadratino al centro, Q.
Il lato di Q è la differenza tra il cateto maggiore e il minore.
Q è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti diminuita del loro doppio prodotto.
La somma dei quattro triangoli è equivalente alla differenza tra il quadrato dell'ipotenusa e la somma dei quadrati dei cateti, cui dobbiamo aggiungere il doppio prodotto dei cateti, che è equivalente alla somma dei quattro triangoli.

La somma dei quattro triangoli compare in entrambi i membri dell'uguaglianza, per cui la differenza tra il quadrato dell'ipotenusa e la somma dei quadrati dei cateti è nulla.

Quindi il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti.

Si noti come l'algebra è nascosta nell'eliminazione di due termini uguali, e lo zero anch'esso implicito nell'annullarsi della differenza tra il quadrato dell'ipotenusa e la somma dei quadrati dei cateti.

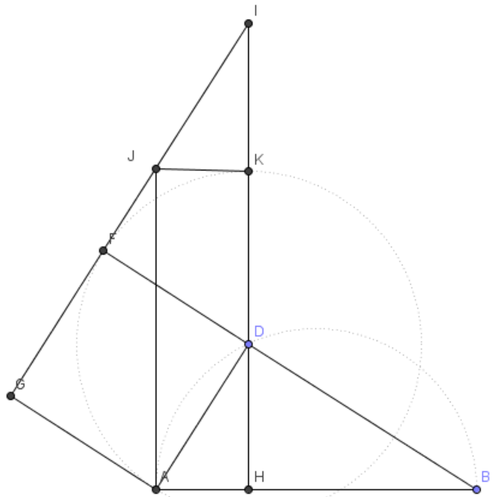
Certamente con il ricorso alle lettere la dimostrazione è molto più semplice: detti l il lato del quadrato maggiore, che è l'ipotenusa, b e c i cateti, possiamo tradurre in algebra i passaggi sopra elencati:

$$2bc = l^2 - (b-c)^2 = l^2 - b^2 - c^2 + 2bc \rightarrow l^2 - (b^2 + c^2) = 0$$

e infine $l^2 = b^2 + c^2$.

È opera di fantasia stabilire come si sia arrivati a *congetturare* il teorema, ma, essendo il triangolo rettangolo una figura fondamentale (si veda il *Timeo*), doveva essere una nozione di antica data. Quindi Pitagora avrebbe dimostrato ciò che si sapeva, sia pure per via empirica. Non sembra che i Babilonesi ne possedessero una dimostrazione nel senso in cui intendiamo oggi il termine, ma la prova di Bhāskara e i metodi di decomposizione non hanno necessità di una struttura assiomatica, e possono essere considerati tali in quanto evidenti per una mente allenata.

Infine, ecco una dimostrazione alla portata dei matematici greci del V secolo, basata solo su criteri di congruenza dei triangoli, e di equivalenza dei parallelogrammi:



Dimostriamo che il quadrato del cateto AD è equivalente al rettangolo AHKJ avente per dimensioni l'ipotenusa AB e la proiezione AH di AD su AB.

Il parallelogrammo ADIJ è equivalente a AHKJ. Infatti AJ = DI perché lati opposti dello stesso parallelogramma, e l'altezza JK è la stessa per entrambi.

Dobbiamo quindi dimostrare la sua equivalenza al quadrato di AD, per dimostrare per la proprietà transitiva l'equivalenza di questo a AHKJ.

Il quadrato e il parallelogrammo sono equivalenti perché hanno in comune la base AD e hanno la stessa altezza DF.

Dobbiamo ora dimostrare che AJ = AB attraverso la congruenza dei triangoli ABD e AJG . Applichiamo il secondo criterio; AD = AG, $D\hat{A}B = G\hat{A}J$ perché complementari dello stesso angolo e $A\hat{B}D = A\hat{J}G$ perché complementari di angoli congruenti.
Le dimensioni di AHKJ sono quindi l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa, e il teorema è dimostrato. Allo stesso modo si procede per l'altro cateto, ecc.

È provato che il teorema era noto presso diverse civiltà prima della sua scoperta, o dimostrazione, da parte dei pitagorici: Babilonia, ca. 2000 – 1900 (le tavolette d'argilla contengono terne pitagoriche) e ca. 1900 – 1600 a.C. (il teorema è applicato nello spazio), e poi Cina e India.

Uno dei reperti più antichi[26], la tavoletta catalogata MS 3052, contiene otto problemi di suddivisione di triangoli e trapezi, con riferimento a situazioni reali quali pareti di fango suddivise in due o più strati separati, riparazione di una breccia in un muro con fango dalla parte superiore del muro ecc; "La geometria nell'antica Babilonia nacque dalle esigenze pratiche di amministratori, geometri e costruttori (Britton et al., 2011, 547). Dalle misurazioni di campi, muri, pali, edifici, giardini, canali e *ziggurat*, è stata forgiata una comprensione metrica [cioè mediante le misure di distanze e non di angoli, come nella moderna trigonometria] dei tipi fondamentali di forme pratiche; tipicamente quadrati, rettangoli, trapezi e triangoli rettangoli, con un interesse molto secondario rispetto ai triangoli in generale." [MANSFIELD-WILDBERGER 2017].

In uno dei problemi della MS 3052, data la diagonale e la base di un rettangolo, si chiede la lunghezza; è evidente che la soluzione passa per il teorema di Pitagora. Problemi su triangoli o

26 Non vi è accordo sulla datazione. *History of Mathematics Project* [vedi] la pone nel 2000-1900, *Schøyen Collection* [vedi] più avanti, tra il 1763 e il 1739.

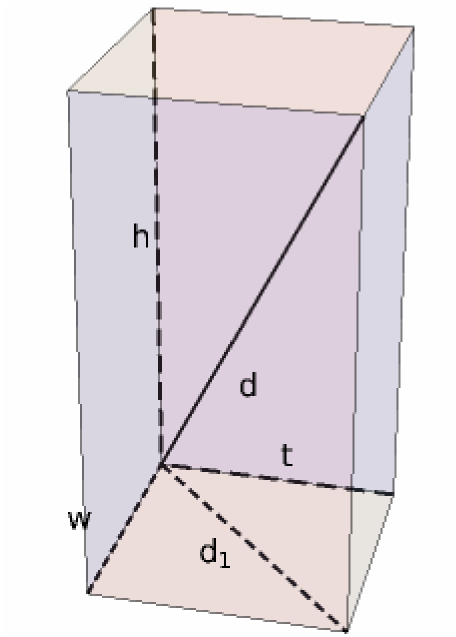
trapezi divisi in due o più parti, comuni nell'antica matematica babilonese, potevano implicare l'equazione $a^2 + b^2 = c^2$ o $a^2 + b^2 = 2c^2$. Il calcolatore si avvaleva di tabelle di terne pitagoriche contenenti solo numeri razionali; il risultato è una 'trigonometria sessagesimale esatta' [espressa cioè in un numero finito di cifre sessagesimali], o 'trigonometria basata sui numeri razionali' [MANSFIELD-WILDBERGER] quale emerge dalle analisi della tavoletta nota come *Plimpton 322*, un reperto lungamente studiato, al momento la più antica tavola trigonometrica pervenutaci contenente un elenco di terne pitagoriche risalente al XIX – XVIII sec. a.C.[27]

Uno sguardo superficiale all'insieme delle conoscenze rivelate dai reperti babilonesi dovrebbe essere sufficiente a riconoscere l'enorme potenza e precisione di calcolo numerico, favorita dall'uso del sistema sessagesimale. Il metodo è radicalmente differente da ciò che vediamo prodotto nella geometria greca, parrebbe già agli inizi. Non abbiamo indicazioni sicure di come i Babilonesi fossero giunti alle conoscenze di geometria che pure dovevano possedere, ma non abbiamo neppure nozione certa di come i Greci svolgessero i calcoli numerici.

I Babilonesi avrebbero applicato il teorema anche allo spazio. La tavoletta MS 3049, appartenente come la MS 3052 alla Collezione *Schøyen* contiene il calcolo della diagonale interna di un cancello rettangolare in un muro, corrispondente alla ricerca

[27] "This allows us to confidently date Plimpton 322 to the 60 years or so before the siege and capture of Larsa by Hammurabi of Babylon in 1762 BCE." [ROBSON 2001]. La tavoletta proverrebbe da Larsa, 24 km a SE di Uruk.

della lunghezza di una diagonale di un parallelepipedo di base quadrata.



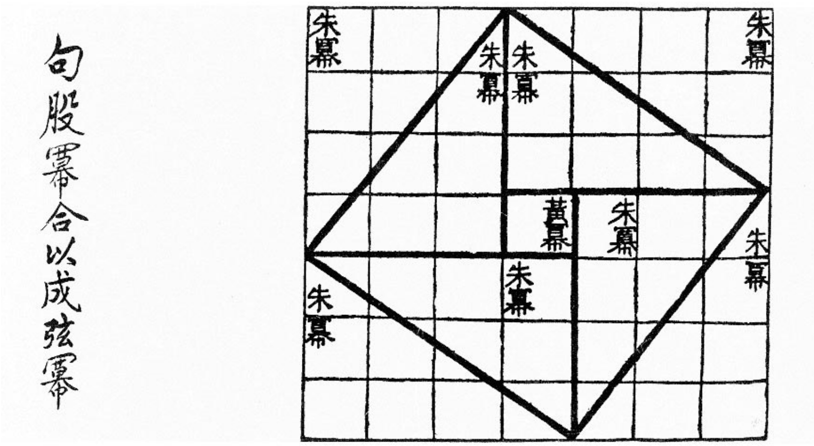
Ricostruzione del problema di MS 3049 da
[History of Mathematics Project | Babylonian Inner Diagonal Tablet]

Quanto ci è pervenuto degli antichi Egizi è insufficiente per definire l'effettivo livello delle loro conoscenze, specie per quanto riguarda il teorema di Pitagora. "Il papiro di Berlino fornisce l'unica prova che gli antichi Egizi potrebbero aver compreso il teorema di Pitagora secoli prima dei Pitagorici. In particolare, il papiro di Berlino contiene quattro problemi, il primo dei quali afferma effettivamente: 'L'area di un quadrato di 100 è uguale a quella di due quadrati più piccoli. Il lato di uno è 1/2 + 1/4 del lato dell'altro.’ In termini moderni, il problema suggerisce le equazioni simultanee $x^2 + y^2 = 100$ e $x = (3/4)y$ che hanno un'unica soluzione positiva $y = 8$ e $x = 6$” [*History of Mathematics Project > Pythagorean Theorem*]. Si tratta evidentemente di una terna equivalente a (3, 4, 5). Il papiro di Berlino risale al 2000 – 1650 a.C; sembrerebbe quindi che i risultati in matematica procedessero parallelamente, o almeno senza grandi intervalli di tempo, in Mesopotamia e in Egitto.

È probabilmente inutile chiedersi se la ‘scoperta’ o dimostrazione pitagorica del teorema sia da mettere in relazione con i viaggi attribuiti al Maestro in Egitto e in Oriente. Verosimilmente, le nozioni di matematica (non le dimostrazioni) erano connesse all’architettura ecc., ed è difficile pensare che quel teorema non fosse conosciuto in Grecia già nel VII – VI sec., considerando che era noto da più di un millennio; forse lo era anche presso i Micenei, e ancora presso i Fenici ecc.; doveva essere patrimonio comune di tutte le culture tecnicamente avanzate ben prima che ne fosse data dimostrazione. Forse, ma è meno evidente, erano noti anche metodi per ottenere le terne pitagoriche. A questo riguardo, nella sua raccolta di prove del teorema, il *Loomis* (1940) espone come Pitagora avrebbe proceduto: “Dopo aver osservato che la somma della serie dei numeri dispari (1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, ecc.) genera una serie di quadrati, Pitagora formulò la regola per trovare, logicamente, i lati di un triangolo rettangolo: si prende un numero dispari (diciamo 7) che forma il lato più corto, lo si eleva al quadrato (7^2

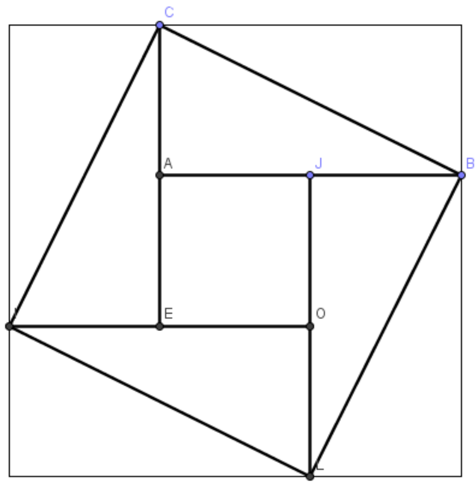
= 49), si sottrae uno (49 - 1 = 48), si divide per due il risultato (48 : 2 = 24); questa metà è il lato (cateto) più lungo, e questo aumentato di uno (24 + 1 = 25) è l'ipotenusa. È l’applicazione di una formula già vista [vedi] e, se impiega solo numeri naturali, non genera tutte le terne possibili. Comunque sia, anche la costruzione di terne pitagoriche non appare una scienza così profonda da non essere alla portata dei Greci del VII – VI secolo.

Interessanti indicazioni possono ottenersi esaminando trattati cinesi e indiani. Nello *Zhoubi Suanjing*, un antico testo cinese di matematica e astronomia forse risalente nella versione originale al XI sec. a.C. (più recente rispetto alle tavolette babilonesi), troviamo la seguente costruzione, affine a quella di *Bhāskara*:



da Chinese Language Stack Exchange

Questa figura può essere generalizzata al caso di triangoli rettangoli scaleni:



Non è certo che la sopraddetta citazione del particolare caso del triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5 risalga così indietro nel tempo, potendo essere una integrazione successiva allo *Zhoubi Suanjing*, e il testo appare poco chiaro[28]; ma vi sono altre applicazioni del teorema in questo trattato [CULLEN 1996, pp. 78 e 81].

Lo schema rientra nel metodo di scomposizione di una figura, e l'unione dei rettangoli contigui rimanda allo *gnomone* che – pare – godeva di grande considerazione da parte dei pitagorici. Il ripetersi di schemi affini in culture diverse può essere segno di un procedimento 'naturale' per la sua semplicità (non richiede conoscenze avanzate), anche se non si può escludere vi siano state commistioni o passaggi di informazioni.

28 Un'approfondita discussione è in Chinese Language Stack Exchange.

Citazioni più chiare del teorema troviamo nella letteratura vedica. Il *Baudhāyana Śulbasûtra*, opera di Baudhāyana, saggio, matematico, filosofo vedico (ca. VIII-VII sec. a.C.), trattando di matematica a scopi rituali (costruzione di altari), fornisce esempi di terne pitagoriche (3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17 ecc.) ed un enunciato del teorema, oltre ad una formula per calcolare $\sqrt{2}$ con cinque cifre decimali corrette: [SHAH]

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \text{ca. } 1{,}414256 .$$

La struttura di questa formula assomiglia a quella trovata in una tavoletta mesopotamica dell'antico periodo babilonese (1900-1600 a.C.).[29]

[29] È interessante notare come l'atteggiamento di alcuni studiosi indiani tenda a sottolineare i contributi scientifici dell'India accreditando dettagli incerti della vita di Pitagora; secondo *B. R. Shah,* "He first received the letter of recommendation from Polycrates of Tyre for advanced learning of Indian asterism and Yogic breathing exercise… he Egyptians told him that he has to go through 40 days of fasting and certain way of breathing exercise before they can admit him. This is typically a Jaina and Ajivikas tradition of that time… Leaving Babylon [dove vi sarebbe stato deportato da Cambise], he made his way through Persia to India, where he continued his education under the Ajivikas, Jaina and Brahmin priests of Taxila School… Pythagoras became a sworn vegetarian and practiced fasting and Yoga (Standing on one leg) This practice is more suggestive of him following of the early form of Jainism or Ajivikas traditions." Una posizione analoga è stata sostenuta da più studiosi, p. es. *R. Garbe* in *The Philosophy of Ancient India* 1899 affermava che "Almost all the doctrines ascribed to Pythagoras, both religio-philosophical and mathematical, were current in India as early as the sixth century before Christ, and even previously."

Due grandezze a e b si dicono ‘incommensurabili’ se il loro rapporto non è un numero razionale, cioè se non esiste una coppia di numeri naturali m, n tale che $m\,a = n\,b$, o che

$b : a = m : n$. Sembra che – prima dei Greci – nessuno abbia scoperto l’irrazionalità di $\sqrt{2}$, che – in quanto rapporto tra diagonale e lato del quadrato – dovrebbe essere all’origine della questione. Indubbiamente, questa scoperta, e per il modo in cui è avvenuta, rappresentò un mutamento profondo nel concepire il numero e la sua relazione con la geometria. Essendo possibile, dato un segmento, costruire la diagonale del suo quadrato, e di contro non essendovi alcuna coppia di numeri naturali che possa esprimerne il rapporto così come veniva concepito, cioè in termini di multipli e sottomultipli di un intero, veniva a mancare un postulato di tutta la geometria pitagorica, e cioè che qualsiasi grandezza spaziale fosse identificabile nel numero, o che i numeri avessero la stessa natura delle grandezze, in modo che tutto lo spazio fosse riconducibile al numero. Soprattutto, veniva a mancare la stessa possibilità di definire il rapporto tra grandezze incommensurabili, per cui i matematici dovettero cercare una definizione nuova, meno legata al calcolo e, per così dire, più ‘concettuale’, aprendo la strada verso un modo di trattare la materia che si allontanava dalla visione computazionale dell’aritmetica e discreta della quantità (se già ciò non era accaduto, se veramente Talete o qualcun altro, prima dei pitagorici, era alla ricerca di dimostrazioni e prove che non fossero solo calcolo o in funzione di questo; sempre ammesso che queste intenzioni non fossero loro attribuite *a posteriori*). Comunque stessero le cose, non possiamo prescindere dalla tradizione, ma è impossibile stabilire *a priori* che cosa si possa o si debba accettare e cosa respingere. La strategia migliore è esaminare le relazioni interne della matematica, nella misura in cui possano condurre a deduzioni univoche, e la questione degli irrazionali è una di queste. Conoscendo la dimostrazione aritmetica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, possiamo vederne la connessione tra aritmetica e geometria e il suo presupposto più verosimile, cioè la classificazione dei numeri interi in pari e dispari. Questa stessa divisione dei numeri in classi è già un segno del distacco dall'aritmetica computazionale, dall'elaborazione di regole che non si distinguono nella loro formulazione dagli algoritmi. Nessun algoritmo può *dimostrare* che un dato numero sia irrazionale, ma sarebbe azzardato supporre che la scoperta della dimostrazione dell'irrazionalità di qualche numero abbia imposto la separazione tra matematica computazionale e matematica deduttiva; è assai più credibile storicamente che il processo sia avvenuto in senso inverso, dall'autonomia della prova razionalmente ottenuta rispetto al calcolo. Non è affatto detto che si sia verificata una rivoluzione del metodo; più semplicemente, si è riflettuto su ciò che apparve come una lacuna nel concetto del numero o una insufficienza nel comprendere i rapporti tra grandezze, dato che ragionamento e calcolo vanno di pari passo. Non è affatto provato che questa svolta sia merito dei pitagorici; poteva essere avvenuta molto prima, ma non abbiamo riscontri; nella tradizione troviamo che si manifestò in modo dirompente in ambiente pitagorico o, se vogliamo essere prudenti, nel V sec. a.C., vivente Socrate o poco prima. Tuttavia abbiamo visto che Archita sosteneva la superiorità della ‘logistica’ sulla geometria, ma forse si riferiva solo alla sua maggiore utilità; in realtà, non lo sappiamo. Inoltre, neopitagorici e neoplatonici non rinunziarono all’idea che il numero fosse fondamentale per comprendere la formazione del mondo intero, su basi filosofiche piuttosto che matematiche.

Abbiamo visto che la scuola pitagorica assegnava grande importanza alla divisione dell’insieme dei numeri in classi, in base alla loro figurazione (triangolari, quadrati ecc.) e alla distinzione in pari e dispari, che potrebbe avere un’origine simbolico-cosmologica prima ancora che puramente aritmetica. Si veda il *Parmenide* per quanto riguarda la connessione tra aritmetica e cosmogonia, o il *Timeo* per quella tra geometria e cosmogonia. Si può procedere oltre, e distinguere tra numeri *pari-pari* cioè prodotto di due numeri pari, *dispari-dispari* prodotti di due numeri dispari, *pari-dispari* cioè ‘misti’. Queste nozioni sono sufficienti per dimostrare l’irrazionalità di $\sqrt{2}$ (condivido l’opinione generale che questo fosse il primo irrazionale scoperto dai Greci, anche per il metodo adottato nella dimostrazione). È assai verosimile che la prova si basasse sulla parità dei numeri interi, una nozione ritenuta fondamentale.

Come premessa osserviamo che, dati due naturali m ed n, è sempre possibile trovarne altri due p e q che stanno nello stesso rapporto, cioè tali che $p : q = m : n$ e non abbiano fattori comuni; quindi non possono essere entrambi pari, dato che in tal caso avrebbero in comune 2. Cerchiamo ora due numeri naturali tali che il loro rapporto sia uguale a quello tra diagonale e lato del quadrato, partendo dal teorema di Pitagora, per il quale il quadrato della diagonale è il doppio di quello del lato. I Pitagorici dovevano sapere che se p e q non hanno fattori in comune lo stesso deve valere per i rispettivi quadrati; quindi se p e q non sono entrambi pari, non lo saranno neppure p^2 e q^2, pur essendo

$$p^2 = 2\,q^2$$

Ne segue che p^2 è pari, e quindi deve esserlo anche p dato che il quadrato di un numero dispari è dispari; allora p^2 è pari-pari e q^2 è pari , per cui q è anch'esso pari; ma avevamo stabilito che p e q non lo sono entrambi. Siamo quindi caduti in contraddizione, conseguenza nell'aver assunto che il rapporto tra diagonale e lato del quadrato sia esprimibile come rapporto tra numeri naturali.

Da questa prova possiamo trarre alcune conseguenze. In primo luogo, la stretta correlazione tra rapporti numerici e figure simili. Se i numeri sono distanze, oggetti dello spazio, i rapporti tra numeri esprimono relazioni tra figure simili, sono rapporti di similitudine. Possiamo parlare di rapporto tra diagonale e lato solo se sappiamo che questo è lo stesso per tutti i quadrati. Dobbiamo quindi ammettere che i pitagorici impiegassero la similitudine nelle loro dimostrazioni in quanto nozione ovvia; p. es. per dimostrare il famoso teorema.

Il secondo aspetto, evidente, è l'importanza del ragionamento, si direbbe del genere dialettico nella misura in cui cerca di confutare una posizione facendo vedere la contraddizione che ne consegue. Ciò implica ammettere la validità delle dimostrazioni per assurdo, cioè che la matematica sia essenzialmente un sistema logico coerente. Non si vede come questo concetto possa derivare dalla computazione. È vero che il calcolo è obbligante, ma lo è in quanto automatico, e sembrerebbe che nel caso della dimostrazione per assurdo non c'entri per nulla. L'affinità con i metodi della dialettica implica a sua volta dei problemi: se veramente la prova dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ risaliva alla scuola di Crotone – come la tradizione affermava – allora la dialettica, o almeno l'arte di scoprire la contraddizione, risale a ben prima di Platone o Zenone; solo che Aristotele la fa ascendere a quest'ultimo, e Platone presenta Parmenide come esperto in essa. Inoltre, *Diogene L.* ascrive lo stesso Parmenide alla 'scuola Italica' attraverso *Senofane* e *Telauge*[30] figlio dello stesso Pitagora, secondo quanto ci racconta nell'introduzione al I Libro delle sue *Vite*. Tutto si tiene, se accettiamo che la dialettica abbia seguito le vicende della scuola italica. La dialettica stessa però si fonda sul concetto che essa rappresenti i rapporti tra le idee: altrimenti non avrebbe senso applicarla anche solo alla confutazione della tesi avversaria. Se così non fosse, sarebbe solo un gioco linguistico, una sfida di abilità verbale, un gioco di società. È chiaro che per i pitagorici l'universo matematico era il fondamento di quello fisico attraverso lo spazio (idea che dovrebbe derivare dall'architettura e dalla musica) e non vi era

[30] Di costui si sa ben poco. Ne parla Giamblico. Si sarebbe trasferito ad Elea, dove avrebbe fondato la scuola detta appunto eleatica.

luogo per contraddizioni e paradossi. Questi dimostrano la falsità di una posizione, vedasi Zenone; il metodo è lo stesso.

La prova dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ si estende ad altri rapporti tra quadrati, applicando lo stesso metodo. P. es., si ponga $p^2 = 5\,q^2$ supponendo p e q primi tra di loro; allora anche p è multiplo di 5, che non è quadrato di nessun naturale. Ma allora lo è anche q^2, quindi anche q ancora perché 5 non è il quadrato di un numero naturale, ecc.

Se ponessimo $p^2 = 9\,q^2$ non avremmo difficoltà, perché 9 è il quadrato di 3. Nel caso in cui K sia il prodotto di un quadrato per un altro numero non quadrato, p. es. 12, ricadiamo nel primo caso; infatti $p^2 = 12\,q^2$ non implica che 4 sia fattore di p, ma che lo sia 2, il cui prodotto per l'altro fattore 3 cioè 6 è fattore di p oltre che di p^2 perché 6 non è il quadrato di un numero naturale; quindi p^2 e q^2 sono multipli di $36 = 6^2$, q lo è di 6 come lo è p ecc.

Non è chiaro se i matematici greci si siano resi conto in tempi brevi che generalizzando la dimostrazione fatta per $\sqrt{2}$ avrebbero pure dimostrato l'irrazionalità delle radici quadrate dei numeri interi, esclusi i quadrati degli interi. Sembra, dal *Teeteto* di Platone, che la ricerca fosse ancora in corso verso la fine del V secolo, che fosse condotta dalla scuola di Teodoro, e che procedessero caso per caso, quasi non vi fosse un metodo generale; ma non possiamo dedurlo con certezza, perché Teeteto è descritto come uno studente, ed egli stesso presenta la sua attività come esercizio a scopo d'apprendimento. Peraltro, se la scoperta era dovuta effettivamente ai primi pitagorici, non doveva esser passato molto tempo prima che ne applicassero il metodo ad altri numeri. L'incertezza che avvolge il secolo precedente Platone non consente di andare oltre.

Una dimostrazione generale che un numero che non sia il quadrato di un intero è la seguente.

Supponiamo che il numero naturale K sia $p^2 : q^2$, e che p e q non abbiano fattori comuni. Ciò esclude che K sia il quadrato di un intero. Allora K deve avere con p^2 un fattore comune F che non sia il quadrato di un intero. Possiamo porre $K = m^2F$ con m intero, per cui $p^2 = Fm^2q^2$. Quindi mq è fattore di p. Quadrando p otteniamo il prodotto dei quadrati dei suoi fattori, esso stesso un quadrato, il cui rapporto con il quadrato m^2q^2 cioè F è ancora un quadrato e di nuovo cadiamo in contraddizione.

Ciò che colpisce, nella dimostrazione basata sulla parità, è la sua semplicità e ingegnosità, oltre alla *reductio ad absurdum*. Sull'ingegno c'è poco da dire; è una qualità personale che, unita a qualche conoscenza di base, può produrre risultati notevoli. Ma soprattutto la semplicità, per non dire l'*elementarità* del procedimento, dovrebbe attirare l'attenzione. I principi di base (i numeri pari e dispari, le frazioni irriducibili, i quadrati ecc.) sono così elementari – soprattutto il pari e il dispari – da far supporre che si tratti di una matematica agli inizi, nella fase in cui si esplorano le basi di tutto. Chiaramente questa ipotesi è solo congettura, non essendovi prove né a favore né contro, ma solo ragionamenti, e si può invocare che 'dietro' il pari e il dispari vi sia un sistema più elaborato, metafisico o simbolico o che dir si voglia, ma non si tratta certo di una sofisticata scienza dei numeri.

Anche questo aspetto dovrebbe suscitare attenzione e dubbi. Se la scoperta degli irrazionali è così semplice (almeno, dal nostro punto di vista; la difficoltà sembra nell'accettare dimostrazioni per assurdo), può sembrare strano che non vi si fosse giunti prima, anche molto prima, in qualche altro luogo. Specialmente grandi calcolatori come i Babilonesi dovevano pure essersi posti il problema del calcolo esatto di $\sqrt{2}$, e il non riuscirvi doveva pure aver sollevato la domanda del perché. Abbiamo visto che il *Baudhāyana Śulbasûtra* contiene un'ottima approssimazione di $\sqrt{2}$, un numero la cui conoscenza era connessa alla costruzione di *altari del fuoco*, la cui corretta valutazione doveva essere importante a fini rituali. Sarebbe ben strano che nessuno si fosse posto il problema, e che nessuno sia giunto alla stessa conclusione dei pitagorici, cioè che non sia calcolabile esattamente, ma solo rappresentabile come diagonale del quadrato. Verrebbe da pensare che i Babilonesi, gli Indiani, forse gli Egizi fossero giunti da un pezzo alla stessa conclusione, ma semplicemente non le abbiano dato un gran peso: se erano interessati alle applicazioni, le ottime approssimazioni ottenute potevano bastare. In tal caso, i pitagorici sarebbero entrati in crisi per via della loro fissazione sul numero intero come principio generatore universale.

È opinione pressochè unanime che la scoperta degli incommensurabili abbia origine in geometria, dal rapporto tra diagonale e lato del quadrato; ma potrebbe essere cercata anche in acustica, specie considerando l'importanza che i pitagorici assegnavano allo studio dell'armonia. A favore di questa eventualità gioca anche quanto detto sulla probabile non scoperta da parte di Babilonesi ed altri; il triangolo rettangolo isoscele ovvero il semiquadrato è una figura arcinota, e non si vede perché i pitagorici avrebbero dovuto per primi giungere a formulare un problema, se questo nasce in geometria. Potrebbe essere che l'interesse verso la misura della diagonale del quadrato fosse sorto in un secondo momento, e che sia stato indotto da soperte precedenti in acustica. I pitagorici – così dice la tradizione antica – si interessavano alla questione, forse nel tentativo di risolvere aritmeticamente un problema di acustica. Le scale musicali andavano definite a partire dal tetracordo, uno strumento che copriva l'intervallo di quarta maggiore (secondo una scala discendente). È impossibile suddividerlo in due sottointervalli armonicamente della stessa ampiezza; assumendo che il rapporto tra le note estreme del tetracordo sia di $2:1$, si dovrebbe dividere il loro intervallo secondo il rapporto $k:1 = 2:k$, cioè $k = \sqrt{2}$. I pitagorici sapevano che l'altezza del suono è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda, e forse avevano esaminato la questione studiando il monocordo. Perciò sapevano che per dividere un intervallo di ottava in due intervalli armonicamente uguali era necessario trovare la posizione del punto della corda che divide in media geometrica il tratto tra l'intera corda (la cui vibrazione dà la fondamentale) e il suo punto medio (la vibrazione della metà della corda dà l'ottava). Lo stesso problema si pone per qualsiasi intervallo musicale, compreso il 'tono' equivalente a $\frac{9}{8}$: assumendo che i due semiintervalli abbiano la stessa ampiezza, e siano la metà del tono, si torna al caso precedente. Il sistema armonico descritto nel *Timeo* aggirava la difficoltà completando l'intervallo di tetracordo con un intervallino di $\frac{256}{243}$, minore del tono.

Inoltre, se questa fosse stata l'origine del problema, si potrebbe meglio capire perché ci volle un certo tempo prima che l'irrazionalità di altri numeri oltre a $\sqrt{2}$ fosse analizzata sistematicamente. La diagonale del quadrato è solo un caso; è immediato considerare anche le diagonali dei rettangoli. Se si parte da quella, il resto dovrebbe seguire a breve. Ma nel caso dell'acustica, è proprio $\sqrt{2}$ in particolare ad attirare l'attenzione di chi intenda ricondurre tutta la scienza dell'armonia all'aritmetica, il che, nell'ideologia pitagorica, era uno studio inserito nel tentativo di comprendere il mondo tutto con il numero.

Non è possibile stabilire con esattezza la data della scoperta degli incommensurabili. Alcuni indizi (riscontrabili nel *Teeteto* di Platone) farebbero supporre che non sia posteriore a quella della morte di Socrate (399 a.C.), ma poiché la tradizione si divide nell'attribuire la scoperta tra Ippaso e lo stesso Pitagora, potrebbe essere avvenuta nel V sec. o alla fine del VI.

Sono state proposte diverse prove dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ eventualmente alla portata dei pitagorici, della scuola di

Crotone o loro successori [LUČIĆ 2015; anche ZONGYUN CHEN e al. 2024, allargando lo sguardo oltre all'eventuale prova pitagorica]; a quella proposta nel presente capitolo sembra alludere Aristotele negli *Analitici Primi.* La prova basata sulla distinzione dei numeri in pari / dispari sembra avere il vantaggio della chiarezza e della semplicità; inoltre collima con l'impianto classificatorio tipico di una teoria in via di formazione e della matematica pitagorica in generale (numeri figurati, elenco di medie e proporzioni correlate, numeri quadrati, pari, dispari, 'oblunghi' ecc.), ma ha un grave difetto: con lo stesso metodo si può dimostrare che sono irrazionali le radici quadrate di tutti i numeri primi (LUČIĆ), mentre il *Teeteto*, interpretato alla lettera, sembra suggerire che l'irrazionalità di $\sqrt{3}$ e altre radici fosse ancora sotto indagine nella scuola di Teodoro di Cirene. Ma potrebbe essere che tutta la questione sia stata intesa dagli studiosi moderni alla luce di nozioni ispirate ai risultati ottenuti nell'età moderna, e nell'ottica per la quale la matematica è un sistema ipotetico-deduttivo, mentre il punto di vista degli antichi, Greci e non, doveva essere assai diverso. Nella prospettiva di chi vuol calcolare un numero, un rapporto, importa che la procedura adottata abbia termine, o meno. I Babilonesi distinguevano tra numeri 'regolari' esprimibili in termini finiti e numeri 'irregolari', che sono approssimazioni. I metodi impiegati per il calcolo di $\sqrt{2}$ o di π non convergevano verso un risultato finito, per cui non si poteva individuare un razionale che fosse il valore esatto di $\sqrt{2}$. Potrebbe essere che inizialmente si fosse ipotizzato che non potesse esistere una procedura che permettesse di calcolare $\sqrt{2}$ in un numero finito di passi. Tuttavia, non è facile dimostrare direttamente tale congettura; si può però constatare empiricamente, a partire dalla tecnica pitagorica di costruire geometricamente i quadrati, che nella serie dei quadrati non si trova mai il doppio di uno dei termini della serie. Una volta accertato che il quadrato di un numero intero p non è mai il doppio del quadrato di un altro intero q, cioè che non esiste un intero p tale che $p^2 = 2q^2$, dobbiamo concludere che il rapporto della diagonale al lato del quadrato non è uguale a nessun numero razionale $\frac{p}{q}$.

Un'osservazione empirica utile è che l'ultima cifra (decimale) di $2n^2$ deve essere 2, 8, o 0. Di queste, solo lo 0 può essere l'ultima cifra a destra di un quadrato, e solo se questo lo è di un multiplo di 10. Quindi, deve essere $100m^2 = 2n^2$ da cui otteniamo che $n^2 = 50\ m^2$, impossibile, perchè $\sqrt{50}$ non è intero (stiamo ragionando su numeri interi, non solo razionali). Il problema è se i pitagorici ragionavano in base alle cifre, che sono collegate alla base 10. Questo ragionamento dipende dalla notazione posizionale, o almeno dalla scomposizione di un numero in somma di potenze di 10. Può essere però che la pratica del calcolo, certamente basata sul 10, abbia condotto a considerazioni di questo genere. Inoltre, non abbiamo alcun riscontro che un ragionamento del genere sia mai stato fatto, anche se sembra piuttosto banale; ma è rimasto così poco del lavoro dei matematici del V sec. a.C. e prima, da permetterci di considerare trascurabile l'assenza di testimonianze, anche perché non è detto che si fosse posta attenzione alla conservazione di tutto il lavoro fatto. Una volta raggiunta la prova dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, dei tentativi, delle osservazioni empiriche, insomma di tutto ciò che poteva aver preceduto una dimostrazione convincente non sarebbe rimasto nulla o quasi, prima ancora che qualcuno principiasse a redigere una storia della matematica.

La sezione aurea, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ = ca. 0,618 e il suo reciproco, il numero aureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ = ca. 1,618 sono costanti fondamentali in matematica. Generalmente, come dice il nome, la sezione aurea (la 'sezione' per antonomasia) di un segmento è la parte media proporzionale tra l'intero e la parte rimanente; algebricamente, posto uguale a 1 l'intero e a x la sezione, risolve la proporzione

$$1 : x = x : (1 - x)$$

Possiamo calcolare x risolvendo l'equazione ottenuta uguagliando i prodotti dei medi e degli estremi (EQ 1)

$$x^2 = 1 - x \quad \rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

della quale prendiamo solo la soluzione positiva $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Una definizione algebrica alternativa può essere la soluzione positiva di

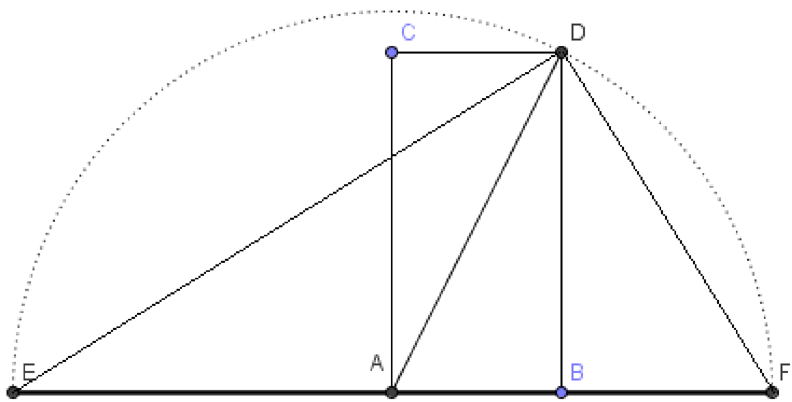
$$x + 1 = \frac{1}{x}$$

Si può anche partire dal suo reciproco, il 'numero aureo' φ ('phi') definito da

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

che corrisponde alla precedente, ponendo $\frac{b}{a} = x$. Il suo significato geometrico è quello di rapporto tra due grandezze a e b, con $a > b$, delle quali la maggiore è media proporzionale tra la loro somma e la minore.

La costruzione geometrica più semplice ha struttura algebrica. Si deve costruire il segmento il cui rapporto con l'unità sia $\sqrt{5}$ o, meglio, $\frac{\sqrt{5}}{2}$; si può tracciando la diagonale di un rettangolo le cui dimensioni siano il segmento unitario e la sua metà. La si riporta sulla retta del lato minore, da entrambe le parti; la differenza e la somma con il lato minore sono rispettivamente la sezione e il numero aureo.



Se il rettangolo ABDC ha dimensioni 1 e $\frac{1}{2}$ allora la diagonale misura $\frac{\sqrt{5}}{2}$, la sezione dell'altezza BD è il segmento BF, il numero aureo è tutto il segmento EB che a sua volta è la sezione aurea del diametro, e BF la parte restante. Infatti, per il secondo teorema di Euclide il quadrato dell'altezza del triangolo rettangolo EDF (che misura 1) è uguale al prodotto $EB \cdot BC$ e la somma dei due segmenti è $\sqrt{5}$, il che corrisponde ad una proprietà che lega la sezione al numero aureo immediatamente deducibile dai loro valori: il loro prodotto è 1, la somma è $\sqrt{5}$, la lunghezza del diametro. Questa costruzione però *presuppone* la conoscenza dei valori numerici della sezione e del numero aureo, e non inizia applicando la loro definizione.

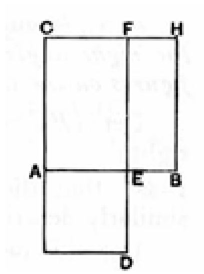
Algebricamente, la sezione y e il numero aureo x sono soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{5} \\ xy=1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x-y=1 \\ xy=1 \end{cases}$$

o risp. dell'equazione $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ e $x - \frac{1}{x} = 1$. *Neugebauer* aveva riscontrato che molti problemi risalenti all'Antica Età babilonese chiedono di calcolare due numeri sapendo la loro somma o la loro differenza e il loro prodotto; è un forte indizio a favore della tesi che vede nell'algebra babilonese la premessa di parti importanti della geometria greca, quelle nelle quali è ravvisabile un travestimento geometrico di procedure algebriche.

Il problema, con la costruzione vista, è che per realizzarla dobbiamo già sapere che $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ è il valore della sezione aurea.

In VI.30 Euclide produce una costruzione, che fa uso solo di proporzioni ed equivalenze, di per sé non molto complicata, ma basata su un metodo illustrato nella prop. 29 la cui logica è invece non proprio elementare. Dato un quadrato Q di lato a, costruisce sul prolungamento di un lato un rettangolo ad esso equivalente, "eccedente" di un quadrato q; cioè, il quadrato q è la parte del rettangolo esterna a Q. Se indichiamo con x il lato di q, è la soluzione positiva di $(x + a)\, x = a^2$, cioè la sezione aurea di a.



Dato il quadrato ABHC di lato a, la sezione di AB è $x =$ AE, lato del quadrato che aggiunto a AEFC forma un rettangolo equivalente a ABHC .

Non è affatto detto che i pitagorici (intendo gli appartenenti alla scuola di Crotone) abbiano applicato proprio il metodo descritto da Euclide; in ogni caso, l'equazione EQ 1 risolve numericamente un problema di 'applicazione delle aree' che – a detta di Proclo che a questo proposito citava Eudemo [*vedi*] – i pitagorici avrebbero dovuto saper risolvere. Se è così, avrebbero potuto procedere alla costruzione anche senza conoscerne il valore numerico, solo a partire dalla definizione; ma sembra difficile sostenere questa congettura, dato il gran numero di problemi che conducono alla sezione.

Questa è in effetti il crocevia di molti campi della matematica. Sembra che la sua importanza fosse da collegarsi alla costruzione del pentagono regolare, del pentagramma e del dodecaedro regolare, ma questa costante interessa anche per certe sue notevoli proprietà, la principale delle quali è la riproducibilità, vale a dire *il rapporto tra la sezione aurea e l'intero assegnato è uguale al rapporto tra la parte restante e la sezione aurea*; ovvero, la differenza tra l'intero e la sezione è la sezione della sezione stessa. Si vede dalla definizione; detto a l'intero,

$$a : x \ = \ x : (a-x) \ \rightarrow \ (a-x) : x \ = \ x : a$$

Questa proprietà conduce a una successione geometrica di ragione uguale a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. In effetti, la parte restante, cioè la differenza tra l'intero e la sezione, è data da $1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $= (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$.

Può essere che l'inizio fosse una variante di un problema aritmetico, come trovare due numeri tali che il loro prodotto e la loro somma siano uguali a 1; o altrimenti, calcolare $\frac{p}{q}$ tale che $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = 1$. È evidente che nessun numero razionale soddisfa questa condizione, anzi nessun numero reale (se un numero è minore di 1, il suo reciproco è maggiore di 1); ma se alla somma sostituiamo la differenza, troviamo sviluppi interessanti. Il sistema delle equazioni $x - y = 1$ e $xy = 1$ può avere molte interpretazioni, quali: trovare due numeri (razionali) la cui differenza sia 1 e siano l'uno il reciproco dell'altro, cercare un numero tale che sottraendone il reciproco si ottenga 1 ecc. I Babilonesi erano interessati ad elenchi di reciproci; nell'equazione $\frac{p}{q} - \frac{q}{p} = 1$ moltiplicando per $p\,q$ otteniamo $p^2 - q^2 = p\,q$ cioè, trovare due numeri naturali tali che la differenza dei quadrati sia uguale al loro prodotto. Tutti questi quesiti non hanno soluzioni fino a che si rimane nel campo razionale.

In questi casi, l'algebra fornisce la soluzione. Dall'equazione

$$x - \frac{1}{x} = 1 \quad \to \quad x^2 - x - 1 = 0$$

otteniamo il numero aureo φ , $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, il reciproco della sezione. Sappiamo che i Babilonesi risolvevano queste equazioni di II grado; non vi è bisogno di applicare una formula risolutiva, il metodo generale si ricava seguendo lo schema che risolve il nostro caso:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \to \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad \to$$

$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$; quindi, è assai verosimile che i Babilonesi (e altri) conoscessero il numero φ, e il suo reciproco.

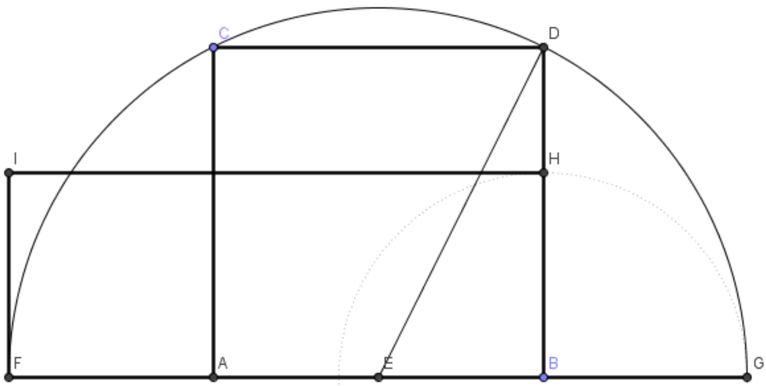
Vi sono altre strade, che portano a questo o a problemi simili. Riguardano però le radici quadrate, e non sappiamo che i Babilonesi o altri le trattassero simbolicamente come numeri non approssimati. Supponiamo ora di voler determinare i numeri x tali che, aggiungendo o sottraendo una quantità data a, si ottengano due reciproci, vale a dire risolviamo l'equazione $(x + a)(x - a) = 1 \rightarrow x = \sqrt{a^2+1}$. Per $a = 1$, otteniamo $\sqrt{2}$; per $a = 2$, otteniamo $\sqrt{5}$. Per $a = \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Aggiungendo $\frac{1}{2}$ abbiamo il numero aureo, sottraendolo, la sezione.

La radice quadrata di 5 non è difficile da costruire, anzi in un certo senso viene dopo quella di 2 , essendo la diagonale del rettangolo di lati 2 e 1. Potrebbe anche essere che la sezione e il suo reciproco siano stati costruiti o calcolati prima di conoscerne il significato in relazione al problema della divisione in media ed estrema ragione di un segmento. P. es., se abbiamo due numeri σ e φ tali che $\varphi\,\sigma = 1 \rightarrow \varphi : 1 = 1 : \sigma$, e la loro differenza è 1, applicando lo scomponendo otteniamo la proporzione

$$(\varphi - 1) : 1 = (1 - \sigma) : \sigma \rightarrow \sigma : 1 = (1 - \sigma) : \sigma$$

che identifica in σ la sezione, e in φ il suo reciproco. Si possono considerare i lati di un rettangolo equivalente a un quadrato, dei quali uno supera l'altro di una certa quantità assegnata, un problema di geometria che i Greci potevano risolvere geometricamente mediante l'applicazione delle aree, eventualmente senza conoscere preventivamente la soluzione.

Si può procedere in altro modo alla costruzione di rettangoli equivalenti a un quadrato assegnato e tali che la differenza dei lati sia uguale al lato di questo. Posto che quest'ultimo sia unitario, i lati del rettangolo soluzione sono φ e σ. La sua diagonale misura $\sqrt{3}$ ($\varphi^2 + \sigma^2 = 3$); inoltre $\varphi^2 - \sigma^2 = (\varphi - \sigma)(\varphi + \sigma) = \varphi + \sigma = \sqrt{5}$.



Il quadrato ha lato unitario, più in generale uguale ad a. Il segmento ED misura $\sqrt{5}/2$, BG è la sezione aurea di BD, tutto FB è il numero aureo. Le dimensioni del rettangolo equivalente al quadrato sono la sezione e il numero aureo del lato del quadrato. La figura è affine a quella della proposizione VI.30 degli *Elementi*, ma presuppone la costruzione di $\sqrt{5}/2$. Questo è un punto importante: una procedura basata su un numero, per quanto svolta geometricamente, può nascondere un calcolo precedente, algebrico (soluzione di un'equazione di II grado), o euristico, vale a dire attraverso tentativi che portano ad un risultato non ottenuto mediante un procedimento predefinito. Se è così, è lecito supporre che i pitagorici avessero conoscenza di risultati ottenuti p. es. dai Babilonesi, fortemente indiziati considerando la grande abilità di calcolo, la capacità di risolvere equazioni di II grado, e di trattare con variabili sia pure senza impiegare un formalismo paragonabile a quello moderno. Un altro problema, riguardante la scoperta degli incommensurabili, è se il primo irrazionale riconosciuto come tale fosse $\sqrt{2}$ e non piuttosto la sezione o il numero aureo. Il *consensus* degli studiosi si orienta sulla prima ipotesi. Si tratta di una di quelle curiosità cronologiche sulle quali si può dibattere all'infinito; tuttavia, vale la pena riassumere brevemente la questione, se non altro perché "diversi ricercatori... hanno suggerito che i Pitagorici per primi scoprirono il rapporto aureo e l'incommensurabilità. Questi storici della matematica sostenevano che l'interesse dei pitagorici verso il pentagramma e il pentagono, accoppiati con l'effettiva conoscenza geometrica a metà del V secolo a.C., rendono molto plausibile che i Pitagorici, e in particolare forse Ippaso da Metaponto, avessero scoperto la sezione aurea e, attraverso questa, l'incommensurabilità. Gli argomenti sembrano essere almeno parzialmente supportati dagli scritti del fondatore della scuola neoplatonica siriana, Giamblico (ca. AD 245–325)…" [LIVIO 2002]. Delle affermazioni di Giamblico possiamo disinteressarci senza perdere nulla; in ogni caso, le storie su Ippaso ecc. hanno un fondamento alquanto incerto. Si direbbe che l'irrazionalità della sezione sia dimostrata in base a quella di $\sqrt{5}$; non risulta che i pitagorici fossero in possesso di un metodo generale per discutere l'irrazionalità di qualsiasi numero prima ancora di studiare i casi singoli e alcuni passi del *Teeteto* fanno supporre indirettamente che l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ sia stata stabilita prima di quella di $\sqrt{3}$ ecc. In realtà solo la dimostrazione da parte di matematici greci è in questione; nulla risulta intorno a dimostrazioni ottenute da altri in tempi ancora più antichi.

Si può provare l'irrazionalità della sezione basandosi su una contraddizione tra possibilità di iterare la costruzione *ad libitum* e all'assunzione che sia esprimibile come rapporto tra interi primi tra di loro. Posto che sia uguale al rapporto irriducibile $\frac{m}{n}$, per definizione abbiamo $\frac{n}{m} = \frac{m}{m-n}$ con $m-n<m$;

iterando il procedimento otterremo denominatori (e numeratori) sempre minori di quelli del passo precedente, il che è assurdo, dato che una successione monotòna decrescente di numeri naturali non può avere infiniti elementi. Questo tipo di ragionamento non sembra difficile, nel senso che non fa appello a nozioni avanzate, salvo la *reductio ad absurdum,* ma non risulta sia stato frequentemente applicato dagli antichi; tuttavia, Euclide lo impiega in VII.31 per dimostrare che ogni numero è scomponibile in un numero finito di fattori primi. In breve, nessuna conclusione al riguardo è certa, ma sembra probabile che l'irrazionalità della sezione aurea sia stata dimostrata in base a quella di $\sqrt{5}$, dopo quella di $\sqrt{2}$. Un modo che non implica il calcolo del suo valore numerico però esiste, ed è analogo a quello verosimilmente applicato per dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Chiediamoci se esistano due razionali tali che il loro prodotto e la loro differenza siano uguali a 1; essendo l'uno il reciproco dell'altro, scriviamo la differenza come

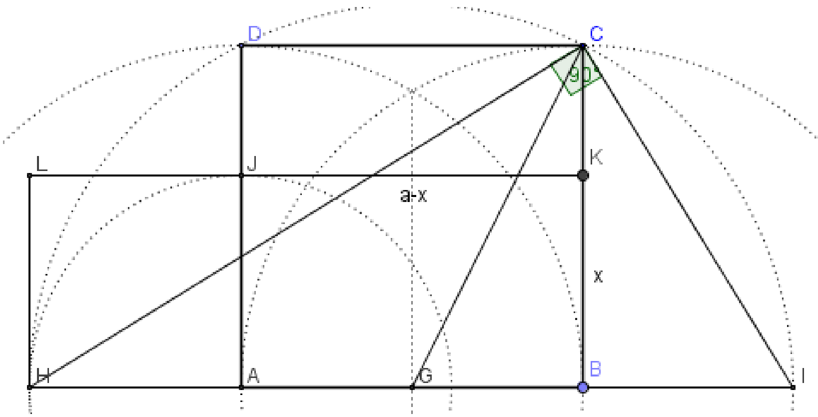
$$\frac{p}{q} - \frac{q}{p} = 1 \rightarrow p^2 - q^2 = pq$$

dove p e q sono numeri naturali. Supponiamo che p e q siano entrambi dispari; allora lo sono pure i loro quadrati. Ma la differenza di due quadrati dispari è pari, quindi lo è pq, che invece deve essere dispari in quanto prodotto di numeri dispari. Supponiamo che uno sia pari e l'altro dispari (il caso in cui siano entrambi pari si riduce a questo o al precedente dividendo entrambi per 2 , ed eventualmente ripetendo la divisione un numero sufficiente di volte); allora la differenza dei quadrati sarà dispari, mentre pq sarà pari.

Questa dimostrazione esige però che si sappia trattare con le frazioni. Doveva essere alla portata dei Babilonesi, non è detto lo fosse a quella dei Greci del tempo di Pitagora.

Tuttavia, l'ipotesi che l'irrazionalità di $\sqrt{5}$ sia una scoperta pitagorica molto antica non può essere scartata su basi logiche. Il ragionamento per assurdo era comune nella dialettica, che si sviluppò in ambiente italico, verosimilmente accogliendo stili pitagorici; prescinde da nozioni aritmetiche, e in questo necessita di ancor meno nozioni di una dimostrazione basata sulla parità; il problema della sezione aurea era importante. Il punto debole dell’ipotesi è la mancanza di testimonianze al riguardo. Inoltre, non si collega alle ricerche pitagoriche nel campo dell’armonia, che potrebbero aver piuttosto orientato l’attenzione verso $\sqrt{2}$ [*vedi*].

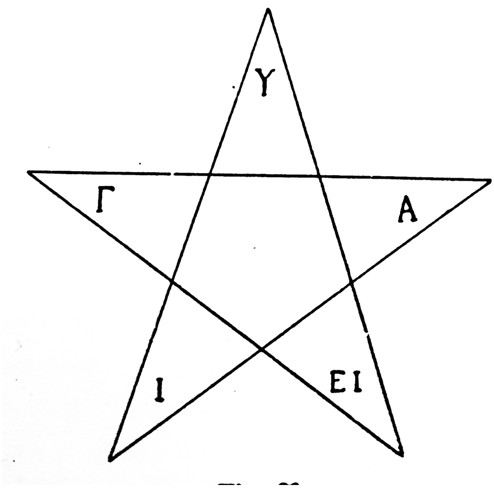
Il matematico italiano *A. Reghini*, che abbiamo già citato per la sua ricostruzione della geometria pitagorica, ha proposto (1978, 2012) una costruzione della sezione aurea immediata conseguenza dell’applicazione in eccesso [*vedi*] che riproduco qui sotto.



Dobbiamo costruire il segmento x tale che il rettangolo di lati x e $a-x$ sia equivalente al quadrato ABCD di lato a. Come nel caso dell’applicazione per eccesso, dobbiamo applicare il secondo teorema di Euclide ad un triangolo rettangolo che costruiamo unendo il vertice C con i punti H e I da parti opposte del punto medio G di AB e tali che GC = CH = CI . Il prodotto delle proiezioni dei cateti sull’ipotenusa, HB e BI, è equivalente al quadrato di BC; stacchiamo su BC il segmento BK = BI, che è la sezione aurea del lato del quadrato ABCD .

Non possiamo stabilire se i pitagorici (quelli della scuola di Crotone, o successivi; il Reghini si riferisce ai primi se non allo stesso Pitagora, ma siamo comunque nel V sec. a.C.) avessero seguito precisamente la sua linea di pensiero, ma darei per certa o quasi la derivazione della costruzione dall'applicazione per eccesso, e prenderei sul serio l'ipotesi che tutta questa parte della matematica avesse lo scopo di costruire la sezione aurea in vista di quella del dodecaedro regolare. Soprattutto, e a prescindere da ciò che i pitagorici o Pitagora stesso potevano aver appreso altrove, si tratta di una dimostrazione sintetica che non ha alcuna necessità di appoggiarsi a qualche equazione algebrica e, data l'impronta geometrica della matematica greca, proporrei che vi siano ottime ragioni per ritenere che questa, o una molto simile, sia la costruzione eseguita dai matematici greci del V sec. a.C se non ancor prima dalla scuola di Crotone e che si possano trascurare le ricostruzioni storiche basate su qualche algebra geometrica. Confrontando la dimostrazione del Reghini con quelle che sembrano iniziare tracciando un segmento di misura $\sqrt{5}$, si vede che questa è implicita nella costruzione di un triangolo rettangolo che permetta di applicare il secondo di Euclide in modo da trovare i lati del rettangolo equivalente ad un quadrato dato; non vi è dunque necessità di pensare che qualsiasi costruzione della sezione aurea che implichi tale misura presupponga una precedente soluzione algebrica, al contrario: vi è evidenza che presupponga la costruzione di un triangolo rettangolo e la conoscenza del teorema di Pitagora e delle sue conseguenze, tra cui appunto il secondo di Euclide. È quindi assai probabile che la dimostrazione ipotizzata dal Reghini sia alla base di tutte quelle che utilizzano il segmento che unisce il punto medio del lato di un quadrato con uno dei due vertici a quello opposti. Un ulteriore indizio deriva dalla nozione di media geometrica, ben presente ai pitagorici. Il metodo geometrico più diretto per determinare una media geometrica è la costruzione delle proiezioni sull'ipotenusa dei cateti di un triangolo rettangolo, la cui altezza è la grandezza di cui si deve trovare la media suddetta. Le concordanze sono tante e tali da far supporre che, andando oltre i precedenti apprezzamenti, l'analisi del Reghini in merito alla sezione aurea e a ciò che vi è logicamente connesso sia l'unica che soddisfi e le testimonianze storiche e le connessioni logiche e gli sviluppi ulteriori della geometria e, in generale, il senso e lo scopo della geometria attribuita ai pitagorici.

Può anche essere che la costruzione del pentagono e del decagono regolari fossero almeno inizialmente gli scopi immediati; il decagono è evidentemente connesso alla *decade* e attraverso questa alla *tetractýs*, e il pentagono è un poligono non così semplice da trattare come l'esagono. Il collegamento tra tutti questi elementi della matematica pitagorica non è affatto forzato; anche Euclide premette la sezione aurea alla costruzione del dodecaedro, seguendo uno schema possibilmente anteriore, e si giustificherebbe l'uso del pentagramma come simbolo distintivo dei pitagorici, come segno del merito di tutta la serie delle costruzioni. In questa prospettiva, la sezione aurea, le applicazioni, il pentagono sono legati da relazioni geometriche indipendenti dalle equazioni di II grado, pur concedendo la connessione, peraltro evidentissima, con il problema di trovare due numeri la cui somma e differenza e prodotto fossero uguali a quantità assegnate. Si può anche concedere che i primi pitagorici o forse lo stesso Pitagora attraverso i suoi viaggi avessero nozione di questi problemi aritmetici, che fossero coscienti della difficoltà di esprimerne i risultati attraverso numeri interi (queste erano già note da un bel po' ai Babilonesi) ecc, e che la connessione tra aritmetica e geometria avesse rafforzato, se pure non era all'origine stessa, la convinzione che il numero sia cosmologicamente fondamentale, idea questa anch'essa possibilmente tratta dalla frequentazione di saggi o sacerdoti orientali. L'idea che la costruzione del dodecaedro pentagonale fosse già all'inizio l'obiettivo di tutta la geometria delle applicazioni e della sezione aurea va poi collegata al concetto delle figure cosmiche di Platone; è possibile che queste fosseo considerate significative ancor prima che fossero indagate geometricamente. In definitiva, non sappiamo a quanto tempo prima di Platone debbano farsi risalire le idee espresse nel *Timeo*; Platone stesso non se le attribuisce, anzi farebbe riferimento ai pitagorici, sia pure indirettamente e velatamente; e alcuni reperti confermano che il dodecaedro pentagonale fosse noto ben prima dei pitagorici e in sedi lontane. Tutto questo ci porta altrove dall'idea di un' algebra geometrica forse troppo frettolosamente e superficialmente avanzata per spiegare procedimenti arcaici sulla base di una logica moderna. Si tratta ovviamente di ipotesi, per quanto sembrino ben fondate, come appare ben fondata la ricostruzione offerta dal Reghini.



La costruzione esatta cioè con uso solo di riga e compasso del pentagono regolare, le sue proprietà, e quelle ad esse connesse del pentagramma possono aver avute diverse motivazioni. In geometria piana è un problema interessante di per sé, in quanto di non immediata soluzione. Se è molto facile tracciare esattamente con solo riga e compasso o anche funi tese triangoli equilateri, rettangoli, esagoni, e tutti i poligoni regolari ottenibili raddoppiando il numero dei loro lati, la difficoltà è molto maggiore se i lati sono cinque, o dieci; il problema non ha soluzione se i lati sono sette, nove, undici ecc. La condizione necessaria e sufficiente affinché un poligono regolare sia costruibile (*teorema di Gauss-Wantzel*) venne pubblicata nel 1837.

Il pentagono regolare è la faccia del dodecaedro regolare, una delle ‘figure cosmiche’ nominate nel *Timeo*. Il suo lato è la sezione aurea del raggio della circonferenza passante per i vertici, le diagonali si intersecano in media ed estrema ragione e costituiscono il pentalfa o pentagramma, una figura che fu considerata simbolo dei pitagorici. Era quindi una figura notevole dal punto di vista teorico, non essendo utile per pavimentazioni ecc.

Sulla paternità di queste scoperte non vi è alcuna certezza, specie per quanto riguarda la loro attribuzione a Pitagora.[31]

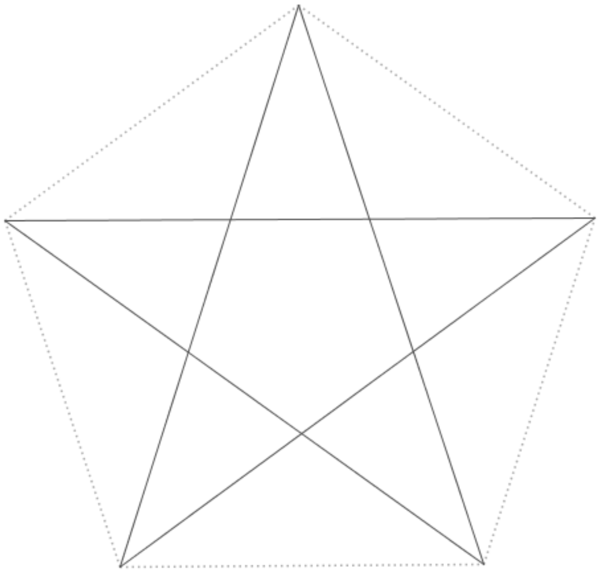
[31] “La credenza generale nella ‘matematica pitagorica’ non è stata esente dalle critiche. Tannery si espresse più volte con scetticismo al riguardo, e i matematici Junge e Vogt sottoposero la ‘geometria di Pitagora’ ad un riesame critico che ebbe il notevole risultato di spostare la datazione degli incommensurabili alla fine del V secolo. Sebbene questa revisione cronologica sia dibattuta, non è stata finora difesa seriamente l’attribu-

Il pentagramma è un simbolo che appare in contesti storici e culturali diversi, e la sua relazione col pentagono sembra secondaria rispetto alla funzione simbolica. Non vi è alcun indizio serio che ne colleghi l'importanza solo alla sezione aurea. I pentagrammi più antichi sarebbero apparsi ca. 5500 anni fa presso i Sumeri; se ne sono trovati sull'altopiano iranico, risalenti al 3000 – 2500 a.C; in Mesopotamia il loro significato era collegato all'astronomia, alla divinità, all'immortalità; così anche presso gli Egizi, che lo avrebbero posto in relazione con il mondo dell'oltretomba ecc. [SCOTT 2006-18].

È possibile che lo studio del pentagono derivi dall'interesse per il pentagramma. Le sue punte hanno per base i lati del pentagono, e se questo è regolare gli angoli acuti formati dai loro lati con quelli del pentagono interno sono di 72° perché supplementari degli angoli di 108° del pentagono; quindi gli angoli ai vertici del pentagramma sono di 36° e le basi delle punte, cioè i lati del pentagono, sono la sezione aurea dei lati delle punte. Se il pentagramma è regolare, tutti i lati delle punte sono congruenti, e ogni lato completo del pentagramma (una diagonale del pentagono avente per vertici quelli del pentagramma) è diviso in tre parti, delle quali la mediana è sezione aurea delle

zione allo stesso Pitagora, fatta da Proclo. Eva Sachs... è riuscita a dimostrare, per quanto riguarda i poliedri regolari, come la tradizione sulla loro trattazione da parte di Pitagora era stata derivata dal *Timeo*, oscurando il contributo di Teeteto. Questo risultato è stato largamente accettato…" [BURKERT 1972]. Sachs (1882-1936), filologa tedesca, discusse nella sua dissertazione *De Theaeteto Atheniensi Mathematico* (1914) il rapporto tra Teeteto e Platone, confluito (1917) in una trattazione dei cinque solidi platonici e dei rapporti con Pitagora.

estreme; non solo, ma per le proprietà della sezione l'unione della parte mediana con ciascuna delle estreme dello stesso lato è sezione di tutto il lato (diagonale del pentagono):

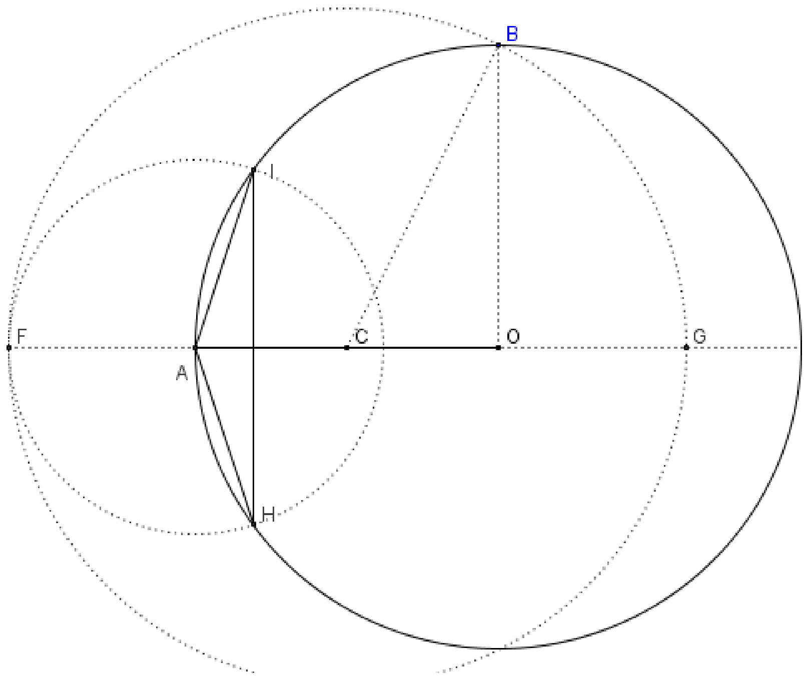


Detti l , d , m rispettivamente il lato (diagonale), ognuna delle sue parti estreme e la parte mediana, abbiamo

$$l : (d + m) = (d + m) : d = d : m$$

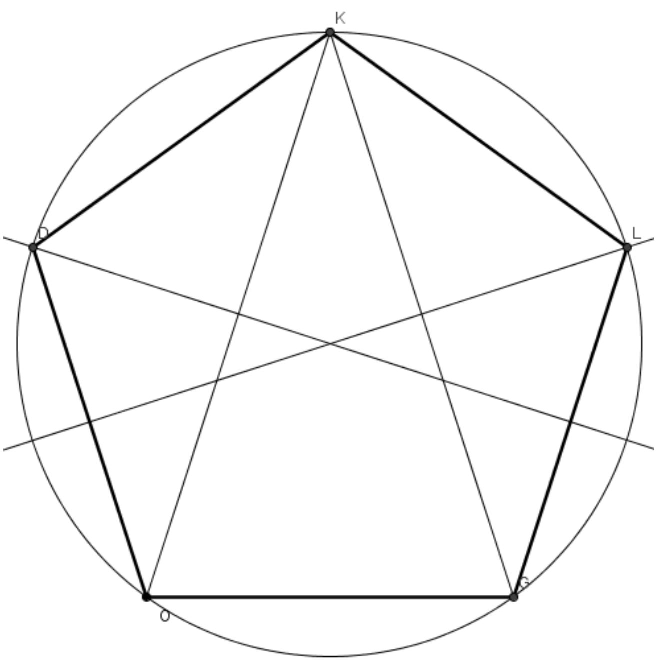
La costruzione del pentagono regolare passa per la sezione aurea. Possiamo constatarlo osservando che il triangolo formato dalle due diagonali uscenti dallo stesso vertice e dal lato a questo opposto è isoscele di angoli $36°$, $72°$ e $72°$, per cui la base è la sezione del lato obliquo; o che il decagono regolare ha per lati la sezione del raggio del cerchio in cui è inscritto. Pentagramma, pentagono, dodecaedro regolare a facce pentagonali, sono tutte figure costruite a partire dalla sezione aurea e i pitagorici dovevano aver avuto la parte principale nel riconoscere tutte queste relazioni.

Il metodo più semplice, che il Reghini propone come quello trovato dai pitagorici, consiste nel disegnare due circonferenze, una di centro O e raggi ortogonali OA e OB , e l'altra con centro nel punto medio C di OA e raggio CB:



AF è la sezione aurea di OA = OB , AH = AI sono lati del decagono regolare inscritto nella crf di centro O , HI è il lato del pentagono regolare.

Questo poligono è il più interessante dei poligoni regolari anche per alcune proprietà dei suoi angoli di 108° , un numero collegato all'astronomia, significativo in India insieme al suo quadruplo, 432 ; inoltre, e forse soprattutto, 36 è il numero dei *decani* egizi, stelle che alternandosi nel corso dell'anno erano associate ad un'ora della notte e delle *decadi*, periodi di dieci giorni nei quali si divideva l'anno ciascuno dei quali corrispondeva a dodici stelle. Inoltre, 36, 72 , 108 sono tutti multipli di dodici (tre, sei, nove volte tanto…) il che rafforza il valore simbolico della figura a cinque punte e del poligono con cinque lati. Gli assi delle due diagonali uscenti dallo stesso vertice si incrociano nel centro determinando coppie di angoli opposti, rispettivamente di 144° e 36° ; per tutto questo insieme di relazioni era degno di attenzione anche il solido limitato da dodici facce pentagonali, cioè il dodecaedro regolare.



Altre interessanti proprietà:

a) Le intersezioni delle diagonali sono i vertici di un pentagono interno concentrico, i cui lati hanno rapporto di proporzionalità con i lati del pentagono maggiore dato dalla differenza tra il lato L di questo e la sua sezione aurea; detto l il lato del pentagono interno, abbiamo

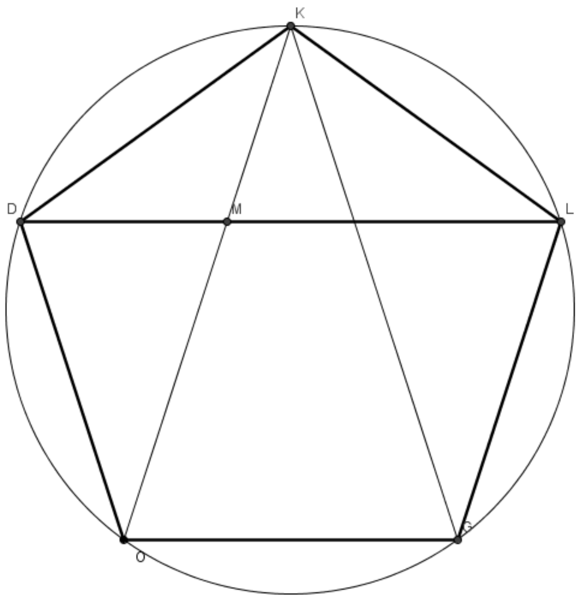
$$l \,:\, L \;=\; L - \frac{\sqrt{5}-1}{2} L \;=\; \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) L \;;$$

come conseguenza, il rapporto tra le aree del pentagono minore e del maggiore è $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$;

b) i prolungamenti dei lati si incrociano nei vertici di un altro pentagono tale che il rapporto tra il lato di quest'ultimo e quello del pentagono iniziale sia il reciproco di quello precedentemente calcolato, vale a dire $L : l = \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$;

c) la successione dei pentagoni tali che i vertici sono le intersezioni tra le diagonali del termine precedente è una progressione nella quale il rapporto tra elementi lineari (lati, diagonali, perimetri) corrispondenti tra un pentagono della successione e il precedente è dato da $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Se, a partire da un termine qualsiasi della successione, ripetiamo l'operazione n volte, il lato, la diagonale, il perimetro dell' n - esimo termine (assegnando l'indice '1' al primo dopo quello da cui partiamo) saranno il prodotto di $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ per il corrispondente elemento del pentagono iniziale. Per le aree, il rapporto è il quadrato di $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Per la successione dei pentagoni ottenuti intersecando i prolungamenti dei lati, i rapporti sono i reciproci di $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ per lati, diagonali ecc., i quadrati dei reciproci per le aree.

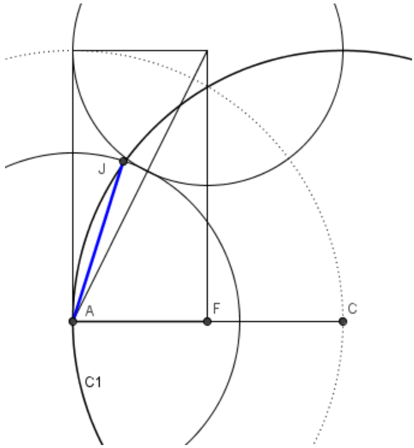
Si può facilmente dimostrare – invertendo il procedimento che porta alla costruzione della figura – che il lato del pentagono regolare è medio proporzionale tra la diagonale e il minore dei segmenti staccato su questa dall'intersezione con un'altra diagonale, cioè che il lato è la sezione aurea della diagonale.



Per ipotesi, poniamo che il poligono regolare abbia cinque lati. Dobbiamo dimostrare che DL : DK = DK : DM. Calcoliamo anzitutto gli angoli. I tre in cui le diagonali dividono l'angolo con vertice in K sono congruenti, in quanto angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali della stessa circonferenza (questa nozione poteva non essere nota ai primi pitagorici), e per la stessa ragione sono congruenti a quelli con vertici in D ed L interni al triangolo isoscele DKL . Quindi, anche il triangolo DMK è isoscele. La somma dei tre angoli di vertice K e dei due di vertici D e L è uguale all'angolo piatto, per cui ognuno misura 36° ; il triplo cioè 108° è l'ampiezza degli angoli interni del pentagono. Nel triangolo DMK , l'angolo di vertice M è la differenza tra l'angolo piatto e il doppio di 36, cioè 72°, che vale 108°. Quindi DKL e DMK sono simili, e vale la proporzione

DL : DK = DK : MK (o DM ; DMK è isoscele). DK è medio proporzionale tra l'intera diagonale DL e DM , il minore dei segmenti su di essa intercettati dalla diagonale passante per M, quindi è congruente a ML ed è sezione aurea della diagonale DL .

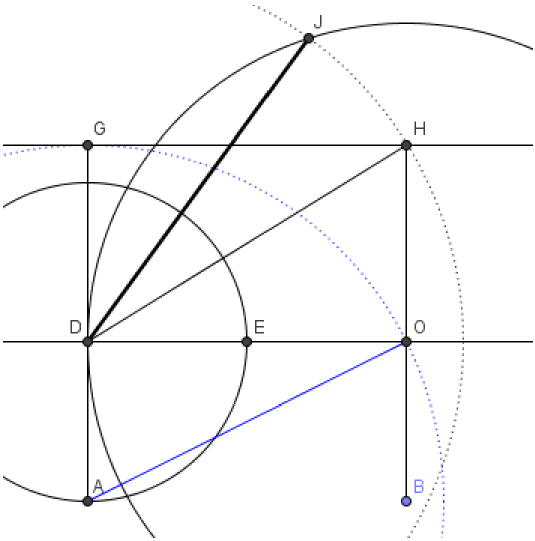
È possibile costruire il pentagono a partire da un decagono, il cui lato è sezione aurea del raggio della crf circoscritta al decagono attraverso varianti del metodo già precedentemente esposto.



Sia AC il raggio della crf che circoscrive il decagono, AF la sua metà, quindi la diagonale del rettangolo è $\sqrt{5}/2$. Sottraendole un segmento congruente a AF ne otteniamo uno uguale alla sezione aurea del raggio; tracciamo la crf con centro nell'estremo A del raggio AC e raggio uguale alla sezione aurea di AC . Il lato del decagono è il segmento che unisce A con l'intersezione J tra la crf di centro A e quella di centro C e raggio AC. Si intersechi questa con la crf con centro in J e raggio AJ , unendo A con questa intersezione otteniamo il lato del pentagono regolare inscritto nella crf di centro C e raggio AC.

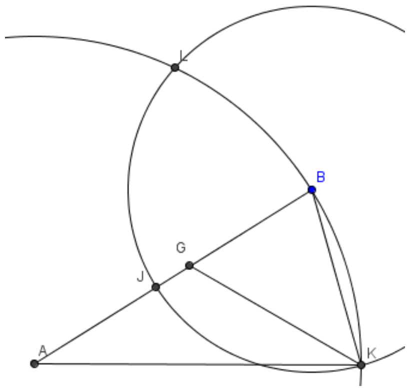
Vi sono molti modi per costruire il pentagono regolare inscritto in una crf di centro e raggio dati, anche senza ricorrere al decagono. Un metodo [SANTOBONI 1972] sfrutta il teorema per il quale il lato del pentagono regolare inscritto in una crf è uguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono il raggio e la sua sezione aurea, cioè

$$l = r \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$



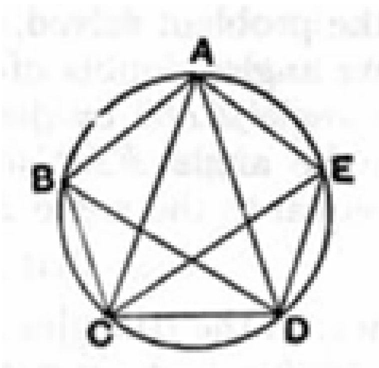
La sezione aurea corrisponde al segmento DG. Supponiamo che il raggio OD sia unitario e AD ne sia la metà, in modo che OA $= \frac{\sqrt{5}}{2}$ e sia AG = OA . Allora DG = AG – AD = $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$. Il lato del pentagono è uguale alla diagonale DH del rettangolo di lati il raggio DO e DG. Tracciata la crf di centro D e raggio DH, il lato cercato è il segmento che unisce la sua intersezione J con quella di centro O al punto D.

La derivazione della costruzione del pentagono regolare e del dodecaedro regolare dalla sezione aurea è confermata dalla proposizione IV.10 degli *Elementi.* Qui Euclide costruisce un triangolo isoscele tale che ciascuno degli angoli alla base sia il doppio del rimanente, senza calcolarne il rapporto tra i lati, iniziando col dividere un segmento dato in due parti, in modo che il quadrato della parte maggiore sia equivalente al rettangolo dell'intero segmento e della parte minore. Quindi la costruzione seguente presuppone quella della sezione aurea.



Il punto G divide AB in media ed estrema ragione; prendiamo sulla crf di centro A e raggio AB il punto K tale che BK = AG. Si vuol dimostrare che due angoli di BKG sono ciascuno il doppio del terzo (quindi BKG è isoscele sulla base BG). Si osservi che la dimostrazione ignora completamente le quantità per esprimere solo rapporti. Si proverebbe la tesi più facilmente attraverso la similitudine tra i triangoli BKG e ABK. Infatti, l'angolo in B è comune, e per costruzione BG : BK = BK : AB . Due triangoli sono simili se sono in proporzione i lati adiacenti ad angoli congruenti. Quindi, essendo AKB isoscele per costruzione, lo è anche BKG . Allora anche AGK è isoscele, e sono uguali gli angoli $G\hat{A}K$ e $G\hat{K}A$. Per il teorema dell'angolo esterno, $B\hat{G}K$ è la somma dei due angoli $G\hat{A}K$ e $G\hat{K}A$, cioè è il doppio di $G\hat{A}K$ che, essendo simili i triangoli AKB e BKG , è uguale a $B\hat{K}G$. Quindi $B\hat{G}K$ = $G\hat{B}K$ è il doppio di $B\hat{K}G$, che vale 36°. La dimostrazione data da Euclide non fa uso della similitudine, ma mi interessava provare la tesi più rapidamente.

La base del triangolo di angoli 36° , 72° e 72° è la sezione aurea del lato obliquo, per cui, se questo è il raggio di una circonferenza, possiamo costruire il lato del decagono regolare in quella inscritto e quindi il pentagono, o il pentagono direttamente, come fa Euclide nella proposizione successiva:



da Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* vol. II, p. 100

I vertici B e E sono le intersezioni delle bisettrici degli angoli alla base di ACD con la circonferenza ad esso circoscritta.

Secondo *Heath,* nella sua nota di commento a IV.10, “Ci sono tutte le ragioni per concludere che la connessione del triangolo costruito in questa proposizione (IV.10) con il pentagono regolare, e la costruzione del triangolo stesso, furono scoperte dei Pitagorici. In primo luogo, uno scolio citato da Heiberg (iv. n. 2 in Heiberg, Vol. v, p. 273) dice "questo Libro è ciò che hanno scoperto i Pitagorici." In secondo luogo, il riassunto in Proclo (p. 65, 20) dice che Pitagora scoprì "la costruzione delle figure cosmiche", tra le quali devono essere compresi i cinque solidi regolari. In terzo luogo, Giamblico (Vit. Pyth. c. 18, s. 88) cita una storia su Ippaso, "che era uno dei Pitagorici ma, poiché è stato il primo a pubblicare e scrivere sulla costruzione della sfera derivante dai dodici pentagoni perì in un naufragio per la sua empietà, avendo ottenuto il merito della scoperta comunque, mentre tutto apparteneva a LUI perché è così che si riferiscono a Pitagora e non lo chiamano con il suo nome."”

A dire il vero, le citazioni di uno scolio del trattato di Proclo, e tanto meno di Giamblico non proverebbero alcunché, ma se Euclide avesse riportato in IV.10 la dimostrazione trovata dai pitagorici dovremmo ammettere che costoro l’avrebbero prodotta basandosi esclusivamente su rapporti e proporzioni già sin dall’inizio delle loro ricerche, come se quella proposizione degli *Elementi* fosse necessaria per gli ulteriori sviluppi.

Il punto centrale di ogni discussione sulla costruzione del pentagono regolare è il triangolo notevole di cui tratta Euclide in IV.10. La questione è complessa. Sul piano operativo, si può costruire il pentagono direttamente dalla sezione aurea [*vedi*] e in più di un modo. Ma se è così, qual è la funzione del triangolo? Essenzialmente è logica: la costruzione del pentagono proposta dal Reghini ha senso perché il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la base di un triangolo con vertice nel centro di ampiezza $36°$, ed è la sezione aurea del lato obliquo, cioè del raggio. Questa nozione è necessaria per *giustificare* logicamente ogni costruzione del pentagono, sia diretta, sia indiretta attraverso quella del decagono, e quella in IV.11 impiega esplicitamente il triangolo notevole. La domanda ora è se la sua costruzione in IV.10 sia necessaria per dimostrare che la base è sezione del lato obliquo; la risposta è *no.* Si può pensare che i pitagorici avessero seguito lo stesso metodo. Avrebbero potuto però procedere diversamente. Il triangolo può essere costruito sapendo che la base è la sezione del lato obliquo, e questa proprietà è un teorema facilmente dimostrabile mediante similitudine sapendo gli angoli per ipotesi. Se ne trova la dimostrazione in qualsiasi manuale di geometria elementare. Il Reghini costruisce il triangolo per altra via (1978, p. 67), perché esclude che i pitagorici impiegassero la similitudine e poi procede come già visto, ma con un metodo più breve di quello di Euclide e probabilmente più consono al modo di procedere usuale in una geometria non ancora molto sviluppata. Esiste quindi almeno un'alternativa alla procedura seguita da Euclide, più semplice di quest'ultima.

Ciò che a mio avviso dovrebbe renderci prudenti nel riconoscere nelle proposizioni degli *Elementi* risultati ottenuti molto tempo prima è la cura che Euclide poneva nell'applicare un rigoroso ordinamento deduttivo assai efficace in funzione dell'apprendimento della geometria, ma non necessariamente corrispondente alla successione storica dei passi attraverso i quali la geometria fu edificata prima dell'epoca di Platone. Poiché le intenzioni dei pitagorici non erano le sue, per il semplice fatto che queste ultime *presuppongono* l'intera geometria mentre quelle riguardano la matematica *in fieri*, cioè dalla prospettiva opposta, l'ipotesi che si trovino Pitagora e discepoli nei primi capitoli degli *Elementi* non è poi tanto sicura: vi si possono trovare teoremi che provano risultati già ottenuti precedentemente, ma non è affatto certo che questo valga per i metodi impiegati. Ciò che non convince è che la dimostrazione di Euclide in IV.10 sembra presupporre che già si sappia che la base del triangolo notevole sia la sezione del lato obliquo. Altrimenti, sarebbe difficile giustificare un procedimento che inizia ipotizzando la divisione di un segmento in media ed estrema ragione, ma questa nozione deve pure avere origine da qualche parte. Quello che viene dimostrato è che se in un triangolo isoscele la base è la sezione del lato obliquo, allora gli angoli alla base sono il doppio dell'angolo al vertice. È l'inversione della proprietà che serve: dagli angoli ai rapporti tra i lati, e – nella dimostrazione di IV.11 – è quindi implicita la nozione che il lato del pentagono è sezione della diagonale. Si direbbe che i pitagorici, o chiunque abbia eseguito la costruzione del pentagono regolare, avrebbero dovuto procedere in senso opposto: studiare il triangolo isoscele con angolo al vertice di $36°$ per scoprire qualche proprietà utile ai fini della costruzione del decagono regolare, e quindi del pentagono.

In questo capitolo si è cercato di individuare all'interno della geometria o dell'aritmetica il problema di cui la sezione aurea sarebbe stata la soluzione. Le relazioni della sezione con altri elementi matematici come quesiti aritmetici, proporzioni, figure sono oggettive, non possono non essere prese in considerazione in qualsiasi ricerca dell'origine dei concetti matematici; ma non è detto siano le sole tracce. Anche l'osservazione delle misure del corpo umano può aver fatto nascere l'idea della divisione di una lunghezza in due parti, la maggiore delle quali ha con la minore lo stesso rapporto del tutto con la maggiore: p. es., nell'individuo adulto, l'ombelico divide l'altezza secondo un rapporto aureo (approssimativamente); così il gomito rispetto a tutto il braccio, comprese le dita distese.[32] È evidente che non si tratta di rapporti esatti, ma questi ed eventualmente altre osservazioni possono aver suggerito l'idea.

Giunti a questo punto, possiamo porci alcune domande. La geometria ci dice che pentagono e pentagramma sono figure interessanti per le loro proprietà, ma sarebbe azzardato supporre che i pitagorici se ne fossero occupati solo per quelle. Trattandosi originariamente di una setta del cui fondatore abbiamo un'immagine formatasi nei secoli successivi, è possibile che l'importanza del simbolo non procedesse solo dall'analisi geometrica. Una suggestione in questo senso può derivare dalla stessa antichità dei disegni che presumibilmente precedono

32 v. *Il blog di Matematica e Scienze* per gli esempi al riguardo. Blog di Matematica e Scienze – Appunti di Matematica e Scienze per la scuola secondaria di primo e secondo grado.

qualsiasi nozione sulla sezione aurea, disegni approssimativi che evidenziano le cinque punte, e il cui significato andrebbe cercato altrove dalla geometria. Il problema, con questo genere di approccio, è che i significati attribuibili al simbolo sono più d'uno; p. es. in un antico trattato cinese di musica si è ravvisata una possibile connessione con le cinque note di una scala allora in uso [CHEN MINZHEN 2024]. La relazione con la musica è ravvisabile anche in Occidente, nello stesso significato di 'pentagramma' dello spartito musicale. Ragionare senza porsi vincoli che fungano da criteri di selezione conduce invariabilmente a una varietà di interpretazioni, tra le quali possono trovarsi quelle originarie; ma queste sarebbero comunque più di una. Seguendo la traccia del numero cinque, possiamo trovare molte corrispondenze. In realtà, è meglio supporre che questa figura – come altre – attirasse e attiri l'attenzione per sé stessa, assumendo un senso dato a seconda del contesto. Come dire, la forma della figura la pone per se stessa come un simbolo. Se proprio vogliamo assegnarle una valenza simbolica precisa, potremmo trovarla nella divisione del cerchio della sfera celeste in cinque parti uguali; anche il triangolo isoscele di angoli $36°$ al vertice, e $72°$ alla base, o meglio i suoi lati con la parallela alla base condotta per il vertice ad essa opposto, contiene la divisione in cinque parti uguali dell'angolo piatto, ciascuna uguale alla metà degli angoli alla base, e le punte del pentagramma con la loro ampiezza raffigurano la decima parte del giro, come il lato del decagono regolare, che tende l'arco uguale alla decima parte della circonferenza in cui è inscritto. Questa interpretazione, per quanto interessante, contrasta però con la suddivisione tradizionale dell'eclittica in *dodici* parti ognuna delle quali corrisponde alla durata di un mese; e anche dal punto di vista geometrico la divisione del giro in dodici archi uguali a 30° ha l'evidente vantaggio che questo è un angolo facile da costruire bisecando quello di 60°. E, infatti, quelle tracce ci conducono piuttosto verso l'Egitto e le aree alla sua civiltà connesse, cioè quelle geograficamente contigue alla Ionia. Ma il numero dodici non è affatto escluso dallo schema, e nemmeno lo è la base sessagesimale, visto che le ampiezze degli angoli del pentagono regolare sono multiple di dodici. D'altronde è impossibile stabilire con certezza cronologica se queste relazioni simboliche fossero all'origine del pensiero pitagorico, o se siano rielaborazioni posteriori almeno in qualche misura, suggerite proprio dagli stessi che si proclamavano pitagorici secoli dopo Pitagora. Tutto ciò che si può dire è che, *forse*, l'attenzione verso una figura può esser stata originata da altro che le proporzioni geometriche, o almeno ne abbia accompagnato la scoperta, ricopiando lo schema per cui il mito precede la scienza. Stesse conclusioni si possono applicare al triangolo – figura caricata di significati metafisici ancor molto più che il pentagono – o l'esagramma. Andare oltre invocando un ruolo per la sezione aurea in acustica, sembra infondato, perché la scala pitagorica non include alcuna nota la cui frequenza di oscillazione non abbia un rapporto razionale con la fondamentale e con l'ottava superiore e che corrisponda esattamente ad una divisione del monocordo in media ed estrema ragione. Eppure, anche su questo punto è lecito avere qualche dubbio; è difficile che i pitagorici, nella loro ricerca di unità attraverso il numero, abbiano trascurato di studiarne l'applicazione in armonia. Tuttavia, non mi risulta alcun rimando in proposito da parte degli scrittori antichi. La lunghezza del tratto di corda che produce la quinta esatta è i due terzi di tutta la corda, che corrisponde a 0,66… non molto lontano (ca. una parte su quindici) dal valore della sezione aurea, ca. 0,618, ma non è pensabile che i pitagorici li confondessero.

Un punto, che non può essere trascurato in qualsiasi analisi della storia della matematica, è il contrasto tra l'utilizzo a fini pratici e lo studio della materia fine a se stesso. Non vi è un vero e proprio passaggio nel corso di un processo di trasformazione continua, ma un mutamento di prospettiva che presso i Greci fu attribuito a Pitagora. Un altro ambito di riflessione è la connessione con il simbolo. Triangolo, pentalfa (pentagramma), esagramma, alcuni numeri in particolare hanno assunto valore simbolico ancor prima che i matematici ne studiassero le proprietà intrinseche. Poiché il simbolismo assume generalmente valenza sacrale, si può essere indotti a individuare nell'area del culto e del rito l'origine dell'interesse per la matematica. Questa tesi non può essere respinta, specie considerando i trattati vedici noti come *Śulba Sūtra*, ma neppure deve essere sopravvalutata. Intanto, l'interesse per la geometria non ha nulla a che vedere con il mondo del simbolo. Quello è orientato verso le relazioni tra gli elementi della figura, questo sulla relazione tra figura e ciò che in essa si vuol rappresentato. In questa funzione la figura è significante, ma in quanto tale al più sono significanti le relazioni interne. Stesso discorso si può fare per i numeri; qualunque sia il rapporto di significato che possiamo individuare tra il numero e altro dal numero, l'aritmetica consiste nell'insieme delle relazioni tra numeri.

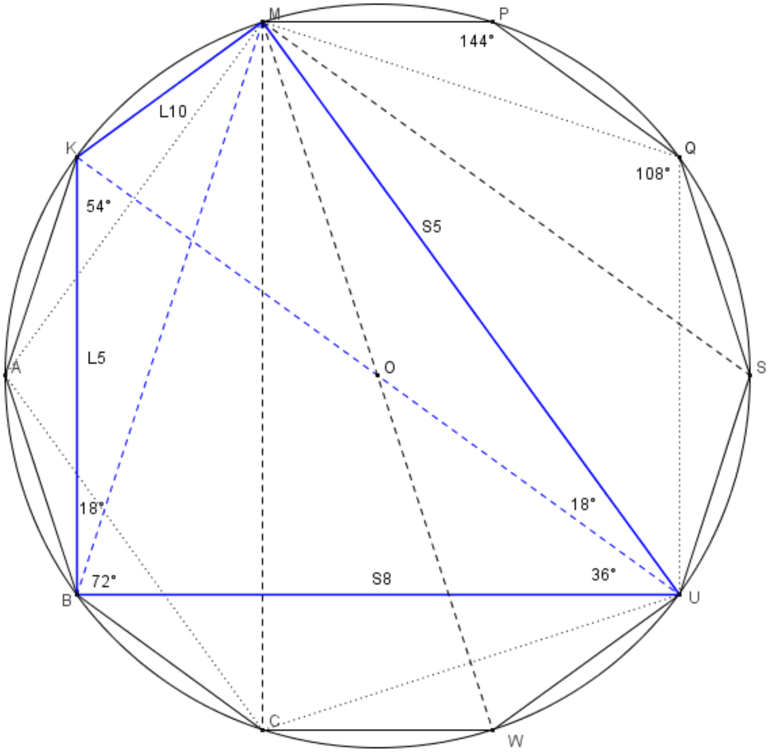
Tuttavia, l'obiezione che la 'cosa in sé' non sia reale, non sia cioè sufficiente a giustificare il sorgere di un forte interesse culminante negli *Elementi*, deve essere non solo accolta, ma esaminata con attenzione. Non è possibile dare una risposta semplice e soprattutto unica alla domanda del perché Pitagora o altri abbiano dedicato così tanto spazio a studiare linee, superfici, solidi ecc., come non è possibile per qualsiasi altro campo della cultura, a parte la banale considerazione che ciò è possibile solo sotto certe condizioni di sviluppo di una civiltà. Si possono esplorare soluzioni che appaiono ragionevoli, e la più evidente è quella che vede nella geometria una valenza estetica, un'attrazione verso l'armonia, l'equilibrio insiti nella figura simmetrica e nella varietà delle sue relazioni interne e con altre figure. A parte questa spiegazione, possiamo individuare motivazioni elementari come la curiosità, lo spirito della ricerca del perché, e tutto quello che possiamo individuare nell'ambito delle motivazioni che possono indurre una persona a dedicarsi ad una indagine. Ma se proprio vogliamo definire una motivazione che si accompagni al desiderio di esplorare e di conoscere (molto forte in una civiltà come quella greca), quella estetica sembra la prevalente. La stessa valenza simbolica della figura è un derivato dell'impressione che la figura produce, e questa impressione è tanto più forte quanto più la figura è simmetrica.

La riflessione sul pentagramma e sulle figure connesse come pentagono e decagono regolare, e poi sul dodecaedro regolare, manifesta la sua natura estetica quando queste figure vengano rappresentate nella loro perfezione, cioè se sono costruite a dovere. Pentagono, decagono ecc. hanno per così dire naturalmente un posto d'onore nella serie delle figure piane notevoli; non sono così facilmente tracciabili come i pur rispettabili triangolo equilatero, quadrato, esagono, tutti caricabili di quanti profondi significati la fantasia possa loro attribuire, ma al contrario esigono ingegno, senso delle proporzioni, insomma la sezione aurea, che non a caso merita questo nome. Si può a ragione affermare che la geometria greca compie un passo decisivo nel momento in cui ci si ostina a trovare il modo in cui si costruisce il pentagono o il decagono regolare e, una volta costruiti, si riesce a determinarne le relazioni interne. Certo, non si deve trascurare il teorema di Pitagora; ma la sua dimostrazione – se è quella proposta dal Bretschneider – non ha il fascino della sezione. È una scomposizione di un quadrato, ingegnosa quanto si vuole, fondamentale quant'altre mai, ma *esteticamente* non può rivaleggiare col pentagramma ecc. La dimostrazione in I.47 è molto bella, ma risale ad Euclide. L'entusiasmo dei pitagorici per il pentagramma appare giustificato, almeno in parte, anche solo in base a queste considerazioni.

Sentiamo il Reghini in proposito: "Le ragioni per le quali il pentalfa fu prescelto come simbolo della nostra Scuola[33] non sono tutte di natura geometrica. Cosa naturale, data la connessione tra la geometria, le altre scienze e la cosmologia pitagorica. Ma le proprietà geometriche che legano tra loro il raggio della circonferenza, i lati del pentagono e del decagono regolari inscritti, e quelli del pentalfa e del decagono stellato o decalfa, sono tante e così semplici e belle da avere indubitabilmente suscitato l'ammirazione dei pitagorici e da avere contribuito a de-

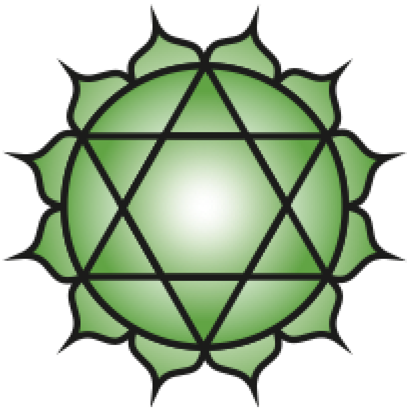
33 Era cofondatore della *Schola Italica* di orientamento neopitagorico con A. R. Armentano.

terminare od a giustificare la scelta del pentalfa a simbolo della Scuola ed a segno di riconoscimento tra gli appartenenti all'Ordine." (1978, p. 70).



"Abbiamo già visto che riportando 10 volte successivamente l'arco AB sulla circonferenza si esaurisce la circonferenza, come la somma di dieci unità esaurisce l'intiera decade. E come gli elementi della geometria: il punto, la linea (retta o segmento determinato da due punti), la superficie (piano, triangolo determinato da tre punti), il volume (tetraedro, determinato da quattro punti) riempiono ed esauriscono lo spazio (tridimensionale), corrispondentemente la somma dei primi quattro numeri interi dà la decade, relazione pitagorica fondamentale che dall'unità attraverso la sacra *tetractis* conduce alla decade. Altrettanto, naturalmente, succede nella nostra figura [quella sopra] dove l'arco KM sommato col suo doppio KB, col triplo BU e col quadruplo UM dà per somma la intiera circonferenza." [*Ibid.* p. 70-71]. Seguono numerosi teoremi.

Un'altra figura, molto più modesta in quanto a proprietà ma forse ancora più nota è l'*esagramma*, la forma del Sigillo di Salomone e soprattutto della Stella di Davide, nonché simbolo assai presente presso le tradizioni religiose indù (p. es. dell'*Anahata* ovvero il *Chakra* del Cuore):



Il simbolo dell'*Anahata.* Da Wikipedia

La stella di Davide nel Leningrad Codex (1008), la più antica copia integralmente pervenutaci del testo masoretico. Da Wikipedia.

Il titolo di questo capitolo trae in inganno, dato che le figure che vanno sotto questo nome non sono affatto scoperte di Platone. Costui cita spesso risultati matematici e nomi di matematici, ma non risulta che a lui risalga qualcosa di nuovo e significativo sul piano scientifico. I suoi riferimenti alla matematica sono per lo più afferenti all'ambito simbolico e cosmogonico, ma possono essere utili per illuminarci sullo stato delle conoscenze pregresse.

Il testo cui specialmente si deve far riferimento è il *Timeo.* La cosmogonia ivi esposta è una vasta sintesi che implica alcune considerazioni di genere matematico divisibili in due parti, o due principi: la scala musicale pitagorica e la geometria. Attraverso la prima, il Dio creatore "armonizzò l'anima del mondo come le corde di un octacordo", come dice il *Fraccaroli* nel suo commento in nota (*Il Timeo* 1906, cap. VIII). La scala descritta è formata a partire da due quaterne numeriche (greco τετρακτύς). Una volta costruita, il demiurgo "dopo averla spaccata in due per il lungo, e accostata rispettivamente l'una metà sopra l'altra in forma di X, piegò queste due in cerchio allacciandole seco ciascuna e tra loro nel punto del cerchio opposto alla prima intersezione [equatore ed eclittica], e le costrinse in quel movimento che gira sempre ad un modo e sempre nello stesso luogo; e l'uno dei cerchi lo pose fuori [l'equatore], l'altro di dentro [l'eclittica]. E quindi il moto esteriore lo deputò ad essere della natura di ciò che è sempre ad un modo, e quella di dentro di quella dell'opposto; quello poi ad un modo lo girò poi verso destra [il moto diurno di tutta la sfera celeste è uniforme e destrogiro visto dal polo N], quello dell'opposto secondo la diagonale a sinistra [il moto di rivoluzione annua avviene in senso opposto intorno ad un asse inclinato rispetto allo Zenit]. E diede il dominio alla circolazione che è ad un modo ed omogenea [la rotazione diurna, più veloce]; e questa lasciò unica e indivisa; quella di dentro invece, scindendola sei volte in sette cerchi disuguali giusta gli intervalli del doppio e del triplo, tre per sorta, ordinò ai cerchi che andassero in senso contrario gli uni agli altri, e quanto a velocità tre ugualmente, e gli altri quattro disugualmente tra di loro e coi tre, pur muovendosi per altro con date regole." Costituita in tal modo l'anima invisibile del mondo, ma "partecipe di ragione [cioè di rapporti numerici] e di armonia", il demiurgo passò alla formazione dell'universo sensibile; "Egli escogita pertanto di fare un'immagine mobile dell'eternità, e mentre ordina il cielo, fa dell'eternità, che rimane sempre nell'uno, un'immagine eternale, che procede secondo numeri, quello che noi abbiamo chiamato tempo… acciocché il tempo fosse generato, nacquero il sole e la luna e cinque altri astri, detti pianeti." Seguono la generazione degli esseri animati, una breve esposizione della teogonia (sono dei gli astri e quelli della religione popolare) ecc.

Il discorso geometrico ha inizio solo al cap. XX, un lungo intervallo dopo gli argomenti prima esposti; ma è preceduto da alcune premesse filosofiche, che costituiscono il pensiero del tardo Platone: "se intelligenza [del vero] e opinione vera sono due cose diverse, allora queste due specie, per noi non sensibili ma soltanto pensabili, sono anche assolutamente esistenti di per sé… ma effettivamente bisogna dire che quelle sono due cose diverse [cfr. *Teeteto*]... bisogna convenire che una è la specie che è sempre allo stesso modo, non generata e che non può perire ed è invisibile e non percepibile da nessun altro senso [le idee], quella appunto cui l'intelligenza ebbe in sorte di contemplare… uguale in nome e somigliante ad essa è una seconda, sensibile, generata… che ha origine in qualche luogo, e che là di nuovo perisce, afferrabile dall'opinione per mezzo della sensazione [per Timeo, ovvero Platone, le facoltà intellettive vanno distinte dall'oggetto, che è reale, indipendente dal soggetto pensante. Resta da stabilire se Timeo si limita a esporre il pensiero di Platone, o se rappresenta una filosofia analoga alla sua, forse di ispirazione pitagorica; ma Pitagora non è mai nominato]; e che inizialmente c'è una terza specie, *quella dello spazio*, costante sempre, che non è soggetta a distruzione, e offre sede a tutte le cose quante vengono generate… " Il pensiero di Platone al riguardo non appare chiarissimo; afferma che "è attingibile non dai sensi" ma da un certo "argomentare illegittimo". Proporrei che attraverso Timeo voglia indicare come lo spazio non sia oggetto di sensazione (lo sono le cose in esso contenute, delle quali non ha la natura) ma nemmeno dell'indagine razionale, ovvero che – detto in termini moderni – è una *forma a priori* senza la quale non è possibile alcuna rappresentazione, anzi che qualcosa esista al punto che – quasi sognassimo – "diciamo essere necessario che tutto ciò che è sia in qualche luogo e tenga qualche posto, e che ciò che non è né in terra né in cielo non è niente"; il che non è vero, e a ciò allude l' "argomentare illegittimo” di prima. Il significato estraibile dalle riflessioni del *Timeo* in questo punto è che le sensazioni sono d’ostacolo all’intelligenza, per via delle limitazioni di tempo e spazio che inevitabilmente accompagnano i fenomeni. La consapevolezza di questi impedimenti, e la liberazione dell’intelligenza da questi, è assimilabile a un risveglio.

All’inizio del cap. XIX, Timeo afferma “Questo pertanto è il discorso ragionato che posso dare sommariamente del mio pensiero, cioè che vi era l’essere, il luogo e la generazione, tre cose partitamente, anche prima che vi fosse il mondo...” Di nuovo, un riferimento allo spazio.

All’inizio del cap. XX, Timeo afferma che “Innanzi tutto, che fuoco, terra, acqua e aria siano corpi, è noto presumibilmente a chi che sia. Ma ogni forma di corpo deve avere anche solidità [deve occupare una parte di spazio], e il solido alla sua volta è affatto necessario che sia limitato da superfici piane [ci si è chiesti come Platone possa aver trascurato figure con superfici curvilinee. Non può certo trattarsi di un errore, di una svista; ma se parliamo di oggetti sensibili, si deve pensare alle parti minime che li compongono, ed evidentemente Platone non considera la possibilità che queste abbiano superfici curve. La sua geometria solida è fondata sui poliedri, e quella piana su poligoni. I numeri figurati pitagorici, piani o solidi, non possono essere curvilinei, per il solo fatto di essere composti di unità indivisibili]. Ora la superficie piana e rettilinea è costituita di triangoli, e ogni triangolo ha principio da due altri aventi un angolo retto e due acuti ciascuno: di questi poi alcuni, hanno da ciascuna parte una porzione uguale di angolo retto circoscritta da lati uguali [sono i triangoli rettangoli e isosceli], altri [gli scaleni] hanno porzioni disuguali divise per mezzo di lati disuguali [l'altezza relativa all'ipotenusa li divide in parti disuguali]. Questo poniamo pertanto che sia il principio del fuoco e degli altri corpi… i principi poi di questi principi li sa Iddio e degli uomini chi sia amico di lui [cioè chi sia ispirato, o per via di divinazione; allusione al carattere iniziatico, sacro di questa conoscenza cui Timeo allude]… Delle due specie di triangoli l'isoscele ha una sola natura [tutti i triangoli rettangoli isosceli sono simili], lo scaleno infinite. Delle infinite alla sua volta conviene preferire la più bella…"

Qui Timeo introduce un criterio estetico del quale è difficile trovare la giustificazione. Il triangolo rettangolo che si accinge a descrivere è ciascuna delle metà del triangolo equilatero separate dalle altezze, e probabilmente la bellezza consiste nella simmetria di questo triangolo. Certamente si tratta di un triangolo rettangolo notevole, anche per la semplicità di esecuzione del disegno, ma anche quello in cui un cateto è doppio dell'altro potrebbe essere 'bello' per qualcuno. In realtà Platone ha bisogno di questo triangolo per procedere col suo metodo.

"… noi dei molti triangoli [rettangoli] ne proponiamo uno come più bello… quello che ripetuto costituisce un terzo triangolo, equilatero." Tutti i corpi dei quattro elementi sono costituiti da questi triangoli; credo che non si tratti di corpi macroscopici, ma dei corpuscoli minimi che hanno la natura dei quattro elementi. Si tratterebbe di una forma di atomismo già presente nell'aritmogeometria pitagorica, e in effetti Diogene L. ascriveva Democrito tra i successori di Pitagora.

Il primo solido considerato [la "prima specie", il tetraedro regolare] "ha la proprietà di dividere in parti uguali e uniformi tutta la superficie della sfera in cui è iscritta", proprietà questa comune a tutte le quattro figure, che si distinguono per come son fatte le rispettive superfici. Nella prima, queste sono quattro triangoli equilateri ottenuti dall'unione di sei triangoli rettangoli scaleni secondo il rapporto di due a uno dell'ipotenusa al cateto minore, come descritto sopra; la seconda [l'ottaedro regolare] "si ha pure dagli stessi triangoli elementari, ma congiunti insieme in otto triangoli equilateri in modo da fare un angolo solido che ha quattro angoli piani"; la terza specie [icosaedro regolare] "consta di centoventi elementi uniti insieme, e di dodici angoli solidi chiusi ciascuno da cinque triangoli equilateri piani, ed ha venti basi [facce] in forma di triangolo equilatero"; la quarta [il cubo] ha una formazione differente.

"Ma il triangolo [rettangolo] isoscele generò la natura della quarta specie, unendosene quattro in modo che l'angolo retto si congiunga al centro e ne nasca un tetragono equilatero. Sei di tali collegati fanno otto angoli solidi ecc."

La regola di formazione esposta lascia un po' perplessi. Esclude il dodecaedro non tanto perché le facce sono pentagonali, ma perché queste non sono la composizione di triangoli elementari quali quelli che Timeo ritiene fondamentali; infatti sarebbero di 90, 18, 72 gradi e il rapporto del cateto minore con l'ipotenusa è la metà della sezione aurea. Insomma, sembra che questo triangolo non fosse da prendere in considerazione, ma la ragione non può essere l'irrazionalità della sezione aurea, perché anche il triangolo elementare di Timeo ha un cateto irrazionale. È vero però che i rapporti tra il suo quadrato e quelli dell'altro cateto e dell'ipotenusa sono razionali (3 : 1 e 3 : 4 rispettivamente), mentre ciò non vale per la sezione aurea; nessuna potenza di questa infatti, a differenza delle radici di numeri interi, è razionale. Sembrerebbe quindi che la scelta del triangolo di Timeo, di lati (1, $\sqrt{3}$, 4), fosse imposta dal postulato che, se pure una grandezza non è razionale, debba esserlo una qualche sua potenza. In un certo senso, questa generalizzazione del numero razionale poteva conservare il principio della razionalità dei rapporti imposto a sua volta dal particolare concetto pitagorico del numero; la costruzione del *Timeo* ne sarebbe stata una riformulazione in modo da poter considerare quattro figure solide come unità minime dei quattro elementi. In questa prospettiva, il quattro (dalla scala armonica e dagli elementi e i loro principi geometrici), il tre (dal triangolo elementare), il due (equatore ed eclittica) e l'uno (la sfera, quella celeste nel macrocosmo e quella che circoscrive i poliedri regolari) sono i numeri fondamentali, espressi nel tetracordo dove li ritroviamo nella fondamentale, nell'ottava, nella terza e nella quarta armonica; il quattro sembra essere il numero fondamentale, associato alla τετρακτύς che ha ragione poteva definirsi 'sacra' per la sua funzione cosmogonica.

Queste considerazioni indurrebbero ad accettare la matrice pitagorica del *Timeo*, pur con qualche riserva; p. es. la costruzione della scala musicale, che – se accettiamo l'interpretazione datane e accettata dal *Fraccaroli* – si riferisce all'ottacordo dorico, quindi uno strumento particolare, e che sembra seguire uno schema artificioso con le sue operazioni fatte su due progressioni geometriche non sembra né in accordo con i metodi ben noti di unione di tetracordi, o di sottrazione di una o più ottave dalle armoniche della fondamentale dalla terza in su, o di ciò che i pitagorici stessi potevano aver scoperto dallo studio delle vibrazioni del monocordo. Non solo; l'unificazione del principio dei quattro elementi (fuoco ecc.) del mondo sensibile con i quattro del mondo intelligibile, escluso il dodecaedro, fa pensare a una sintesi un po' forzata di elementi della scuola ionica con quella italica.

L'esclusione del dodecaedro potrebbe essere una conseguenza della scelta di non aggiungere un quinto elemento ai quattro già noti. In tal caso, in realtà le figure platoniche non sono dedotte a partire dal triangolo rettangolo elementare di Timeo, ma al contrario quel particolare triangolo è stato scelto proprio per poter giungere a quelle quattro figure. In sostanza, il principio sarebbe stato stabilito in funzione del risultato atteso; non è cioè il vero principio. Questo punto è una stranezza del modo di procedere attribuito a Timeo; non vedo altro modo per giustificare una tale scelta.

Nel cap. XXI, Timeo spiega come associare i quattro elementi alle rispettive figure cosmiche: il corpo solido che ha assunto la figura della piramide [il tetraedro regolare, in base a quanto detto prima; questa identificazione non è ovvia in generale, ma sembra doversi fare in base al contesto del *Timeo*] è "l'elemento e il seme del fuoco"; l'ottaedro e l'icosaedro sono gli elementi dell'aria e dell'acqua rispettivamente; "Tutte queste cose pertanto bisogna concepirle così piccole che ciascuna di ciascuna specie da sé sola per la piccolezza non sia affatto visibile a noi, e solamente quando ve ne siano molte raccolte insieme se ne veda il complesso."

Il valore matematico del *Timeo* – a parte la scala musicale – è piuttosto scarso. Questo dialogo interessa soprattutto per la teoria atomica in esso sviluppata, e perché fa supporre che questa possa aver avuto origine prima di Platone nell'Italia meridionale, o perché fedelmente trasmessa a partire dalla scuola di Crotone, o perché elaborazione a partire dalle dottrine di quella. Il numero figurato, se non è uno schema astratto in funzione della dimostrazione intuitiva di certe regole, potrebbe essere una prefigurazione delle figure platoniche, non tanto perché collegato a forme geometriche, ma perché potrebbe aver denotato una unità minima di spazio, non necessariamente solo in senso geometrico, ma in quanto volume occupato dai corpi. Il punto, che riempie la figura generando il numero, sarebbe l'unità minima dello spazio; è chiaro che la scoperta degli incommensurabili era incompatibile con una teoria fisica siffatta. Questo spiega anche perché il dodecaedro, pur essendo geometricamente del gruppo, non potesse godere del ruolo di figura cosmica; per la sua costruzione esatta è necessaria la sezione aurea, che è irrazionale come tutte le sue potenze.

Il *Timeo* non fornisce informazioni sullo stato delle conoscenze in geometria della scuola pitagorica o dei suoi epigoni del V – IV sec. a.C., e neppure della matematica greca in generale; è possibile che le nozioni di geometria solida degli stessi pitagorici fossero assai più consistenti, anzi è quasi sicuro, dove il ‘quasi’ è di prammatica per ragioni di prudenza. Il tetraedro e l’ottaedro regolari, il cubo, il parallelepipedo, le piramidi a base quadrata, prismi, sono facilmente esaminabili con il teorema di Pitagora: in linea di principio, qualunque scuola matematica che fosse a conoscenza del teorema avrebbe potuto studiare le proprietà di questi solidi – p. es., determinare le relazioni tra spigoli e raggi delle sfere circoscritte. Anche superfici e volumi non presentano particolari difficoltà. Le cose stanno diversamente per icosaedro e dodecaedro. Platone doveva essere a conoscenza del teorema di Teeteto, che stabilisce l’esistenza dei cinque poliedri regolari e di quelli soltanto; inoltre lo si è posto in relazione alla ‘scoperta’ dell’ottaedro e icosaedro regolari, ma lo studio delle proprietà del dodecaedro e dell’icosaedro sembra doversi ascrivere ad *Aristeo* il Vecchio (370 – 300 a.C.), uno dei più importanti geometri prima di Euclide, il quale avrebbe composto cinque libri non pervenutici sui solidi, ma assai apprezzati dagli antichi. Gli fu attribuito il teorema: “Lo stesso cerchio circoscrive il pentagono del dodecaedro e il triangolo dell’icosaedro se sono inscritti nella stessa sfera”; ad *Apollonio* sarebbe dovuto quest’altro: “la superficie del dodecaedro sta alla superficie dell’icosaedro come il dodecaedro stesso sta all’icosaedro.” [ALLMAN 1886] È assai verosimile che, secondo il *Bretschneider* (cit. dall’Allman) “il contenuto del XIII libro degli *Elementi* fosse una ricapitolazione almeno parziale del lavoro di Aristeo."

Proclo accredita l'importanza di Platone nella storia della matematica: "Euclide seguiva il pensiero di Platone, e aveva familiarità con la filosofia del Maestro; inoltre si propose, come obiettivo finale degli *Elementi*, la costruzione delle figure dette platoniche" [TANNERY ; RENZETTI]. Quindi ascrive interamente ad Euclide la *costruzione* dei poliedri regolari, non tanto la scoperta di certe loro proprietà che presumibilmente gli servirono per la costruzione stessa, dando una motivazione filosofica al suo lavoro. Ancora: "Euclide… riordinò diversi lavori di Eudosso, "migliorò" quelli di Teeteto [che era in rapporti stretti con Platone] e inoltre diede delle dimostrazioni irrefutabili per quelle [proposizioni] che i suoi predecessori non avevano sufficientemente provate." Le conoscenze sui solidi alla portata di Platone, o almeno dei suoi contemporanei, dovevano essere quindi superiori a quelle esposte nel *Timeo*; dal punto di vista matematico l'unico interesse di questo dialogo, ma non è poco, sta nella costruzione della scala armonica dell'ottacordo e nella nozione che vi sono solo cinque poliedri regolari. Su Eudosso, Teeteto ed Euclide: "*Ermotimo da Colofone* (n. ca. 325 a.C.) proseguì le ricerche di Eudosso e Teeteto, trovò diverse proposizioni degli *Elementi…"*; sui rapporti di Platone con Eudosso: "Eudosso da Cnido… discepolo e amico di Platone, aumentò il numero dei teoremi detti *generali…* fece progredire le questioni della sezione [aurea] sollevate da Platone…", ecc. [TANNERY] Va però rilevato che si tratta di fonte neoplatonica.

Nell'introduzione alla sua versione della *Collection mathématique* di *Pappo* (1933), *P. Ver Eecke* definisce la concezione pitagorica dei quattro elementi "la base di un primo saggio di una filosofia della natura nel *Timeo*". Ai cinque corpi regolari è dedicata la quarta parte del libro III. La maggior parte delle proprietà individuali e alcune proprietà comparative di questi poliedri, erano già conosciute da tempo, e il loro studio in relazione alla loro inscrittibilità nella sfera doveva già apparire completamente esaurito nelle proposizioni da 13 a 17 del XIII libro degli Elementi di Euclide, dove il poliedro è una costruzione data, e la sua inscrizione nella sfera si riduce a stabilire la relazione metrica tra il lato del poliedro e il diametro della sfera; mentre presso Pappo, è, al contrario, la sfera che è data, e l'iscrizione del poliedro considerato si riduce a determinare nella superficie della sfera il piccolo cerchio parallelo in cui può inscriversi ciascuna delle facce.

Ancora al *Timeo* si riferisce Pappo, quando nel Libro III tratta delle medie aritmetica, geometrica e armonica, in particolare al seguente passo: "Dio iniziò quindi a creare il corpo dell'Universo componendolo di fuoco e terra; ma non è possibile unire bene due corpi senza un terzo; poiché è necessario che ci sia un legame che li unisca nel mezzo: ora, il legame più bello è quello che conferisce la maggiore unità sia a se stesso sia alle cose che unisce, ed è nella natura della proporzione produrre questo effetto in modo perfetto: ecc." Il significato cosmico della proporzione in Platone è evidenziato da Pappo, nello stesso luogo: "Poiché la media geometrica trae la sua prima origine dall'uguaglianza, si stabilisce da sé e stabilisce le altre medie, essa indica così, secondo l'opinione del divino Platone, che la proporzione è, per natura, la causa di tutte le cose armoniche e di ciò che nasce di razionale e ordinato; perché egli dice che la natura divina della proporzione è l'unico legame di tutte le conoscenze, la causa della creazione e il legame di tutte le cose create.”

Il *Timeo*, insieme a tutta la filosofia di Platone, influenzò profondamente molti pensatori dall’antichità al Rinascimento e oltre, soprattutto perché concepisce l’intero cosmo come un essere animato.

L’interesse della scuola pitagorica nei confronti dell’armonia ha importanza pari a quello per l’aritmetica e la geometria, se non anche superiore. L’idea della valenza universale del numero come principio di ogni cosa doveva derivare dall’osservazione che troviamo rapporti aritmetici in molti fenomeni e attività diverse: il numero esprime quantità, misura, forma, proporzione, molteplicità e anche l’altezza dei suoni, quindi la struttura stessa dell’armonia. Probabilmente fu questa relazione con la musica, per la grandissima importanza che questa ricopriva nella società antica, e per il legame che le si attribuiva con il sacro, a elevare il numero molto al di sopra del suo valore strumentale. Può avervi contribuito anche il carattere particolare della scuola pitagorica, per il legame che avrebbe avuto con l’Orfismo. Nel quinto libro del suo *Commento al Timeo di Platone*, Proclo afferma che “Poiché Timeo era un pitagorico, seguiva i principi pitagorici. Ma quelli sono le tradizioni orfiche. Perché ciò che Orfeo trasmise misticamente mediante racconti arcani, questo Pitagora apprese, essendo stato iniziato da Aglaofamo [maestro di Pitagora, secondo Giamblico; Proclo si limita a riportare quanto costui scrisse su Pitagora, Orfeo e Platone] nella saggezza mistica che Orfeo aveva ereditato da sua madre Calliope. Queste cose dice Pitagora nel Discorso Sacro...” Proclo, seguendo Giamblico, intendeva la filosofia di Pitagora come *trait d’union* tra la rivelazione di Orfeo e la filosofia di Platone. La musa Calliope, Orfeo, Pitagora, Timeo e Platone costituivano la catena iniziatica che avrebbe trasmesso la saggezza divina alla base della tradizione filosofica e religiosa greca. Questa era la posizione dei tardi neoplatonici; ma attualmente vi sono punti di vista divergenti sul rapporto tra orfismo e pitagorismo [BETEGH 2014 e altri; v. STANFORD ENC. alla voce 'Pythagoras']. Anche il rapporto di Pitagora con il culto di Apollo suggerisce che i pitagorici considerassero la musica come una forma di partecipazione alla divinità. Ma un concetto siffatto si trova in tutto il mondo antico; per gli Egizi la musica aveva origine divina, e ne era custode la casta sacerdotale; la relazione tra musica e divinità appare stretta anche presso i Sumeri. "Di grande interesse sono soprattutto gli strumenti a corda appartenenti alla famiglia dell'arpa e della cetra. Le teorie musicali degli assiro-babilonesi dovevano essere intimamente connesse con le conoscenze astronomiche e matematiche per cui essi andavano famosi nel mondo antico; e la loro influenza non è forse estranea alle concezioni cosmologiche della musica (l'armonia delle sfere) e ai principi dell'*ethos* a essa inerente, elaborati da Pitagora… si può supporre che la musica mesopotamica fosse dapprima pentatonica e più tardi si mutasse in eptatonica; ma non si sa nulla di preciso, se non che… l'influenza esercitata dalla cultura mesopotamica… fu grandissima sul mondo occidentale, come già riconoscevano greci e romani" [GARZANTI 1983]. Presso i Greci, che con il termine μουσική τέχνη ('arte delle Muse') denotavano anche la poesia e la danza, era trasmessa principalmente per via orale; si cominciò nel IV sec. a.C. a metterla per iscritto, ma tale pratica rimase limitata a circoli ristretti ai professionisti. Già dai tempi più antichi venne riconosciuto alla musica una funzione educativa fondamentale e una posizione centrale nella vita individuale e collettiva dei Greci.

La teoria e la prassi musicale greca era basata sul *tetracordo*, che copriva l'intervallo di quarta. L'ottava si compone di due tetracordi 'disgiunti' in modo che tra la prima nota di uno dei due e dell'altro vi sia un intervallo di quinta. Il tono era definito come l'intervallo tra la quarta e la quinta, cioè – rifacendosi al modello matematico per cui le note sono tra di loro in rapporti semplici – di $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$. Questo è l'intervallo che separa la prima nota di uno dei tetracordi dall'ultima dell'altro. La determinazione dei tre intervalli noti come *diapason* (l'ottava), *diapente* (di quinta) e *diatessaron* (di quarta, due toni e un semitono) era stata unanimemente attribuita a Pitagora, implicando quella del tono. Tutta la struttura armonica dipende dai rapporti $2 : 1$ (per l'ottava), $3 : 2$ (quinta), $4 : 3$ (quarta), $9 : 8$ (tono). In pratica, gli esecutori si ritenevano liberi di suddividere l'intervallo di tetracordo secondo modalità diverse, facendo riferimento ai tre generi *diatonico* (semitono, tono, tono in senso ascendente), *cromatico* ed *enarmonico*, che facevano uso di intervalli maggiori del tono o di un quarto di tono.

La scala del *Timeo* contiene la scala pitagorica, ma non è detto che da quella derivi. Il punto di partenza sono due progressioni geometriche, una di ragione 2 (1, 2, 4, 8) e l'altra di ragione 3 (1, 3, 9, 27) ciascuna di quattro numeri che si diramano a partire dalla comune origine, 1. Una collezione di quattro elementi costituisce una τετρακτύς (quaterna); la più nota è la figura triangolare con un punto al vertice, due punti estremi nella linea sotto il vertice, poi tre, poi quattro, in modo che la somma di tutti i punti sia 10, cui i pitagorici riconoscevano valenza sacrale. Le due progressioni di ragione 2 e 3 vengono completate intercalando tra i termini consecutivi le loro medie armoniche e aritmetiche (prima quella armonica, che è minore di quella aritmetica, per costruire una scala ascendente):

$$1 \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{3}{2} \qquad 2 \qquad \frac{8}{3} \qquad 3 \qquad 4 \qquad \frac{16}{3} \qquad 6 \quad 8$$

(i termini che occupano il secondo, il quinto e ottavo posto sono le medie armoniche delle potenze di due tra le quali sono comprese; i termini immediatamente successivi sono le medie aritmetiche). In questo modo vengono comprese tre ottave. Seguendo lo stesso criterio componiamo la seconda serie:

$$1 \qquad \frac{3}{2} \qquad 2 \qquad 3 \qquad \frac{9}{2} \qquad 6 \qquad 9 \qquad \frac{27}{2} \quad 18 \quad 27$$

ora le unifichiamo in una sola successione disponendo i termini in ordine ascendente:

$$1 \;\; \frac{4}{3} \;\; \frac{3}{2} \;\; 2 \;\; \frac{8}{3} \;\; 3 \;\; 4 \;\; \frac{9}{2} \;\; \frac{16}{3} \;\; 6 \;\; 8 \;\; 9 \;\; \frac{27}{2} \;\; 18 \;\; 27$$

La proprietà essenziale di questa successione è che il rapporto di ogni suo termine con il precedente immediato è uno dei tre rapporti $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ o $\frac{9}{8}$. Infatti:

$\frac{4}{3} : 1 = \frac{4}{3}$; $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$; $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$; $\frac{8}{3} : 2 = \frac{4}{3}$; $3 : \frac{8}{3} = \frac{9}{8}$; $4 : 3 = \frac{4}{3}$; $\frac{9}{2} : 4 = \frac{9}{8}$; $\frac{16}{3} : \frac{9}{2} = \frac{32}{27}$ (questo termine non obbedisce alla regola, e corrisponde alla differenza tra un intervallo di tre quarte e un'ottava); $6 : \frac{16}{3} = \frac{9}{8}$; $8 : 6 = \frac{4}{3}$; $9 : 8 = \frac{9}{8}$; $\frac{27}{2} : 9 = \frac{3}{2}$; $18 : \frac{27}{2} = \frac{4}{3}$; $27 : 18 = \frac{3}{2}$.

L'intervallo compreso dalla scala del *Timeo* si estende fino al rapporto armonico di 27 : 1 , oltre la quarta ottava (16 : 1); per completarlo, si deve aggiungere una quinta (24 : 1) e un tono (24 x 9/8 = 27). Su scala logaritmica: *log* 16 + *log* 3 – *log* 2 + *log* 9 – *log* 8 = *log* 3 + *log* 9 + *log* 16 – *log* (8·2) = *log* 27.

Matematicamente, è indifferente che i rapporti siano tra le lunghezze della corda le cui vibrazioni generano una data nota, o tra le relative frequenze di oscillazione, trattandosi di grandezze inversamente proporzionali (la frequenza è il rapporto tra la velocità di propagazione dell'onda nel mezzo, cioè la corda stessa, e la lunghezza. La velocità con cui l'onda si propaga è data dalla radice quadrata del rapporto tra la tensione applicata alla corda e la sua densità lineare; questa è una caratteristica del mezzo, mentre quella può essere regolata dal suonatore. In tal modo questi può accordare lo strumento). Se li consideriamo rapporti tra frequenze, otteniamo la descrizione di una scala ascendente, nella quale l’ottava è la seconda armonica rispetto alla fondamentale, la quinta è la terza armonica abbassata di un’ottava (la sua frequenza è i tre mezzi della fondamentale), la quarta è la quinta discendente della fondamentale, aumentata di un’ottava; questo è il metodo con cui i moderni costruiscono la scala musicale diatonica, maggiore o minore. I musici dell’antichità non conoscevano la relazione fisica tra frequenza del suono e lunghezza della corda (o del mezzo vibrante, come l’aria dentro uno strumento a fiato, o una membrana ecc.), per cui si riferivano alla lunghezza; essendo questa inversamente proporzionale alla frequenza, che acusticamente è percepita come altezza del suono, le scale musicali erano discendenti, per cui la nota fondamentale era la più alta, il *diapason* l’ottava inferiore, *diapente* la quinta discendente ecc.; per cui, se p. es. la fondamentale è 500 vibrazioni al secondo, il *diapason* si trovava a 250 , il *diapente* a 500 x 2/3 = ca. 333, e il *diatessaron* a 500 per ¾ = 375 vibrazioni, ecc. È chiaro che l’ampiezza degli intervalli è funzione della nota fondamentale.

L’intervallo armonico del *Timeo* è ampiamente eccedente quello considerato dai pitagorici e la pratica musicale dell’epoca di Platone. Il numero fondamentale, 27 , fa pensare alla durata del mese lunare siderale, cioè il tempo che la Luna impiega a compiere un’intera rivoluzione intorno alla Terra nel sistema di riferimento delle stelle fisse, vale a dire a percorrere l’intero zodiaco rispetto all’osservatore. Di questo s’era accorto Plutarco, nel *De animae procreatione in Timaeo*, il quale però vi coglie altre valenze puramente aritmetiche. Esso rappresenta un’*armonia cosmica*, e la relazione con la scala armonica, nell’ambito dell’idea per cui l’armonia dei suoni riflette quella delle sfere celesti, serve a Platone per illustrare come il Demiurgo ha iniziato la creazione. In realtà, il *Timeo* va oltre la cosmogonia come processo solo fisico, e la sua astronomia non significa solo i movimenti dei corpi celesti; ma le relazioni numeriche ivi descritte dovevano avere un corrispettivo nelle conoscenze astronomiche del IV sec. a.C., probabilmente di origine mesopotamica. Ora, l’ipotesi più verosimile, a prima vista, sarebbe che i numeri della scala musicale si riferiscano alle distanze dei pianeti dalla Terra. Dal punto di vista astronomico, la grandezza misurabile più facilmente è il tempo di rivoluzione dei pianeti. Ma il periodo di rivoluzione di Mercurio (il più breve) e quello di Saturno non sono nel rapporto $1 : 27$. Va meglio con le distanze; Mercurio dista 58 milioni di km dal Sole, e Saturno 1429 milioni di km; $58 \times 27 = 1556$, e potrebbe andare bene, se consideriamo la scarsa precisione delle misure astronomiche. Ma è assai difficile che si possa dimostrare qualcosa prendendo questa via. Anzitutto, di quali distanze si parla: dei pianeti dal Sole, o piuttosto dalla Terra? In un sistema geocentrico, si debbono considerare il Sole e la Luna; in tal caso, l’unità di riferimento sarebbe la distanza Terra-Luna. Poi, queste distanze erano in qualche modo note? E come? La misura della distanza tra il Sole e la Terra effettuata da Aristarco era fortemente errata, e niente fa pensare che gli antichi astronomi sapessero qualcosa di preciso sulle distanze astronomiche. Ciò non esclude che Platone e contemporanei fossero a conoscenza di qualche elenco proveniente da chissà dove, ma è chiaro che giustificare la complessa scala del *Timeo* in base a questo genere di conoscenze astronomiche non ha alcuna verosimiglianza. Comunque sia, l'idea che con la successione mista dei quadrati e dei cubi (1 : 2 : 3 : 4 : 9 : 8 : 27) Platone intendesse quella delle distanze dei pianeti dalla Terra (il Sole dista dalla Terra due volte la Luna, Venere tre volte ecc…) è stata presa in considerazione, p. es. dallo *Zeller* citato dal Fraccaroli, p. 184 in nota.

Tutto ciò che possiamo dedurre dalla lettera del testo è la sintesi di matematica, armonia e divisione del cielo, con il numero come origine di tutto. In questo senso, la massima "tutto è numero" viene elevata al suo massimo significato. Il dialogo fu valutato criticamente da Aristotele in merito al suo valore scientifico, fu esaminato, in tutto o in parte, da interpreti di ogni epoca, da *Crantore da Soli*[34] fino a Proclo stesso, e potrebbe riflettere da vicino idee pitagoriche [TAYLOR 1928], ma il significato di questo libro può essere compreso tra due interpretazioni estreme, una per la quale sia una descrizione in parte mitica dell'origine del mondo sensibile, l'altra che fonde macrocosmo e microcosmo miticamente attraverso simboli, quando specialmente descrive l'universo come un vivente animato. A prescindere da quale interpretazione si preferisca, la sequenza dei numeri da 1 a 27, distribuita su una fascia tagliata nel senso della sua lunghezza, definisce la successione di intervalli che dividono l'equatore e l'eclittica, ottenuti rispettivamente

34 Vissuto tra il IV e il V sec. a.C., fece parte dell'antica Accademia e per primo scrisse commenti sulle opere di Platone.

dalle due metà in cui la fascia era stata divisa per lungo. Il significato degli intervalli è dunque astronomico; sembrerebbero divisioni dello zodiaco disuguali, non utili ai fini del calendario, forse non corrispondenti a nulla di osservabile. Ma anche in campo musicale la successione esaminata, a meno di correzioni, non è applicabile; infatti non è possibile ottenere l'intervallo di quarta corrispondente al tetracordo a partire dal tono di $\frac{9}{8}$: l'intervallo di due toni sarebbe $\frac{81}{64}$ della fondamentale, e la differenza rispetto a $\frac{4}{3}$ è $\frac{4}{3} : \frac{81}{64} = \frac{256}{243}$, un intervallino detto *limma* di poco minore del tono. Allora l'intervallo di tetracordo andrebbe diviso in tono, tono, limma, e l'intera ottava sarebbe costituita da tono, tono, limma, tono, tono, tono, limma, generando una successione affine alla scala diatonica di toni e semitoni dell'attuale scala maggiore, T T L T T T L. L'intervallo centrale di un tono corrisponde alla quinta che separa due tetracordi disgiunti, ciascuno costituito dalla sequenza T T L. In tal modo, si ottiene una scala estesa di 34 termini, tra i quali 9 *limma* (uno per ogni intervallo di tetracordo), ciascuno dei quali differisce dal precedente per un tono o per un *limma.*

La relazione tra astronomia e armonia è evidente se si osserva che l'ottava è divisa in sette intervalli. Inoltre, l'intera ottava è fatta di dodici semitoni; ma questa suddivisione è moderna, e non è applicabile alle scale antiche, perché il *limma* non coincide con il semitono, e l'intervallo della scala del *Timeo* è molto più esteso di un'ottava. È però vero che esistono scale pentatoniche, e la musica araba impiega 17 toni. Ma per quest'ultima si potrebbero addurre ragioni legate alle qualità della voce e al modo di usarla; nel caso della musica occidentale, la costruzione dell'ottava a partire da due tetracordi dovrebbe essere una spiegazione sufficiente della scala eptatonica. Non vi è quindi ragione di pensare che le note siano sette perché questo è il numero dei pianeti; non si può però escludere che il rapporto 27 : 1 abbia relazione con il numero dei giorni del mese lunare siderale. Questa ipotesi sembra rafforzata dal fatto che la successione del *Timeo* è definita in termini aritmetici e si riferisce ai cerchi dell'eclittica e dell'equatore celeste.

Partendo dalla serie del *Timeo* – che *non sarebbe armonica senza la correzione del limma*, e che non è introdotta in questa funzione – Crantore, o forse *Eudoro* di Alessandria, autore di un commento al *Timeo* fiorito nella seconda metà del I sec. a.C. (l'informazione viene da Plutarco, nel *De animae procreatione in Timaeo Platonis* ed è citata dal *Taylor*, pp. 141, 656) e poi lo *pseudo-Timeo* di Locri e *Teone* da Smirne fecero riferimento, con qualche divergenza tra di loro, a una grande scala costituita solo da numeri interi, con partenza da 384 (alla successione di numeri frazionari corretta con i *limma* appartengono frazioni con denominatore 3 e 128, e 384 è il loro prodotto, per cui moltiplicando tutti i suoi termini per 384 otteniamo una successione di 34 numeri interi, da 384 a 10368).

Proclo ci fa sapere che la somma di tutti i termini della scala degli interi è 105.947. Non si vede nulla di particolarmente attraente in questo numero, specie se lo si associa alla dimensione dell'equatore celeste (non dimentichiamo che questo e l'eclittica contengono gli intervalli della scala del *Timeo*), né si intravede cosa possano astronomicamente significare quei numeri, interi o frazionari che siano. Del tutto prive di interesse matematico, salvo considerarle come curiosità, sono poi le considerazioni numerologiche di Plutarco (p. es., 36 è un numero 'speciale' in quanto somma delle due quaterne formate dai primi quattro numeri pari e dai primi quattro dispari) e altri, che tenevano il luogo di serie ricerche di aritmetica.

Forse, la lontana origine del *Timeo* è alquanto anteriore all'epoca di Platone, e questi si era limitato a rielaborare un mito del quale si era perduto il significato. Probabilmente è inutile cercare lumi negli scritti di Plutarco e dei neoplatonici, con le loro quaterne e somme di quaterne, forse tarde interpretazioni fuorvianti.

La filosofia matematica nella quale si dovrebbe riconoscere il fondamento del *Timeo* è il sistema di *Filolao* di Crotone, un contemporaneo di Socrate, vissuto tra ca. il 470 e il 385 a.C., cronologicamente intermedio tra Pitagora e Archita, essendo nato ca. un secolo dopo Pitagora e cinquant'anni prima di Archita. Avrebbe scritto un libro, *Sulla natura*, al quale Platone si sarebbe ispirato per il suo *Timeo*; secondo altri, ad altri testi, che avrebbe acquistato dallo stesso Filolao [STANFORD ENC. alla voce 'Philolaus']. Ma Platone s'era guardato bene di rivelare la sua fonte – se pure era quella – presentando Timeo (Locrio) come l'autore della dottrina esposta nell'omonimo dialogo, e in tutte le sue opere nomina Filolao una sola volta, nel *Fedone*, e non direttamente, ma in quanto Cebete e Simmia lo avrebbero ascoltato a Tebe, dove effettivamente si era rifugiato dopo la fine della scuola di Crotone. Che si tratti di Filolao o di altri, la filosofia del *Timeo* e in particolare la sua serie matematica sono comunque di ispirazione pitagorica.

La filosofia di Filolao è deducibile da venti o più frammenti; i principi all'origine del cosmo sono i 'limitatori' che operano sugli 'illimitati' dando forma a ogni cosa. I secondi sarebbero dei continui privi di forma e ordinamento, e vi potremmo riconoscere gli elementi della fisica presocratica e anche lo spazio e il tempo; agendo su queste materie prime, i limitatori le riordinano nelle forme riconoscibili nel cosmo. La formazione dei solidi descritta nel *Timeo* sembra conforme a questo punto di vista, e la serie numerica dividerebbe in intervalli lo spazio e il tempo; lo schema sottostante – se è quello – vede nell'armonia ciò che ordina l'estensione (la gamma dei suoni) nel tempo dividendo entrambi in intervalli discreti, quindi aventi la natura del numero, in una sintesi ardita che eleva l'armonia stessa ad un grado della realtà superiore a quello sensibile di un pezzo musicale. Questa idea ha percorso i secoli fino alla nascita della scienza moderna, nel XVII secolo. Il *Timeo* tuttavia non contiene elementi importanti della cosmologia di Filolao: il fuoco centrale, per esempio.

"I limitatori stabiliscono limiti in tali illimitati e includono forme e altri principi strutturali. Limitatori e illimitati non sono combinati in modo casuale, ma sono soggetti a un "adattamento” o “armonia”, che può essere descritta matematicamente. L'esempio principale di Filolao di una tale armonia di limitatori e illimitati è una scala musicale, in cui il continuum del suono è limitato secondo rapporti di numeri interi, in modo che l'ottava, la quinta e la quarta siano definite rispettivamente dai rapporti 2 : 1, 3 : 2 e 4 : 3. Poiché l'intero mondo è strutturato secondo il numero, possiamo acquisire conoscenza del mondo solo nella misura in cui comprendiamo questi numeri. Il cosmo prende forma quando il fuoco illimitato viene combinato con il centro della sfera cosmica (un limitatore) per diventare il fuoco centrale.” [*Ibid.*].

Conosciamo molto meglio la dottrina neoplatonica della seconda Accademia. Nel suo commento al *Timeo*, Proclo espone la sua filosofia sulla natura delle cose evidenziando il significato dell’armonia presso i tardi neoplatonici e la funzione del numero:

“Secondo la dottrina pitagorica, le cose sono ripartite secondo una triplice suddivisione in intelligibili, oggetti fisici e quelle che sono intermedie tra queste, e che sono solitamente chiamate matematiche. Ma tutte le cose possono essere appropriatamente esaminate sotto tutti questi aspetti. Infatti, le cose intermedie e quelle ultime [materiali] esistono in modalità primordiale prima negli intelligibili, e entrambe esistono nel regno matematico; le prime nature effettivamente in modo iconico [come immagini], mentre quelle che occupano il terzo rango, in modo paradigmatico [come esempi]. Anche nelle entità fisiche ci sono immagini delle essenze che le precedono. Pertanto, stando così le cose, Timeo, quando costituisce l'anima, indica molto opportunamente i suoi poteri, i suoi principi produttivi e i suoi elementi in termini matematici. Ma Platone definisce le sue peculiarità tramite figure geometriche e lascia le cause di tutto ciò che preesiste in modalità primordiale nell'intelligibile e nell'intelletto demiurgico." Più oltre, "l'anima intellettiva è separata dai corpi, è stabilita in se stessa, e allo stesso tempo appartiene a se stessa e ad altro. Appartiene ad altro, infatti, in conseguenza di essere partecipata, ma [questa partecipazione è rivolta] verso essa stessa, e non comporta un movimento verso il partecipante." E ancora, "Ma i principi naturali dei Pitagorici sono i seguenti: essi dicevano che tutto ciò che viene prodotto fisicamente era mantenuto insieme dai numeri, e che tutte le creazioni della natura esistevano conformemente ai numeri. Tuttavia, questi numeri sono partecipati, così come sono partecipabili tutte le forme mondane. Molto appropriatamente, quindi, il dialogo all'inizio procede attraverso i numeri e utilizza i numeri come cose numerate, e non come quelle stesse cose delle quali partecipano. Poiché la monade, la diade e la triade sono una cosa, e uno, due, tre, un'altra. Infatti, le prime sono semplici, e ciascuna di esse esiste da sé; ma le ultime partecipano delle prime." Il pensiero di Proclo coinvolge i numeri, ma inserendoli in una visione del mondo e della sua origine che trascende le sole proprietà aritmetiche. I neoplatonici supponevano che ciò fosse già in origine parte della scienza pitagorica, ma è probabile che ne fosse in realtà una reinterpretazione, o una nuova elaborazione.

Il modo in cui Proclo dimostra la necessità di quattro elementi per formare il mondo sensibile può in qualche misura chiarire la funzione assegnata ai numeri. Questa non era legata principalmente alla quantità, all'ordine, alla similitudine, e l'armonia, cioè l'insieme delle relazioni che costituisce la forma del mondo, non è solo una serie di rapporti:

"Perché la mutazione e il moto non sono simili, ma contrari. Da ciò ne consegue che non esiste un solo elemento semplice. Se, tuttavia, non ce n'è uno solo, ma almeno due, è necessario che questi siano contrari: poiché la generazione avviene a partire dai contrari. È dunque necessario che ci siano due elementi che abbiano, in maniera adeguata, una natura contraria l'uno all'altro. Pertanto, se sono contrari, avranno bisogno di un certo legame e di un mezzo, poiché è impossibile che due contrari possano fondersi in maniera adeguata senza un terzo elemento; poiché è necessario che intervenga un legame, che li colleghi entrambi…. Ma è altresì necessario che questo mezzo abbia una natura 'biforme'. Perché se gli elementi da legare fossero superficiali, un solo mezzo sarebbe sufficiente, ma poiché sono solidi, sono collegati attraverso due mezzi. Poiché la diade, essendo il principale modello dei solidi, è anche assegnata alla causa primordiale dei legami che vi sono presenti. Pertanto, similmente, Timeo chiama armonia questo tipo di legame, come l'inserimento negli estremi di simmetria di comunione tra loro."

Il "mezzo" che connette i contrari ha il suo principio nella media aritmetica, o meglio in una delle medie. La connessione tra numeri "piani", cioè che corrispondono ad aree di rettangoli e sono il prodotto di due fattori, necessita di una media, ma quella tra numeri solidi di due (lo si può intuire osservando che il volume di un parallelepipedo *abc* è dato da due prodotti, ognuno dei quali è collegato a una media). L'analogia con l'armonia musicale deriva dall'essere entrambe formate da medie, che compongono la scala armonica riempiendo gli intervalli tra gli interi (primi quadrati e cubi).

"Perché due mezzi analogamente vengono tra due solidi simili [sono necessari per connettere due solidi simili]. Se, dunque, queste cose sono affermate correttamente, tutti gli elementi sono quattro; e non ce n'è né uno solo, affinché non si distrugga la mutazione… Se, tuttavia, esiste un solo elemento del mondo, la varietà dei fenomeni... sarà sovvertita, e tutte le cose saranno o eterne, o tutte corruttibili. Ma se non esiste un solo elemento, ci saranno o due elementi, o più di due. E se sono due, saranno o contrari o non contrari. Se, tuttavia, non sono contrari, non ci sarà né azione, né passione, né opposizione nei corpi, né ci sarà generazione... Ma se sono contrari, questi richiederanno un mezzo. E se questo è il caso, ci sarà o un solo mezzo, o due mezzi. Tuttavia è impossibile che ci sia un solo mezzo: poiché gli elementi non sono superfici. Da qui derivano due mezzi. Ma se ci sono sono due termini che mediano tra due cose, in tutto sono quattro. Che tanti elementi quindi siano sufficienti al mondo, è manifesto attraverso queste cose. Esaminiamo concisamente il significato matematico di quanto detto finora, e successivamente adduciamo la teoria fisica ad esse pertinente. Esaminiamo solo in base ai numeri che c'è un solo mezzo tra due superfici o piane simili, e che per due solidi simili ci sono due mezzi, perché prima della necessità geometrica si deve comprendere la natura primordiale e spontanea dei numeri. In primo luogo, quindi, siano due numeri quadrati 9 e 16, il minore dei quali ha per lato 3, e il maggiore 4. Moltiplicandoli e ottenendo 12, avremo un'analogia nei tre termini 9, 12 e 16 [12 è la media geometrica di 9 e 16]. Siano assunti altresì due numeri che non siano quadrati, ma allo stesso tempo siano piani simili [p. es. due rettangoli i cui lati siano ordinatamente in proporzione], e siano essi 18 e 32, il primo generato dalla triade e dall'esade, il secondo dalla tetrade e dall'ogdoade [8:4 = 6:3]. Se moltiplichiamo quindi la triade per l'ogdoade, o l'esade per la tetrade, avremo come prodotto 24, legandoli in analogia. [si tratta della media geometrica]. Questo, tuttavia, è causato dal fatto che i loro lati hanno lo stesso rapporto. Se, quindi, si riscontra che i lati dei numeri assunti non ricevono alcuna media o mezzo analogo, tutti i piani generati da essi avranno una sola media, secondo il metodo sopra menzionato. Ma se i lati stessi dovessero essere trovati a ricevere un certo medio analogico, anche i piani prodotti da essi riceveranno necessariamente più di un medio. Siano dunque due quadrati 16 e 81, e sia il lato del primo 4, ma del secondo 9. Poiché, quindi, il medio analogo [cioè la media geometrica] tra 4 e 9 è 6… è necessario che più di un medio cada tra essi. Infatti, la tetrade moltiplicata per l'esade produrrà 24; ma l'esade moltiplicata per sé stessa produrrà 36; e moltiplicata per 9, produrrà 54 [Proclo intende spiegare che, attraverso la media geometrica dei lati dei quadrati, è possibile trovare tre numeri intermedi tra i quadrati stessi, cioè tre figure piane (rettangoli) di estensione compresa tra quelle dei quadrati]. E vi sarà un’analogia continua [una progressione geometrica] 16, 24, 36, 54, 81”; infatti ogni termine escluso il primo è $\frac{3}{2}$ per il precedente. In effetti, i termini della serie di interi della scala del *Timeo* sono una sorta di progressione geometrica ‘corretta’ dai *limma.*

“Passiamo ora, tuttavia, ai solidi simili, e osserviamo i medi in essi. In primo luogo, dunque, siano due cubi 8 e 27, il primo con lato 2, e il secondo 3. Di questi cubi, ci saranno due termini medi, uno prodotto da due volte due moltiplicato per tre, cioè 12... e l'altro da tre volte tre moltiplicato per due, cioè 18... Questi formeranno un'analogia continua [una progressione geometrica] con i cubi menzionati in precedenza [12:8 = 18:12 = 27:18]... E qui potete vedere come ciascuno dei medi abbia due lati provenienti dal cubo posto accanto ad esso, ma il lato rimanente dall'altro cubo… Ancora, se i numeri non fossero cubi, ma solidi simili, avranno anch'essi due termini medi o medie analoghe [geometriche]. Siano dunque due solidi simili 24 e 192, con i lati del primo pari a 2, 3, 4, e del secondo pari a 4, 6, 8. E dalla diade, dalla triade e dall'ogdoade sarà prodotto 48, ma dalla tetrade, dall'esade e di nuovo dalla tetrade, il prodotto sarà 96 [24, 48, 96, 192 sono una progressione geometrica, e 48 e 96 sono le medie geometriche dei termini contigui]…”

Non si tratta di un’aritmetica particolarmente difficile (è anzi elementare), utilizzata in funzione della cosmogonia e fisiologia (studio della natura delle cose) ma intesa a spiegare la formazione delle cose. La filosofia di Proclo si muove nell'intenzione di comprendere tutto attraverso il numero, e in questo seguirebbe il programma attribuito a Pitagora, ma nel senso che i numeri sono per così dire la modalità tramite la quale è avvenuto il processo di formazione del mondo.

Ad Archita e Filolao furono attribuiti studi sulle relazioni aritmetiche implicate dagli intervalli dell'ottava, di quinta e di quarta, e la teoria armonica raggiunse un buon livello già ai tempi di Platone. In realtà, prima dei pitagorici tra i Greci si sarebbe occupato di armonia principalmente *Terprando* da Antissa (prima metà del VII sec. a.C.), un innovatore che introdusse l'eptacordo e il nomo citarodico, una forma lirica connessa al culto di Apollo, e che avrebbe contribuito a definire le scale e le modalità che sarebbero poi state impiegate dagli artisti successivi. I pitagorici quindi avevano a disposizione una materia organizzata su cui operare. Al di là delle scoperte loro attribuite sulla relazione tra altezza delle note e rapporti aritmetici semplici, l'idea dell'armonia come ciò che tiene insieme il mondo dovrebbe essere stata ispirata dalla connessione stessa della successione dei suoni, che appare come un tutto unico e non un semplice insieme di suoni indipendenti.

La funzione dell'armonia nella costituzione del mondo è illustrata da un frammento attribuito a Filolao in termini genericamente affini a quelli che troviamo in Proclo:

"Per quanto riguarda la natura e l'armonia, la situazione è la seguente: l'essere delle cose, che è eterno, e la natura stessa ammettono una conoscenza divina e non umana, salvo che sarebbe stato impossibile che alcuna delle cose che sono e che sono conosciute da noi sia venuta a esistere, se non fosse preesistito l'essere delle cose da cui si è formato l'ordine del mondo, sia le cose limitate che quelle illimitate. Ma poiché questi principi preesistevano e non erano né simili né correlati, sarebbe stato impossibile ordinarli, se un'armonia non fosse sopraggiunta, in qualunque modo essa si sia manifestata. Le cose simili e correlate non richiedevano inoltre alcuna armonia, ma è necessario che le cose dissimili e nemmeno correlate siano unite dall'armonia, se devono essere mantenute secondo un ordine." Il filone che basandosi sull'idea di armonia univa i pitagorici ai neoplatonici è quindi ben accertato storicamente, attraverso le proprietà aritmetiche che vi avrebbero scoperto i pitagorici.

Quella nota come 'scala pitagorica' si estende per un'ottava e ha in comune con quella del *Timeo* gli intervalli di quinta, di quarta e il tono di $\frac{9}{8}$. La sesta maggiore è un tono sopra la quinta giusta, e la settima due toni sopra (in teoria, il rapporto alla fondamentale è $\frac{243}{128}$), da cui si vede che gli intervalli tra la terza e la quarta, e tra l'ottava e la settima, sono di un *limma.* È evidente che quella del *Timeo* con i *limma* è un completamento di quella pitagorica; meno chiaro è come si fosse giunti a questa. Infatti, essa si fonda sugli intervalli di quinta, e sulla differenza tra la quinta e la quarta; per ottenerla non sembra necessario procedere come nel *Timeo*, la cui costruzione mediante unificazione di due serie di quadrati e cubi intervallati da medie armonica e aritmetica appare inutilmente artificiosa. Questa è in effetti una scala matematica, dalla quale si può ottenere una scala armonica estesa molto oltre l'ottava. Nel *Timeo* però è descritta come una divisione dell'equatore celeste e dell'eclittica, e l'armonia – abbiamo visto – va intesa in senso più ampio, cosmogonico, non solo acustico.

Vi sono alcuni aneddoti sul modo in cui Pitagora avrebbe scoperto la legge armonica dei rapporti semplici, per la quale sono consonanti i suoni prodotti da corde le cui lunghezze sono in rapporto semplice, come appunto $2 : 1$, $3 : 2$, $4 : 3$. Ma si ritiene per lo più che partissero dagli intervalli consonanti di ottava, quinta e quarta, realizzati probabilmente sul monocordo, e che iniziando da una nota di riferimento generassero le altre procedendo per quinte ascendenti e discendenti, abbassando di un'ottava le note che la oltrepassavano raddoppiando la lunghezza della corda. La sua costruzione sarebbe quindi di origine sperimentale, e ciò fa supporre che fosse già in uso nella pratica musicale; forse i pitagorici si sarebbero limitati a teorizzarla, facendo dell'armonia un principio universale. Ma questa scala era largamente impiegata nel medioevo, e l'attribuzione a Pitagora risale a quel periodo. Nell'antichità di fatto si adottavano più scale, a seconda di come si dividesse l'intervallo di tetracordo, e può darsi che il sistema pitagorico fosse impiegato nell'antica Mesopotamia e zone circostanti; reperti archeologici indicherebbero che gli strumenti a corda venivano intonati alternando quarte decrescenti a quinte crescenti. Le sette scale di sette toni impiegate nel vicino oriente erano le stesse dei Greci.[35]

La domanda, che inevitabilmente dobbiamo porci, è quanto della filosofia matematica di Proclo e dei neoplatonici faccia parte di quella dei pitagorici dei tempi di Platone, o della scuola di Crotone. È chiaro che non è possibile dare una risposta, mancando un termine di paragone; non sappiamo quali costruzioni aritmetiche siano state elaborate dai primi pitagorici, se a loro fosse dovuta quella del *Timeo*, se a loro possa essere attribuita la filosofia dei 'mezzi analoghi' ovvero delle medie di Proclo, almeno in forma embrionale, ovvero se l'idea del numero come tessuto del mondo, che pure doveva esser presente già agli inizi, in quanto costitutiva dell'identità del pensiero dei pitagorici, fosse intesa nello stesso modo. I neoplatonici vedevano in Platone un continuatore della filosofia pitagorica, ma il C*ommento al Timeo* di Proclo elabora una filosofia matematica che non fa parte dell'originale platonico. Possiamo però constatare che idee del genere possono ingenerare diversi sviluppi, diversi per livello intellettivo; da quello, elevato, dei tardi neoplatonici, a quello assai inferiore che si limita a vedere rapporti armonici o matematici tra fenomeni diversi (moti planetari, musica), a quello, ancora inferiore, che considera significative banali relazioni aritmetiche, per finire al livello più basso, dove si attribuisce un significato a un dato numero in sé, senza considerare le relazioni tra i numeri, che sono la struttura e il senso

35 Un'esauriente e accessibile esposizione della musica antica nel vicino oriente e relativa bibliografia si trova su Wikipedia, Music of Mesopotamia – Wikipedia.

dell'aritmetica e che devono essere la base di qualsiasi punto di vista al riguardo. I diversi livelli, o se si preferisce approcci, sono però presenti presso antichi e moderni, e possono essere compresenti nella stessa corrente di pensiero, nella stessa persona.

Confrontando ciò che emerge dai reperti archeologici con le scoperte attribuite ai Pitagorici in campo musicale e con il *Timeo*, alla luce del *Commento* di Proclo e di alcune informazioni sulla vita di Pitagora note attraverso Diogene Laerzio, è possibile trarre alcune conclusioni verosimili sulla filosofia dei pitagorici prima di Platone.

Si attribuisce ai pitagorici la scoperta della relazione matematica tra i rapporti armonici; in realtà, la teoria dei rapporti armonici poteva già essere nota da secoli. In particolare, la 'scala pitagorica' non sarebbe da ascriversi a loro, essendo verosimilmente già nota presso le civiltà del vicino oriente;

la vera scoperta era la ragione fisica della consonanza, cioè la relazione tra altezza del suono e lunghezza della corda vibrante. Anche questa doveva essere già nota, ma forse non precisamente; potrebbe essere che ai pitagorici si debba ascrivere l'aver scoperto (o notato, e considerato importante) che gli intervalli consonanti corrispondessero ai rapporti semplici 2 : 1, 3 : 2 ecc.;

la scala del *Timeo* è essenzialmente una costruzione matematica che include i rapporti armonici fondamentali, e verosimilmente fu introdotta dalla scuola italica;

questa faceva parte di una cosmogonia tramandata dal *Timeo*, ma che includeva l'*armonia* come principio formativo dell'universo tra gli intelligibili e il mondo sensibile, e quindi il numero, in un senso che andava oltre al suo significato nella musica;

la connessione attraverso il numero è affatto estranea al modo di vedere della fisica moderna ed è di difficile intendimento anche per chi abbia nozioni matematiche, ma ha carattere razionale e può essere indagata attraverso l'aritmetica, il cui studio è la via per la comprensione delle realtà ultime. Questa impostazione, esplicita nel pensiero di Giamblico e Proclo, poteva essere a fondamento della ricerca della scuola originaria, ma non sappiamo in quale forma esattamente;

tale connessione non va confusa con fantasie sui rapporti tra distanze tra i pianeti ecc., che potrebbero esserne una interpretazione ingenua, e non ha rapporto diretto con l'impiego della matematica in astronomia, trattandosi di una filosofia non orientata alla descrizione dei singoli fenomeni, ma alla 'fisiologia' cioè alle modalità della loro generazione ascendendo verso la contemplazione dei principi primi (idee, intelligibili), pur non escludendo commistioni dovute alle scelte ideologiche degli antichi studiosi;

i nessi individuati da Proclo tra proprietà dei numeri e legami tra le cose del mondo sensibile sono basati sull'idea che tra i numeri stessi vi siano relazioni che li legano tra di loro identificabili attraverso medie matematiche, in particolare geometriche (nel Commento di Proclo), armoniche e aritmetiche nella scala del *Timeo*, forse già indagate dalla scuola pitagorica originaria, ma comunque oggetto di studio dei pitagorici; quando Proclo ascrive a Pitagora il merito dello studio delle proporzioni, probabilmente allude a quello delle tre medie aritmetica, geometrica e armonica;

la ricerca di nessi di genere aritmetico (i ‘termini medi’ di Proclo) si svolse accanto allo sviluppo della dialettica, e le due forme di indagine dovevano essere interconnesse più di quanto si sia creduto, come si può ravvisare nelle opere di Platone;

in questa filosofia si devono distinguere le ‘idee’, intelligibili ma affatto sovrasensibili, dai mediatori tra di esse e il mondo; per es. diade e numero due, ogdoade e numero otto. Non è chiaro se la distinzione fosse stata fatta sin dall’inizio, o se derivi da Platone, per confluire nella dottrina neoplatonica. Nel *Timeo* numeri e figure geometriche sembrano essere trattati come tali, senza far allusione a principi ancora superiori, e allora doveva essere così anche per i pitagorici precedenti Platone. L’armonia dei pitagorici quindi era più direttamente legata ai numeri, che avrebbero definito la struttura causale dell’intero universo direttamente o attraverso le figure geometriche (numeri figurati), quindi erano essi stessi all’origine delle relazioni tra gli elementi, mentre in Proclo essi sono la traccia delle relazioni tra i principi (diade, esade, ogdoade…) nel mondo sensibile, attraverso l’analisi dei quali possiamo comprendere le relazioni stesse tra i principi;

questo tipo di indagine, perseguibile su base razionale, aveva però le sue origini in un mondo nel quale la religione e il rapporto con il divino erano assai più pervasivi di quanto non lo fossero in seguito. Le modalità di questa partecipazione con il sacro presso i primi pitagorici erano legate al culto di Apollo e alle religioni misteriche, e la razionalità che emerge già nella cosmogonia del *Timeo*, pur nell'ambito di una cosmogonia che non respinge la matrice misterica, obbedisce tuttavia a motivazioni di altro genere, per il solo fatto di passare attraverso la ricerca dell'ordinamento dell'esperienza del mondo sensibile. In questo senso, vi è in essa del 'realismo', sia pure attraverso le forme;

quindi poteva apparire come una fase intermedia, provvisoria, nella quale si cercava di conciliare istanze fondamentalmente tra di loro indipendenti se non opposte, come la contemplazione del divino e lo studio delle cause dei fenomeni naturali attraverso la loro classificazione e la ricerca dei loro rapporti diretti, senza mediatori con i principi primi. Lo stesso deve essere accaduto nello studio della matematica, che se pure all'inizio poteva avere la funzione di collegamento con il mondo soprasensibile, divenne poi studio autonomo della geometria, e nell'elaborazione di una logica basata su regole diverse dalle associazioni che strutturavano la dialettica;

l'esigenza di conservare la valenza religiosa (che costituiva il valore intrinseco della ricerca) unitamente all'indagine razionale avrebbe condotto alla reinterpretazione di Pitagora e di Platone offerta dai neopitagorici, al prezzo di qualche forzatura sia sotto l'aspetto storico, sia sotto quello filosofico. Ma è innegabile che una sorta di continuità tra i primi pitagorici e i tardi neoplatonici esistette.

Una variante semplicistica di tale filosofia, o forse un suo completamento, o ancora piuttosto un'idea precedente direttamente collegata ai fenomeni astronomici, molto più semplice da comprendere rispetto all'ardua filosofia di Proclo, ha interessato la tarda antichità e il mondo medioevale, fino agli inizi dell'epoca moderna. I più tardi epigoni come Keplero l'hanno sviluppata fino alle sue estreme possibilità, per cui certe proprietà dei moti dei corpi celesti si riconducono ad 'armonie' o relazioni tra figure solide esprimibili attraverso proporzioni e relazioni aritmetiche.

Un esempio di tali interpretazioni che fondono armonia nel senso musicale del termine e astronomia è la successione armonica planetaria. Rispetto al pensiero di Giamblico e Proclo e alla stessa astronomia dell'epoca di Tolomeo appare di una ingenuità tale da farla considerare una riduzione, una semplificazione di teorie concettualmente assai più complesse; ma, data l'epoca assai tarda in cui fiorirono le scuole neoplatoniche, all'opposto le cosmologie 'ingenue' sarebbero precedenti, legate al semplice concetto di armonia come accordo, senza la teoria matematica esposta da Proclo, così raffinata da doversi pensare che sia quasi tutta una costruzione relativamente tarda. In un commento a un poemetto di *Alessandro* di Efeso, che descrive in versi la successione dei pianeti secondo la cosmologia che attribuisce ai pitagorici, il filosofo *Teone* da Smirne, commentatore di Platone (scrisse al riguardo tre commenti, dei quali ci è pervenuta l'*Esposizione della matematica utile per comprendere Platone*), espone una versione della dottrina secondo la quale i corpi celesti (i pianeti, compresi Sole e Luna) con il loro moto di rivoluzione intorno alla Terra generano un'armonia divina. È un concetto di origine poetica prima ancora che pitagorica; comunque stiano le cose rispetto ai pitagorici dell'epoca di Teone, il pitagorico Filolao descriveva un sistema del mondo alquanto differente centrato sul 'fuoco centrale', e la scala armonica – cosmogonica del *Timeo* non sembra riferirsi ai moti dei pianeti (veramente, ciò riguarda solo l'apparenza; potrebbe essere che sia collegata alle sfere celesti e alluda a un loro ordinamento, come nel sistema esposto da Teone, dato che descrive l'*anima* del mondo, intesa come ciò che ne imprime i movimenti). L'idea di base è la stessa dell'*Harmonices Mundi* di Keplero, salvo che quest'opera è incomparabilmente superiore sotto l'aspetto matematico.

Per i particolari riguardanti il testo, rimando all'analisi fattane in *L. Giacardi e S. C. Roero* 1979, forse la più approfondita al riguardo. Mi limito a una parte della traduzione ivi presentata:

"Riguardo alla posizione e all'ordine delle sfere o dei cerchi lungo i quali i pianeti si muovono, alcuni dei Pitagorici hanno la seguente opinione: il cerchio della Luna è il più vicino alla Terra; secondo… è quello di Mercurio; poi è quello di Venere; quarto quello del sole…" ecc. È chiaro che questa descrizione trascura i più complicati metodi in uso presso gli astronomi, che facevano largo uso di epicicli ed equanti, in quanto si riferisce alle *sfere* e non ai moti planetari effettivamente osservati, e che la successione è definita dai loro tempi di rivoluzione, partendo quindi necessariamente dalla Luna; così sembra anche dal *Timeo* che copre l'intervallo di rapporto $27:1$, sempre che questo non fosse scelto per considerazioni puramente aritmetiche legate alla ricerca di medie secondo il metodo illustrato da Proclo, che non implica di per sé un riferimento al ciclo lunare.

Di per sé, la serie descritta da Teone non definisce distanze, ma una scala armonica.

"la terra dunque sta al centro, corda più bassa, dal suono profondo;
la sfera delle stelle fisse, corda più alta, si leva in congiunzione [è l'ottava in senso ascendente];
il sole occupa il posto della corda di mezzo tra gli astri erranti [è la quinta ascendente giusta];
in rapporto a lui l'orbita immobile dà la quarta [nell'eptacordo, l'ottava è la quarta ascendente a partire dalla quinta];
Fenone emette un semitono più basso di quello [delle stelle fisse, in corrispondenza della settima; Fenone è Saturno];
da questo tanto Zeus quanto il violento astro di Ares differiscono [si direbbe che tra di loro siano separati di un tono, e Zeus di un semitono da Saturno, o che l'intervallo tra Ares e Zeus sia di un semitono, e quello tra Zeus e Saturno di un tono; in ogni caso Ares è due toni sotto le stelle fisse];
il sole, gioia dei mortali, produce un semitono inferiore di questi [quindi, due toni e un semitono sotto le stelle fisse];
Citerea invece è a un tono e mezzo dal fulgore del Sole [Venere è a metà tra il sole e la terra, in corrispondenza a una terza rispetto a questa];
lo splendente astro di Ermes si muove un semitono più basso;
di altrettanto la luna, colorata per la sua figura ricca di curve;
la terra ha il sesto tono rispetto al cielo, e completa l'ottava."

La successione è (in senso ascendente) T S S T+S; S T S S o T S S T+S; S S T S . Ho inserito ';' per separare la quinta dalle note restanti.

Si può notare che non si tratta della scala cosiddetta pitagorica e nemmeno di una compatibile con il sistema di Filolao, che contemplava dieci cieli, e che potrebbe avere qualche relazione con le dieci medie attribuite ai pitagorici.

In sostanza, la relazione tra aritmetica e armonia sembra essersi svolta secondo due modalità distinte, anche se complementari; una, non approfondita concettualmente, di ispirazione poetico-musicale, che vedeva i fenomeni celesti come armonicamente ordinati; l'altra, molto più complessa, che vedeva nell'armonia il principio formatore del mondo, al di là della semplice espressione artistica, comprensibile attraverso l'aritmetica. Questo punto di vista è pienamente sviluppato alla fine dell'antichità, ma doveva essere presente molto prima, forse anche prima che i pitagorici ne avessero dato una formulazione in termini matematici, sia pure in modalità diverse da quelle cui si ispirava Proclo. Vi è qualche affinità con l'India vedica, dove le norme per l'edificazione degli *altari del fuoco* imponevano la definizione di precise regole matematiche, di natura geometrica e architettonica però, non aritmetica. Questa predilezione per l'aritmetica sembra essere originariamente greca, ma lo stadio elevato cui era giunto lo studio della musica in tutta l'area mediterranea orientale fa pensare che sia stata ispirata alle ricerche sull'armonia iniziate nel vicino oriente già tempo prima dei pitagorici.

Infine, più per completezza di trattazione che per l’effettiva sua importanza, esaminiamo quella parte dell’aritmetica che potremmo definire, in assenza di altre denominazioni, ‘aritmetica per rapporti e somme’. Si tratta di combinazioni aritmetiche non legate a specifiche proprietà dei numeri o algoritmi, ma di relazioni che attirano l’attenzione, senza svolgere alcuna altra funzione, perché operativamente si collocano al livello più basso. Ne abbiamo molti esempi dalla più remota alla più tarda antichità; vediamo il contributo di Plutarco, per la connessione con la teoria armonica. Nel suo *De animae procreatione*... troviamo che la peculiarità di 27 consiste nell’essere la somma degli altri termini delle due quaterne (1 + 2 + 4 + 8 + 3 + 9 = 27) – questo tipo di ‘metodo di scomposizione in somma’ assumeva notevole rilievo: p. es., la “sacra” *tetractýs* era tale perché la somma dei suoi numeri (1 + 2 + 3 + 4) dà 10, la decade, che i pitagorici tenevano in alta considerazione. E ancora, la somma dei primi quattro numeri pari (partendo da 1 : 1, 2, 4, 8) dà 15 , il “numero triangolare di 5 ” (da intendersi che è il quinto numero triangolare, partendo da 1), quella delle prime quattro potenze di 3 sempre partendo da 1 dà 40 (1 + 3 + 9 + 27 = 40) ecc.; “per mezzo di questi numeri i maestri misurano tutti gli intervalli musicali, dei quali uno chiamano diesis e l'altro tono”; infatti, “Questo numero 40 deriva dalla forza del numero quaternario tramite la moltiplicazione. Per ognuno dei primi quattro numeri, moltiplicati ciascuno per quattro, i prodotti saranno 4, 8, 12, 16, che, sommati tutti insieme, fanno 40, comprendendo tutte le proporzioni di armonia. Infatti 16 è una sesquiterza [1 + 1/3] rispetto a 12, doppio di 8 e quadruplo di 4.

Inoltre, 12 ha una proporzione sesquialtera [1 + ½] rispetto a 8 e tripla rispetto a 4. In queste proporzioni sono contenuti gli intervalli di diatessaron, diapente, diapason e doppio diapason. Inoltre, il numero 40 è uguale ai primi due quadrati e ai primi due cubi presi insieme. I primi quadrati sono 1 e 4, i primi cubi sono 8 e 27, che, sommati insieme, fanno 40. Da ciò appare che la quaterna platonica è molto più perfetta e piena di varietà rispetto alla pitagorica [la successione 1, 3 , 6 , 10]." È difficile stabilire quanto di questa aritmetica fatta di somme e rapporti semplici avesse influenzato l'effettiva pratica musicale; è però vero che di aritmetiche e geometrie basate su questi metodi elementari vi sono molti esempi, e le scale musicali vi si prestano molto bene.

Il *Timeo* è un testo complesso, dove considerazioni matematiche sono inserite in una vasta cosmogonia indipendente da quella della religione popolare; non è decidibile quali parti siano importate dal pensiero di 'Timeo', personaggio dai contorni confusi, che forse rappresenta la filosofia pitagorica, o una sua ramificazione, o altro, o siano originali del pensiero di Platone, e così via; limitandoci a valutazioni matematiche, possiamo formulare alcune osservazioni, in parte congetturali. Lo schema stesso del monologo di Timeo indica due ambiti; quello armonico con la fusione di due tetradi e le elaborazioni fatte su queste per costruire una scala armonica, e quello geometrico – spaziale. A fondamento dello schema armonico possiamo riconoscere una base aritmetica nelle due tetradi, dei quadrati e dei cubi, che possono rimandare alle classificazioni attribuite ai pitagorici. L'aspetto armonico, per il suo collegamento con i circoli dell'equatore (cioè il circolo massimo della sfera) e dell'eclittica (il percorso del Sole riferito alle stelle fisse), è il più misterioso, proprio in relazione alla divisione del cielo; e, se andiamo oltre alla relazione religioso – simbolica dell'astronomia con l'armonia, possiamo riconoscervi una suddivisione dei circoli celesti secondo intervalli razionali, vale a dire un principio di partizione infine basato su frazioni. La partizione frazionaria, basata sulle frazioni proprie con numeratore unitario, è un sistema applicabile a qualsiasi grandezza od oggetto materiale o immaginato divisibile in un numero arbitrario di parti, ed è universale in quanto a metodo di calcolo, perché non dipende dalla particolare base di numerazione prescelta, sia essa dieci, o dodici o sessanta ecc.; quest'ultima è preferibile perché i calcoli frazionari sono più agevoli quando i denominatori hanno molti fattori, e da questo punto di vista 12 è preferibile a 10, e 60 a 12. Inoltre 60 è sottomultiplo di 360, il numero dei giorni approssimativamente uguale all'anno; 30 è approssimativamente uguale al ciclo lunare; i mesi sono collegati alle attività agricole ecc. Ma, a parte le considerazioni astronomiche che collegano spazio e tempo (360 giorni e 360 gradi rimandano alla correlazione tra la dimensione spaziale e quella temporale), il calcolo frazionario va considerato anche in relazione alla calcolabilità dei quozienti esatti. Se ci limitiamo alla funzione delle frazioni come partizioni di un intero, questo aspetto rimane ancora nascosto; diversa è la questione se consideriamo differenze, rapporti, prodotti, tutte le operazioni aritmetiche. Già nel calcolare una somma o differenza, si può procedere prima convertendo in una data base le frazioni e poi eseguendo il calcolo, ma chiaramente non è un buon metodo perché può esigere un numero elevato di cifre, anche infinito; basta considerare l'espressione decimale di $\frac{1}{3}$. In ogni caso, 'una parte su tre' non significa 'uno diviso tre'. Un metodo ovvio è quello di moltiplicare tutte le frazioni implicate in un calcolo per il denominatore comune, o per il prodotto dei singoli denominatori, e tenerne poi conto esprimendo il risultato come una frazione avente per denominatore il moltiplicatore applicato; ed è, direi, il metodo che conduce al sistema sessagesimale, o almeno al duodecimale, attestato in certe culture arcaiche (ne sopravvivono tracce nel sistema monetario inglese prima che fosse adottato il sistema decimale; p. es. 1 sterlina = 12 pence, nel sistema 'imperiale' delle unità di misura, p. es. 1 piede = 12 pollici, 1 iarda = 3 piedi = 36 pollici ecc.). Le frazioni soprattutto sono quozienti esatti; una frazione come cinque terzi esprime immediatamente ed esattamente un rapporto tra quantità, una parte eccedente di due terzi una quantità data, molto meglio di quanto non si ottenga con la conversione in una base come dieci e comunque più immediatamente di qualsiasi altra frazione equivalente espressa, p. es., in sessantesimi. Le frazioni – almeno quelle della forma $\frac{1}{n}$, proprio quella considerata fondamentale dagli antichi Egizi – sono le inversioni dei multipli, come le radici lo sono delle potenze; esse implicano i numeri perché li implicano i multipli interi delle grandezze, e sono affatto indipendenti da qualsiasi sistema di numerazione, anche se ovviamente vengono rappresentate mediante segni che denotano numeri. Infatti, possono essere trattate aritmeticamente come i numeri, pur non essendo tali.

Se consideriamo la base frazionaria della scala musicale del *Timeo* come indice della suddivisione del circolo celeste, possiamo intravvedervi un modo molto antico di valutare le partizioni, probabilmente antecedente la scrittura. Oggi svolgiamo calcoli relativamente complessi con più cifre perché la scrittura evita di memorizzare i singoli passaggi; senza un sistema di segni, o almeno senza un sistema adeguato a rappresentare algoritmi di calcolo di qualche difficoltà, la manipolazione delle frazioni sembra essere il metodo migliore, se non l'unico, di procedere. Questa procedura esige una certa serie di abilità, p. es. quella di scomporre una frazione con numeratore unitario in una somma di frazioni ecc.; le citazioni al riguardo che scopriamo nei papiri egizi possono essere tanto esercizi per far acquisire queste abilità, quanto illustrazioni di come si deve procedere nei vari casi. Quindi invece di trovare il modo di evitare la memorizzazione dei passaggi di calcolo – come si fa al giorno d'oggi – gli antichi Egizi avrebbero tramandato metodi memorizzabili da abili calcolatori nelle tecniche di calcolo delle frazioni; i Babilonesi procedevano mediante tabulazioni. Peraltro, non è detto che gli Egizi stessi non vi facessero ricorso, e il loro metodo di calcolo della divisione, per quanto complicato, poteva essere utile qualora non vi si arrivasse direttamente con le frazioni.

La radice matematica, computazionale, dei sistemi filosofico – cosmogonici quali quello del *Timeo*, o precedenti, è quindi piuttosto banale, e non deriverebbe da concezioni metafisiche. Bisogna però fare attenzione a non ignorare il significato simbolico dei numeri. La 'numerologia' comunque intesa, il concetto attribuito ai pitagorici del numero, ecc. non sono riconducibili a mere valutazioni di genere computazionale; non si tratta solo di esigenze pratiche di calcolo, di regole imposte dal calcolo stesso, riscontrabili negli sviluppi documentati e in quelli che non lo sono, deducibili dalla stessa struttura dell'aritmetica che ha pure valenza oggettiva, ma di commistioni, integrazioni tra la sfera di ciò che la struttura del numero obbligatoriamente implica e l’immaginario connesso alla sacralità, a tentativi di descrizione e comprensione del mondo non puramente meccanici, che oggi possono apparire artificiosi e ingenui in quanto mitico – scientifici, una mescolanza che – prescindendo dalla funzione storica volta – appare provvisoria, irrazionale, a chi abbia una mentalità scientifica nel senso attuale del termine. La questione è fondamentalmente semplice, quasi disarmante: la specializzazione approfondisce i singoli settori oggetto di indagine a scapito di una visione unificante del cosmo, alla cui frattura molti cercano di rimediare a modo loro, senza potersi appoggiare ad un sistema universalmente condiviso.

Il precedente esame della struttura frazionaria sottostante l’armonia del *Timeo*, anzi qualsiasi scala musicale consonante cioè siffatta da evitare dissonanze, rimanda molto probabilmente ai metodi egizi di calcolo delle frazioni. La somiglianza è forte, e – se la uniamo con la tradizione per la quale Pitagora, Talete ed altri avrebbero avuto relazioni con gli Egizi – vi troviamo una precisa suggestione; niente di più che una congettura (impossibile andare oltre, con le fonti di cui disponiamo), ma sensata, specialmente se accettiamo che Pitagora in particolare avesse accesso alla sapienza egizia. Inoltre, proprio nel *Timeo* e nel successivo *Crizia* si narra la leggenda dell’Atlantide (non vi sono altre fonti oltre Platone) che deriverebbe da sacerdoti egizi, Timeo potrebbe essere un epigono dei pitagorici o lui stesso membro di una associazione che al Maestro si richiamava, per cui si può a mio avviso ritenere verosimile che una parte almeno – quella ‘armonica’ – del dialogo contenga nozioni egizie.

Ma anche la struttura della costruzione dei solidi, o piuttosto delle loro superfici, rammenta sia pur vagamente, da lontano, metodi egizi; o forse applicati universalmente in quanto abbastanza ‘naturali’, intuitivi, elementari. Su questo punto infatti non è possibile dimostrare una peculiarità della geometria egizia, da cui derivare metodi greci. Faccio riferimento specialmente al metodo di scomposizione – ricomposizione, che in aritmetica troviamo nei calcoli frazionari riportati nei papiri, ma che è impiegato anche in geometria: p. es. nella rappresentazione geometrica del quadrato del binomio, della proprietà distributiva come applicata anche da Euclide ecc. e anche nella geometria solida, dove suggerisce regole per il calcolo di volumi non espresse esplicitamente in formule, ma in algoritmi di calcolo. Si tratta però di procedure che ritroviamo nella matematica indiana (vedi la dimostrazione del teorema di Pitagora offerta da *Bhāskara*, quella dello *Zhoubi Suanjing*, e anche quella che ad alcuni è sembrata la più probabile da attribuirsi ai pitagorici [*vedi*]), ma che proprio per la loro diffusione – non necessariamente dovuta a scambi culturali proprio per la loro elementarità – potevano aver influenzato i pitagorici o quanti tra i Greci avevano elaborato questa teoria dei solidi.

L’idea della superficie piana come limitante una parte dello spazio dovrebbe derivare dall’architettura. Purtroppo è tanto facile immaginare che la geometria abbia avuto strettissimi rapporti con l’architettura quanto trarre da questo semplice accostamento qualche utile informazione. L’architetto non edifica solo muri, crea anche degli spazi, generalmente mediante superfici piane. L'angolo retto, il quadrato, il rettangolo, sono elementi costitutivi onnipresenti in architettura, e la citazione del solido come limitato da superfici piane non è affatto innaturale in questa prospettiva. Si noti che Timeo definisce il solido come ciò che deriva da superfici, e che queste a loro volta derivano dall'angolo retto. Anche l'osservazione di certe forme cristalline potrebbe suggerire qualcosa del genere, ma in questo caso non si spiegherebbe l'importanza dell'angolo retto. La via preferibile sembra essere l'assimilazione della divinità al supremo Architetto, un tema questo presente in contesti diversi, p. es. nel simbolismo massonico, e nello stesso cristianesimo per via dell'influenza del platonismo, che non vuol dire solo il Creatore, ma il Costruttore, dato che l'angolo retto è lo schema della squadra, o della verticale del filo a piombo rispetto al suolo ecc. Ma l'angolo retto regola la forma degli altari, in particolare di quelli le cui facce sono quadrati, come pare fosse l'altare del tempio di Apollo a Delo, quello di cui parla la leggenda a proposito della duplicazione del cubo.

Un punto, forse erroneamente trascurato, da chiarire è perché, se la scala del *Timeo* ha qualche relazione con l'armonia, venga costruita a partire da due serie geometriche. Mi permetto di proporre una spiegazione, da prendersi come puramente ipotetica. Il metodo è affine a quello adottato da *Pappo* per costruire le medie generalizzate – quelle aggiunte alle tre fondamentali, aritmetica, geometrica, armonica – tra due estremi interi. Il metodo permette di ottenere tutte le terne a , b , c di numeri interi, dove a e c sono gli estremi e b la media. Potrebbe essere che non utilizzassero la base 10, ma una sorta di 'base indeterminata' intera, p. es. n, n^2, n^3 o anche $1, n, n^2$. Anziché esprimere un intero come somma di potenze di 10 moltiplicate ciascuna per un coefficiente intero (la cifra del nostro sistema posizionale; p. es. $218 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$), si può scriverlo come $i \cdot \alpha + j \cdot \beta + k \cdot \gamma$ con $\alpha\ \beta\ \gamma$ in progressione geometrica. Operando con le sole medie aritmetica e armonica è possibile ottenere, a partire da due quaterne che sono progressioni geometriche, i rapporti armonici e altri termini della scala, che si collocano alle ottave più alte. Ma perché adottare un metodo così astruso, quando basterebbe partire dai rapporti armonici senza derivarli dalle progressioni? Ci potrebbe essere una ragione, legata al significato di rapporto, $m : n$. Generalmente, oggi questo può essere inteso come multiplo di un sottomultiplo, che scriviamo come frazione $\frac{m}{n}$, una quantità costituita da m parti uguali a quella parte di un intero, che si ottiene dividendolo in n parti uguali. Ma questo concetto è concretamente legato a operazioni fatte su quantità materialmente divisibili, cioè su oggetti materiali, pesi, volumi, ecc. Nel nostro caso è applicabile alla lunghezza della corda, ma non al suono in quanto tale da essa prodotto. Un suono poteva essere considerato indivisibile, e gli intervalli armonici non erano valutati come quantità. Perciò i rapporti armonici non sarebbero stati definiti in termini di multipli e sottomultipli di una stessa quantità, perché non sarebbe stata considerata tale l'altezza del suono. Ciò che distingueva gli accordi era la loro consonanza e la dissonanza, quindi si era pensato di ottenere la serie dei rapporti armonici a partire dalle ‘basi’ fondamentali due e tre, espandendole con le medie, aritmetica e armonica. I pitagorici cercavano un fondamento aritmetico dell’armonia, non il contrario; quindi i numeri della scala armonica dovevano essere giustificati a partire dalle progressioni e dalle medie, gli strumenti fondamentali della loro aritmetica, che ‘legavano’ tra di loro i numeri in un modo che veniva percepito come armonia musicale in ambito acustico, e come tessuto cosmico in ambito cosmogonico. Il concetto è stato espresso esplicitamente da Proclo, nel suo *Commento al Timeo di Platone.* (vedi)

Un’altra strada, meno orientata da considerazioni teoriche, non documentabile ma preferibile perché basata su ciò che possiamo ragionevolmente ipotizzare intorno al fondamento matematico della scala del *Timeo* e perché esplora ciò che può essere accaduto prima senza effettuare collegamenti con sviluppi successivi – che semmai riprendono o continuano metodi la cui origine si colloca in epoche anteriori – consiste nell’esplorare la ‘stratificazione’ logico-deduttiva della serie numerica descritta da Timeo. Molto più delle ricostruzioni filologiche, quelle fisico-matematiche hanno carattere di oggettività. Detto in povere parole, la matematica e le leggi fisiche sono quelle che sono, e le relazioni che possiamo scoprire al loro interno non sono dovute all’interpretazione dello scopritore. I giudizi di quest’ultimo devono essere messi a confronto con la struttura della matematica, per cui conviene tentare questa via.

Il punto di partenza è che una scala ottenuta espandendo con medie armonica e aritmetica due progressioni geometriche molto difficilmente può avere origine dalle scale musicali effettivamente impiegate, o dall'analisi degli strumenti, se non altro per la sua estensione che supera l'ottava fino a più di quattro ottave, di gran lunga eccedente i suoni del tetracordo, dell'ottacordo, della lira ecc. Se vogliamo individuare un passaggio che dalla matematica conduca all'acustica possiamo supporre, anzi è necessario presupporlo, che i pitagorici avessero eseguito esperimenti su un *monocordo* in modo da studiare i suoni prodotti dalle divisioni della corda in due o tre parti uguali, e dalle ulteriori divisioni secondo la stessa modalità, ottenendo la seconda armonica, la quarta, l'ottava di frequenze rispettivamente uguali a due, quattro, otto volte quella fondamentale (la frequenza è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda oscillante), e la terza, la nona… con frequenze tre, nove, ventisette volte maggiori della fondamentale. Queste frequenze, molto elevate, non possono essere prodotte dagli strumenti di uso comune, e comunque non avrebbero molto interesse sotto l'aspetto estetico. I pitagorici potevano aver compreso che il *diapason* (l'intervallo di ottava) è particolarmente consonante, in quanto ottenuto dalla sollecitazione della metà della corda e che gli altri intervalli consonanti (di quinta, di quarta) siano riduzioni entro l'intervallo di ottava delle armoniche superiori, che hanno rapporti interi (2, 3, 4, 5…) con la fondamentale e che sono anch'esse consonanti perché generate dalla terza, quarta ecc. parte dell'intera corda; e nell'effettuare la loro ricerca si sarebbero limitati alla seconda armonica e alle potenze di due (ottava, ottava dell'ottava ecc.) e alla terza armonica e relative potenze (ottava della quinta, e così via). Questo metodo porta alle due serie complessivamente di sette numeri (1, 2, 3, 4, 9, 8, 27) sperimentalmente associati ad alcune armoniche superiori. È chiaro che questo metodo non è puramente scientifico secondo i criteri attuali, ma non era neppure la riduzione ad uno schema meramente descrittivo di nozioni già acquisite dai musicisti. Anche l'applicazione delle medie è un procedimento matematico, che produce i numeri associati agli intervalli armonici fondamentali; ma questi sono i risultati, non i dati da cui i pitagorici erano partiti. Se lo fossero stati, non vi sarebbe stata alcuna necessità di procedere in questo modo; se l'acustica aveva contribuito alla formazione delle due quaterne, il suo apporto doveva consistere nello studio delle armoniche superiori. Si tenga infine presente che il monocordo *non* è essenzialmente uno strumento musicale.

Infine, se come sembra la serie del *Timeo* riassume in sé il significato armonico e quello cosmologico – astronomico, è possibile che essa sia una delle premesse dell'associazione dell'armonia con l'astronomia. *Sembra ragionevole* che tale affinità non derivi da una matematica astratta, ma al contrario il numero provveda a riconoscere un'affinità e ad esprimerla più compiutamente. Il fatto è che non sappiamo se la scoperta delle relazioni interne all'aritmetica preceda o meno la conoscenza dell'armonia, né sappiamo come nella più remota antichità aritmetica e armonia fossero connesse e, infine, quali fossero le nozioni pregresse in possesso ai pitagorici quando si cimentarono nelle loro ricerche. Le tavolette mesopotamiche ci dicono chiaramente che, nel XX millennio a.C., il calcolo aveva raggiunto un livello per lo meno discreto, e non è pensabile che la riflessione sui numeri non avesse condotto ad una conoscenza dell'aritmetica non limitata al calcolo applicato: basterebbe l'elenco delle terne pitagoriche babilonesi a confermarci in questa opinione. E non è nemmeno da escludere che prima ancora della matematica testimoniata dai reperti mesopotamici fosse stata elaborata un'aritmetica al livello del *Timeo* o superiore.

Le discussioni precedenti evidenziano un conflitto costante tra ciò che ci aspettiamo in quanto ‘estremamente ragionevole’, e cioè che delle nozioni siano passate ai Greci dall’Oriente, e le informazioni in nostro possesso per quanto riguarda le influenze dalle civiltà mesopotamiche. Non vi è nulla di provato, né in un senso né in quello opposto, per il periodo precedente il IV sec. a.C.; diversa è la questione per i tempi seguenti, riguardo all’astronomia e non solo. Vi sono due generi di obiezioni contro le tesi a favore della trasmissione di nozioni matematiche (e non solo): il primo, che molte di tali nozioni derivano da un patrimonio comune antecedente ogni ricerca o tecnica; precisamente: la relazione d’ordine, rispetto al tempo e allo spazio; l’invarianza di dimensioni e forma per traslazioni e rotazioni; la simmetria nel piano; la similitudine, ovvero la forma uguale. Aggiungerei il contare, e il numero e la nozione di grandezza, sia pure in modalità grezza. Se ci sono le motivazioni e le circostanze localmente adatte possono aversi sviluppi paralleli, anche con caratteri molto simili anche in assenza di scambi culturali. Si prenda esempio dal sistema metrico decimale: pare fosse stato adottato dalla civiltà di Harappa nella pianura dell’Indo, ma nulla ci autorizza a pensare che l’uso del sistema di calcolo decimale in Occidente derivi da quello. Vi è affinità tra il modo di scrivere certi numeri nei papiri egizi e nei *Śulbasûtra,* ma potrebbe essere che, in determinate fasi dello sviluppo della matematica, si adottino metodi affini. La relazione tra numero e figura geometrica può essere scoperta e sviluppata in contesti culturali diversi. La necessità di sincronizzare il calendario solare e quello lunare sorge in civiltà diverse, e il problema si risolve adottando soluzioni affini, ecc. Non bisogna dimenticare che la matematica si fonda su schemi che non dipendono dalle culture particolari e che noi siamo in grado di comprendere, riprodurre, riconoscere, applicare e antecedenti ad ogni formulazione anche linguistica. Perciò la rilevazione di tratti comuni tra culture diverse non implica di per sé nessuno scambio culturale.

Vi sono poi obiezioni, gravi ma non assolutamente decisive, di carattere più specifico; anzitutto, quelle derivanti dalla geografia. La Ionia e la Grecia continentale sono separate dalla Mesopotamia dalle distanze, e da ostacoli naturali: i rilievi, zone steppose o desertiche, che possono essere attraversate da carovane almeno in tempo di pace. Tuttavia, le conquiste di Nabucodonosor, che giunsero fino al Mediterraneo proprio nel VI sec. a.C., unirono le coste di quel mare a Babilonia, rimuovendo almeno gli ostacoli di natura politica alle reciproche comunicazioni. Ma i Greci erano un popolo marinaro, che stabiliva contatti con i Fenici e gli Egizi; dai primi dedussero l'alfabeto, e non utilizzarono il sistema sessagesimale. Non risultano reperti di manufatti di origine mesopotamica nella Grecia preclassica, o viceversa, ma ceramiche di origine ateniese e corinzia tuttora conservate giunsero in Etruria: indicazione significativa di quali fossero le rotte commerciali e, di conseguenza, le direzioni degli scambi culturali. Se ne trovano sulle coste dell'Asia verso la fine del IX sec., è provata la presenza di insediamenti di mercanti greci nella Fenicia, e poi nella Cilicia, alla fine del settimo. È provato che mercenari ioni abbiano militato negli eserciti dell'impero neo-babilonesi, e che Ioni e Carii abbiano visitato Babilonia in quel tempo. Le fonti greche in merito sono scarse [HELLER 2015]; p. es. Erodoto ignora il lungo assedio posto a Tiro da Nabucodonosor. Se consideriamo la questione solo da questo punto di vista, la congettura secondo cui i Greci dell'età preclassica avrebbero appreso elementi di matematica dall'Oriente non si porrebbe nemmeno seriamente; di fatto, storicamente, si appoggia solo su racconti intorno a Talete e Pitagora. È fuori discussione che, se proprio si vuol indagare sugli scambi culturali, l'area geografica di riferimento sia il Mediterraneo orientale, ovvero Egitto e Fenicia. Della seconda s'è parlato pochissimo (appunto, si è parlato); resta l'Egitto. Le considerazioni testé svolte, e le stesse testimonianze degli scrittori antichi, inducono a ritenere che l'influenza mesopotamica sia stata sopravvalutata negli ultimi decenni a scapito degli Egizi, a causa dei rilevamenti archeologici (le tavolette di argilla sarebbero almeno trecento) e dell'autorità di Neugebauer. Ma i caratteri della cultura greca sono così specifici, anzi peculiari, da consigliare molta prudenza nell'accettare facilmente l'idea che l'origine della matematica greca vada cercata altrove.

Inoltre, sarebbe bene rinunciare all'idea di ottenere qualche conclusione dal confronto con le tavolette babilonesi dell'Antico Regno; abbiamo già esaminato la debolezza di metodi che vogliono connettere epoche lontane.

L'analisi, anche non molto approfondita, di ciò che ci è pervenuto, escludendo quanto ci è stato riportato intorno alle scoperte di Talete, e includendo parte della cosiddetta matematica pitagorica, non può non lasciare perplessi, in particolare per quanto riguarda i papiri egizi. *In primis*: cinque o sei documenti, su un periodo di *migliaia* di anni, sono nulla o quasi. È senza senso pretendere di conoscere la matematica egiziana antica da un campione così irrisorio. Si può restare perplessi dall'inutile complicazione dei calcoli, dall'elementarità della loro esecuzione, dall'uso di scomporre frazioni in somme di frazioni con numeratore unitario, e vien da pensare che in tanti secoli (circa dieci rispetto all'epoca di Pitagora) si sia trovato di meglio, non documentato. Eppure, nella geometria greca non si trova nulla che possa far supporre influenze esterne. La stessa analisi indeterminata di Diofanto, elaborata secoli dopo Pitagora, non rivela nulla del genere; eppure Euclide, Diofanto e altri fiorirono in Alessandria. La conclusione sembra inevitabile: la matematica degli antichi Egizi non aveva raggiunto il livello che ci attenderemmo se la giudicassimo alla luce delle loro opere architettoniche. È forte il sospetto che si trattasse di matematica bambina, non tanto nel senso di una tecnica non ancora ben affermata, ma di matematica 'per bambini' o, piuttosto, per calcolatori apprendisti. Questo spiegherebbe sia la scelta dei dati dei problemi, tali da essere facilmente eseguibili a non esperti, sia la mancanza di formule. In un eserciziario si pongono problemi eventualmente illustrando la procedura, e comunque l'insegnamento della matematica anche oggidì parte dalle regole di calcolo, non dalle formule. Si prenda l'algoritmo della divisione:

c'è una formula della quale esso è un'applicazione, ma i discenti imparano ad applicare l'algoritmo. È stata notata la somiglianza tra i procedimenti a noi noti e le fasi di apprendimento di fanciulli e adolescenti, salvo interpretarla in chiave di rapporto tra *ontogenesi* (lo sviluppo cognitivo individuale) e *filogenesi* (quello su scala storica); v. GIACARDI-ROERO, cit. Ma, forse, si tratta solo di testi per studenti. Si prendano gli esempi di scomposizione di frazioni in somma di frazioni con numeratore unitario: non ha nessun senso un procedimento del genere, a meno che non si voglia trasformare il calcolo in una scienza arcana, accessibile a pochissimi. Potrebbe essere; sembra ragionevole che questi procedimenti di scomposizione fossero un'ottima palestra per apprendere a manipolare le frazioni. Tuttavia, troviamo metodi analoghi nei *Śulbasûtra* che *non sono* testi ad uso didattico; e comunque un testo esemplificativo dovrebbe riportare esercizi e problemi che riflettono lo stile di calcolo in uso. Anche i Greci operavano sulla scomposizione delle figure, e sulle loro somme e differenze. Anche la relativamente sofisticata dimostrazione del teorema di Pitagora fornita da Euclide in I.47 è una successione di tali operazioni. Divisione, somma, differenza sono operazioni comuni in tutte le fasi della matematica, e i papiri egizi ne sono esempi, certo ad un livello apparentemente alquanto primitivo.

E, soprattutto, nulla ci autorizza a concludere che dai reperti o dalle testimonianze di scrittori si possa dedurre l'effettivo stato delle scienze nell'antichità preclassica, specie considerando che nelle epoche passate la tecnica delle singole arti non veniva facilmente divulgata, anzi era segreta: si rifletta sulla costruzione delle cattedrali. Non abbiamo trattati in proposito. Così per le rotte navali: all'inizio dell'età moderna erano note a pochi capitani. La divulgazione delle scoperte, dapprima fra gli studiosi, e poi in qualche misura anche tra il grosso pubblico, è prassi moderna, promossa in particolare dagli enciclopedisti. Possiamo quindi presumere che la scienza antichissima fosse alquanto più estesa e profonda di quanto parrebbe dalle fonti pervenuteci, scarse e incerte, non ne conosciamo quindi la relazione speciale che potesse esservi con la matematica. Per es., non possiamo stabilire fino a che punto l'edificazione di edifici privati, pubblici o templi dipendesse da conoscenze matematiche o da tecniche di origine empirica, ordinate secondo procedure trasmesse all'interno di corporazioni di specialisti. Stesso discorso può farsi per la cantieristica, e per la navigazione. Gli Aztechi, sembra, non avevano affatto elaborato una matematica avanzata, eppure erano grandi costruttori. Lo stesso, abbiamo visto, potrebbe dirsi degli Egizi. Il caso degli altari vedici è diverso; per edificarli sono necessarie alcune competenze matematiche, non per la costruzione in sé, ma per le particolari condizioni imposte, che implicavano analisi numeriche.

Le considerazioni predette portano ad una conclusione: non possiamo sapere con sufficiente precisione ciò che fu trasmesso ai Greci. Non si tratta solo del livello delle conoscenze, e neppure del numero di visitatori e dell'intensità degli scambi. Se la scienza era fonte di potere, dobbiamo aspettarci che i suoi detentori si guardassero bene dal divulgarla: se era riservata in modo esclusivo a corporazioni di scribi e sacerdoti, non possiamo certo attenderci che venisse comunicata agli stranieri; a meno che personalità eccezionali non vi fossero iniziate; in effetti, è ciò che le fonti antiche affermano.

Quanto detto finora significa solo che non possiamo stabilire con certezza cosa la matematica greca abbia tratto almeno all'inizio dalle civiltà circostanti. Quanto già visto a proposito delle scoperte attribuite a Talete e degli studi di musica possono offrire tracce più che probabili al riguardo, *non specialmente per i contributi di Babilonesi ed Egizi*, ma guardando alle civiltà costiere dell'Asia Minore e zone limitrofe.

L'astronomia, e la sua connessione con la musica, è verosimilmente la connessione più probabile ancorché verosimilmente indiretta con Babilonia, attraverso la mediazione delle civiltà geograficamente distribuite nel vicino oriente.

Una strada, assai poco battuta, che conduce al vicino oriente è la *gematria*, ovvero il metodo che stabilisce l'equivalenza tra due nomi o parole in base al loro numero; ogni lettera corrisponde ad un numero. Forse, l'esempio più noto è il 'numero della Bestia' dell'Apocalisse di Giovanni (13:18), 666 , spesso riferito a Nerone, per la verità su basi un po' deboli. Era una tecnica molto in uso presso gli Ebrei, i cabalisti in particolare, e il termine deriva chiaramente dal Greco γεωμετρία, ma non è attestato nella Bibbia. La spiegazione più ovvia è che avesse origine in epoca ellenistica dalla *isopsefia* già praticata dai Greci, che è la stessa cosa. Ecco un esempio:

Si notino la somiglianza con il disegno della *tetractýs* pitagorica e l’inserimento nel triangolo.

I Greci presero l’alfabeto dai Fenici, ma non anche i valori numerici delle lettere, dato che i Fenici impiegavano segni distinti dalle lettere per i numerali. Inoltre, l’alfabeto ebraico deriva da quello aramaico, a sua volta derivato dal fenicio, per via della permanenza degli Ebrei in Babilonia. La *gematria* però è attestata, pochi secoli prima, tra gli Assiri e non solo: “L'uso delle lettere per indicare i numeri era noto ai Babilonesi e ai Greci. Il primo utilizzo della gematria si trova in un'iscrizione di Sargon II (727–707 a.C.) la quale afferma che il re costruì il muro di cinta di Khorsabad [presso Mossul] lungo 16.283 cubiti [ca. 8 km] per corrispondere al valore numerico del suo nome. L'uso della gematria (τὸ ἰσόψηφον) era diffuso nella letteratura dei Magi e tra gli interpreti dei sogni nel mondo ellenistico.” In sé questa informazione non dimostra che i Greci e i pitagorici in particolare abbiano appreso la loro *isopsefia* dai popoli mesopotamici, per quanto in questo caso la reciproca indipendenza sia meno ovvia che non per la matematica. Una delle più antiche testimonianze risale ad Apollonio di Perga, nel III-II sec. a.C., non poi tanto prima della comparsa della *gematria* in ambiente ebraico, ma molto tempo dopo l'epoca di Sargon II. Tuttavia, se pur non vi è relazione diretta tra pitagorismo e numerologia babilonese, l'idea pitagorica dell'universalità del numero poteva estendersi in qualche modo all'alfabeto e al linguaggio. Anzi, se si afferma che tutto sia numero senza limiti, per coerenza si deve estenderlo alla parola. Lo stesso alfabeto greco, introdotto inizialmente a Mileto, avrebbe suggerito la connessione. Vi è un'altra traccia, che porta al pensiero tradizionale ebraico, certo non indipendente da tradizioni semitiche e iraniche, ed è la relazione tra le lettere dell'alfabeto e la creazione stessa. Lo sviluppo di quest'idea è relativamente tardo, ma la creazione mediante la parola è attestata nel Libro della Genesi e non è peculiare della sola tradizione ebraica antica. Se la parola è connessa alla creazione, e se per via del valore delle lettere assume un valore numerico, allora il numero stesso è connesso alla creazione. Non dobbiamo dedurne che la scelta di indicare i numerali con le lettere dell'alfabeto greco sia stata una conseguenza di una siffatta cosmogonia, ma che abbia influito sulla cosmogonia pitagorica e platonica del *Timeo* sembra accettabile. È possibile, conformemente all'opinione prevalente, che la funzione del numero nella creazione derivi dall'importanza che i pitagorici gli attribuivano, ma la connessione numero – lettera – nome – creazione avrebbe potuto essere essa stessa all'origine di tale importanza. Non era tanto la *gematria* ad essere importata (non vi è evidenza che i primi pitagorici l'abbiano applicata), ma la suggestione indotta da tale connessione. Manca la prova di una sua derivazione dall'oriente, ma abbiamo già visto che di 'prove' su qualsiasi cosa i pitagorici o altri avrebbero accettato dall'esterno non ve ne sono; possiamo solo formulare ipotesi, e la base in questo caso è che sia gli Ebrei che i Greci assegnavano valore numerico alle lettere, e che in oriente qualche secolo prima i nomi personali avevano un valore numerico. Detto ciò, non possiamo non notare come la cosmogonia del *Timeo* sia affatto diversa da quella greca tradizionale, quella cioè di Esiodo. Quella, anche a prescindere dalla connessione tra parola e numero, non sembra ricondursi al pensiero greco antico. Si tratta di qualcosa di *nuovo*, che va oltre ad eventuali nozioni di astronomia, e che supera mitologia e teologia greche. Se consideriamo questi elementi, sembra molto difficile sostenere l'autonomia del pensiero pitagorico originario rispetto al vicino oriente.

Tra i seguaci di Pitagora si distinguevano i *Matematici* dagli *Acusmatici* e – strana coincidenza? - *μάθημα* è connesso a μανθάνω, 'apprendo'; μαθηματικός può tradursi come 'appassionato di apprendimento' ovvero 'studioso'. L'accezione di 'matematico' nel senso attuale si trova già in Aristotele, nella Fisica, ma deriva dalla specializzazione del sapere.[36] Nulla esclude che il carattere euristico, figurativo, classificatorio di parte di ciò che fu attribuito ai pitagorici derivi dall'esser stata la scuola di Crotone, appunto, una scuola, dove si apprendeva anche altro dalla particolare sapienza di Pitagora. L'intenzione stessa di essere un'autorità in una comunità cittadina avrebbe implicato occuparsi dell'istruzione pubblica, oltre che della dif-

36 Sulle due tendenze, v. FERGUSON 2010.

fusione di una specifica dottrina settaria. In seguito, dopo i disastri della metà del V sec., gli 'studiosi' si applicarono alla matematica oltrepassando i primi risultati della scuola originaria, procedendo ben oltre l'insegnamento di Pitagora. Ma, tornando al profilo del fondatore e dei primi pitagorici, possiamo ravvisare qualche altra traccia di influenza babilonese.

La scienza greca ebbe un rapido sviluppo nel VI sec. a.C, l'età di Nabucodonosor e del nuovo impero babilonese. Questo sovrano, a modo suo illuminato, fu guidato dall'ambizione di fare di Babilonia una grande capitale anzitutto sotto l'aspetto architettonico; aveva bisogno di esperti, e forse – come la Bibbia suggerisce, p. es. nel Libro di Daniele – era circondato da saggi, cui affidava l'arte del governo, forse più aperti al confronto con stranieri più di quanto potesserlo essere sacerdoti e scribi. È possibile che le sue aperture abbiano consentito a visitatori di accedere in qualche misura a conoscenze, soprattutto nel campo dell'amministrazione, ma anche della progettazione e dell'edificazione di intere città. L'attività di Pitagora poteva ben essere stata influenzata in misura determinante dalla frequentazione di ambienti babilonesi. Inoltre, lo 'gnomone', cioè la squadra senza il lato più lungo, così importante nelle costruzioni dei pitagorici, era in origine l'orologio solare babilonese. Ma uno strumento come una meridiana era di uso comune in molti paesi per la sua stessa semplicità, e non c'è ragione di credere che la considerazione di cui godette presso i pitagorici abbia qualcosa a che vedere con la Mesopotamia.

Più complessa è la situazione per quanto riguarda l'Egitto. È evidente che i contatti con Fenicia, Siria ed Egitto dovevano essere stati molto più costanti, ma sarebbe necessario valutare in quale misura i detentori del sapere fossero disposti a diffonderlo all'esterno. Purtroppo questa valutazione è impossibile, per il carattere di casta chiusa loro proprio. Lo si vede anche dall'essere i papiri redatti in scrittura 'ieratica', in uso presso la classe sacerdotale. Può quindi essere che, di fronte a commerci intensi, l'acquisizione di precise nozioni matematiche da altre civiltà non sia stata determinante. Non c'è motivo per non attribuire a Talete le sue dimostrazioni, o per negare che Pitagora o la sua scuola abbiano dimostrato il suo teorema, se non il dubbio generico sulla verità della tradizione antica.

Lo studioso che tenti di indagare oggi le origini della matematica in Grecia specialmente si trova di fronte ad una difficoltà apparentemente insuperabile, dovendo applicare le proprie categorie mentali ad un pensiero che non ne faceva parte. Anche qualora pretenda di accostarsi alla questione da un punto di vista alternativo, ‘privo del pregiudizio razionalista’ o ‘materialista’, in realtà non può fare a meno di adottare un approccio moderno. L’essere coscienti della necessità di uno studio che dovrebbe da quello prescindere non significa che si riesca a farne a meno, anzi può produrre presunte ricostruzioni che in realtà sono piuttosto costruzioni fantastiche nate da una mente insoddisfatta alla ricerca dell’illusione di superare i condizionamenti della forma mentale attuale. Di fatto, l’uomo moderno occidentale od occidentalizzato, qualunque sia la sua posizione ideologica e metodologica verso il mondo antico, è un aristotelico che ragiona in termini di teoria, dimostrazione, nessi logici, non contraddizione e terzo escluso sul piano logico-discorsivo (molto discorsivo, soprattutto), di materia e forma (intesa estesamente come organizzazione, procedura, sistematizzazione, classificazione, rapporti di inclusione / esclusione ecc.); quest’ultima però ordina una *materia* sottostante, che non può essere compresa senza la forma. Questa idea – che potremmo identificare in quella della *realtà*, dell’esistenza del mondo indipendentemente dal soggetto cosciente, è così radicata nella maggior parte delle persone da sembrare essa stessa ‘reale’, al punto da non rendersi conto che essa stessa è un'idea che fa parte della 'forma', una certa specifica *forma mentis.*

La discussione del capitolo precedente ha evidenziato una connessione tra parola e numero che potrebbe introdurre lo studioso ad un approccio inevitabilmente razionale, ma che consentirebbe di sbirciare, per così dire, all'interno di un ambiente molto diverso dal suo abito mentale, pur rimanendo all'interno di questo e senza cadere nell'illusione di aver 'ricostruito' un modo di pensare in gran parte estraneo se non antitetico a quello attualmente dominante. La parola creatrice in particolare ha una funzione nella creazione del mondo. La sua sostituzione con il numero non è di facile comprensione; la *gematria* cui abbiamo dedicato tanto spazio nel precedente capitolo *non* è una spiegazione sul piano storico, ma serve a prendere in considerazione un'identità altrimenti insospettabile. L'idea sottostante, non precisabile in modo univoco, è che l'universo sensibile è qualcosa di provvisorio, di illusorio, di imperfetto. Il numero ha in sé una forma di perfezione, il calcolo dà un certo risultato e non un altro, la dimostrazione prova in modo irrefutabile, tutto ciò richiama un'idea di *necessità* che supera la contingenza, l'irregolarità, l'irrazionalità dell'universo imprevedibile, senza logica, dove le cose accadono senza un perché. Sembrerebbe – e in questo punto si inserisce nell'analisi il punto di vista moderno – che il numero sia lo strumento della razionalizzazione che si sostituisce al mondo del mito, magico, dove la parola creatrice è all'origine di tutto; un mondo che, razionalmente o meglio razionalisticamente, non può essere spiegato ma solo raccontato nella forma del mito e vissuto religiosamente, attraverso la religione comune, o quella dei misteri. Ma questo è vero dalla prospettiva attuale, che necessariamente cerca di interpretare ciò che è avvenuto prima con con quello che è avvenuto dopo, e che senza il suo antico antecedente non avrebbe avuto luogo. Insomma, è come spiegare una causa a partire dalle sue lontane conseguenze.

Vi è quindi la possibilità che un approccio del genere sia parziale e trascuri qualcosa di importante. Ciò che è avvenuto può forse essere indagato alla luce di ciò che possiamo sapere sull'epoca dell'avvenimento, ma le connessioni che possiamo dedurne sono comunque all'interno dell'attualità del nostro modo di pensare; sono cioè sempre razionalizzazioni. Vale quini la pena di tentare esplorazioni in altre direzioni.

Il numero è sicuramente un principio di razionalizzazione, nel senso che è stato uno strumento indispensabile alla comprensione razionale del mondo secondo le possibilità degli antichi, e comunque non sempre nel senso attuale del termine. Ma qual era il principio del numero pitagorico? Se il numero sostituisce la parola creatrice, ciò potrebbe significare semplicemente che ne prende il posto, ne svolge la stessa funzione, anzi può arrivare dove la parola non giunge. Cambia il mezzo, e non è poco, ma resta l'idea fondamentale, che possiamo riconoscere in alcune articolazioni convergenti: c'è una creazione e quindi un creatore, o viceversa; l'universo materiale non è consistente di per sé; la sensazione e il corpo sono limiti, fonti di inganno. Nel pitagorismo non c'era solo l'indagine fine a se stessa, o lo studio del mondo esterno così come viene oggi inteso. Quest'ultimo punto è quello centrale. Non si tratta di idee specificamente greche, anzi sono il fondamento della riflessione indù e non solo. Ma l'universo 'materiale' va inteso come ciò che cade sotto la sensazione. La 'materia' è un'idea metafisica, che esprime la convinzione che il mondo sia fatto di 'qualcosa' che chiamiamo sostanza ecc. le cui modificazioni generano l'universo sensibile. Quando i pitagorici affermavano che il numero è tutto o qualcosa del genere, forse non intendevano sostenere che sia la causa materiale oltre a quella formale dell'universo sensibile, come sembra Aristotele abbia inteso applicando le proprie categorie, ma semplicemente che (in termini aristotelici) vi sia solo la causa formale e il resto sia apparenza. In effetti, Aristotele affermava di non capire se i pitagorici parlassero del mondo 'reale'. Ma appunto è il lessico aristotelico che deve essere abbandonato. Ai tempi di Aristotele la matematica si era già avviata nel senso dell'indagine razionale e possiamo immaginare che fosse classificata come forma, o indagine della forma non però nel senso platonico, ma in quello aristotelico. Inoltre, il senso originario poteva essere diverso anche da quello dei neoplatonici, che erano razionalisti anch'essi, sia pure in modo alquanto differente. Forse i neopitagorici erano più vicini di Aristotele all'idea originaria, ma nell'appellarsi all'intelligibilità dell'universo attraverso il numero potevano aver introdotto un elemento successivo alla formazione del numero pitagorico originario. La stessa intelligibilità è rivolta verso le forme, non verso il mondo sensibile. Qui non abbiamo solo e soprattutto l'esaltazione della potenza della mente umana, ma piuttosto la coscienza dell'irrealtà del mondo sensibile. Le argomentazioni di Zenone sembrano essere a supporto di tale idea. Il paradosso nasce dalla ragione dialettica, può servire ad attaccare la posizione avversaria, e anche l'opinione comune, l'apparenza, e ancora la stessa razionalità evidenziandone le contraddizioni. Il numero dei pitagorici è una modalità di gestione di questa presa di coscienza, riempie il vuoto lasciato dall'irrealtà del mondo sensibile e non cade nelle contraddizioni che nascono dall'uso della parola (o, almeno, così potevano aver creduto). Storicamente la sua funzione è stata ambivalente. Il numero riformula la funzione della parola creatrice riconducendola al pensiero creativo piuttosto che alla potenza della formula magica e quindi, dal punto di vista moderno, è una modalità del progresso, se vogliamo può apparire come una rivoluzione concettuale, ma allo stesso tempo conserva e rafforza una convinzione precedente e persistente, la immaterialità dell'universo o, se si preferisce, l'inconsistenza, l'insignificanza di ciò che non è concettualizzabile, o non è spirituale. Se però andiamo ancora più indietro, sembra una riformulazione, un adattamento alle mutate condizioni culturali di un'idea precedentemente espressa nelle modalità dei miti della creazione e della magia.

L'uso delle categorie moderne distingue tra 'spirituale' e 'concettuale' e a ragione, perché il concetto è trattato come qualcosa che attiene alla sola sfera razionale. Gli antichi però non erano razionalisti nella nostra misura, né come intensità dell'adesione a questo punto di vista, né come qualità. Nel mondo antico, e anche presso molti moderni, la comprensione non era chiaramente distinta in ‘razionale’ e religiosa, ovvero spirituale come fossero categorie contrapposte. Questa opposizione infatti è caratteristica dell’epoca moderna, anche se possiamo riscontrarne i prodromi già nell’antichità classica. Il numero perciò, per i pitagorici e non solo tra gli antichi, poteva essere veicolo di una esperienza spirituale attraverso la ragione, come in effetti i neoplatonici sostenevano, che avrebbe condotto alla comprensione della divinità, come si pretendeva avvenisse nei culti misterici. Tutto ciò però *presuppone* il numero come veicolo, ma non è il presupposto di questo valore strumentale del numero. L’origine di questo strumento sarebbe l’idea dell’ *immaterialità dell’universo*, o se si preferisce l’idea che quello materiale, corporeo sia ‘apparenza’, al limite un inganno, un miraggio, fonte di oscurità.[37] L’assimilazione dei pitagorici al pensiero di Platone, o – se accettiamo l’interpretazione dei neoplatonici - la collocazione dello stesso nella tradizione pitagorica è un indizio in questo senso. Prima ancora che un concetto inerente alla natura (come fu poi inteso) si tratta di una posizione etica non disgiunta da un certo tipo di esperienze non ordinarie. La ricerca di un principio non materiale del tutto sarebbe,

[37] Ho preferito evidenziare l’immaterialità, perché meglio esprime il contrasto latente, evidente nelle scienze moderne tra la formula e la materia. Ma – si dirà – la prima non ha senso senza la seconda. Il fatto è che la scienza attuale non trova mai la materia, scopre leggi di natura o meglio equazioni e informazione. Si è affermato che l’universo fisico è ‘informazione’ o è solo matematica. Sono posizioni estreme, che esaltano il contrasto ma riflettono un dato di fatto, l’impossibilità di riconoscere una sostanza indifferenziata nelle indagini sul mondo fisico.

in quest'ottica, una conseguenza o parte di un'esplorazione non solo concettuale, ma avente origine nel non ordinario, nel 'trascendente' la comune esperienza, forse in vicende personali straordinarie, come suggerito dai racconti sulle esperienze di ricordo delle vite passate attribuite allo stesso Pitagora. Questo genere di sperimentazioni implica di per sé lo spostamento dell'attenzione verso l'invisibile nel mondo sensibile, ma che può essere intuibile nel mondo delle forme.

Se proprio si vuol trovare nelle civiltà circostanti ciò che può essere stato trasmesso ai Greci, o piuttosto ciò che vi era in comune andando anche oltre la localizzazione geografica, questo è una sorta di filosofia universale semirazionale che svaluta il mondo sensibile, o meglio il mondo quotidiano, e non rientra nel concetto di una civiltà orientata all'attività pratica, ai viaggi, alla progettazione, alla vita in comunità. Anche la credenza nella metempsicosi rimanda a concezioni non greche, o almeno non solo greche. Sotto questo aspetto, il pitagorismo non è greco, o meglio non lo è specificamente, poiché accoglie idee ed esperienze che non hanno una precisa connotazione geografica o culturale. In effetti, Pitagora era considerato da molti una figura eccezionale, una sorta di mago, dotato di capacità e poteri non comuni. Ciò che sfugge alla nostra comprensione del fenomeno è la componente esperienziale, di cui abbiamo una traccia del racconto della discesa di Pitagora nell'antro Ideo, a Creta, narrato da Diogene Laerzio. Non ci è chiaro, né può esserlo, come la religione pitagorica e il numero potessero andare d'accordo, e l'immaterialità dell'universo va presa come una formula, una locuzione in un certo senso euristica, che sta a significare un concetto del mondo legato a una particolare forma religiosa distinta dal mito e dalla religione della comunità. Non vi è dubbio che i primi pitagorici fossero una setta misterica, un culto alternativo alla religione comune e probabilmente – a parte motivazioni politiche più circostanziate – proprio questo non doveva essere compatibile con la comunità cittadina. I 'matematici', dispersa la setta, si sarebbero sempre più allontanati dallo scopo originario fino a diventare quello che il nome significa attualmente, o filosofi poi assorbiti nel platonismo.

Prima dei pitagorici o di Platone, tra gli dei dell'India troviamo un Architetto e Artefice, *Viśvakarmā*, o piuttosto la sua prefigurazione vedica *Tvaṣṭā*, tuttora venerato da artigiani, ingegneri, architetti, tecnici e che, secondo alcune fonti [GRIFFITH 1889], nel *Ṛgveda* è il divino architetto di tutto l'universo, la personificazione del potere creativo che salda cielo e terra.[38]

"Vishwakarma è, nel pensiero indù, considerato l'ingegnere divino del mondo. Come altre divinità, gli è assegnato un giorno genetliaco ('jayanthi'), un fatto che solleva alcune questioni interessanti. È visto come il creatore originale del mondo, quindi esistente prima che fossero creati i giorni. Sembra molto illogico pensare che sia nato in un giorno particolare. Non si è incarnato nella storia umana come, ad esempio, Vishnu. Assegnargli un giorno suggerirebbe che, a sua volta, fosse creato da una divinità ancora più antica. Tuttavia, la maggior parte di coloro che lo adorano non si preoccupa di tali questioni..." [JONES 2011]. Se vediamo nel Demiurgo platonico l'idealizzazione dell'Artefice cosmico, questa divinità indù è ad esso la più vicina.

Vi è più d'un mito della creazione in Egitto, a seconda delle parti del paese, per cui vi furono diversi dei creatori; *Ra* in particolare, nel quale poi confluì un altro dio supremo, *Amun*, dando origine ad *Amun-Ra*, identificato nel dio del sole. Tutte le forme di vita sarebbero state generate da Ra. Ma questi era

38 v. anche Rig Veda: 10 index | Sacred Texts Archive ; Lord Viswakarma in Veda - Viswakarma Community Portal.

emerso da un precedente stato di caos, e la complessa teogonia egizia non sembra aver nulla in comune con il mito platonico.

Il mito babilonese fa emergere *Marduk* nell'ambito di una teogonia che inizia dall'unione di *Apsu* e *Tiamat* e che narra di lotte tra dei. Non sembra esservi nulla in comune con l'ordinamento cosmico del *Timeo*. La religione persiana era caratterizzata dal dualismo tra *Ahura Mazda* e *Angra Manyu*, principi del bene e del male; anche quando a una divinità è assegnata la funzione del creatore, non ha il carattere del Dio creatore del *Timeo*, che per di più non lascia quasi spazio alcuno agli dei della religione comune. Non vi è il caos originario, né generazioni di dei ecc., ma un ordine cosmico regolato su aritmetica e geometria. L'unica somiglianza – molto vaga – o, meglio, minore dissomiglianza, che si possa voler ravvisare, è col dio artefice dell'India, ma la sua attività non è descritta nei precisi termini che troviamo nel *Timeo.* Lo specifico elemento di questa genesi dell'Universo sembra isolare il pitagorismo dalle altre forme religiose stabilite, esattamente come i successivi sviluppi della matematica la isolano rispetto alle altre culture, il che fa supporre una stretta connessione causale tra i due fenomeni. L'ideologia pitagorica potrebbe incorporare elementi originariamente non ellenici, forse propri di classi o gruppi formatisi all'interno di certe classi chiuse, come i sacerdoti, o le corporazioni di mestiere come appunto progettisti, costruttori, calcolatori, ed essere una rielaborazione originale che fonde una base religiosa-sapienziale greca, legata ai misteri e alla religione delfica, con suggestioni cosmogoniche di origine orientale, ma appare come un pensiero compiuto definito da regole etiche e una cosmologia alquanto singolare.

La trasmigrazione delle anime, affermata in molti scritti di Platone e attribuita ai pitagorici, ci orienta verso le credenze religiose indiane. Un'altra corrispondenza può ravvisarsi in quei passaggi del *Timeo* dove la coscienza ordinaria della realtà è equiparata al sogno:

"È con questo in mente che, sognando, diciamo che tutto ciò che esiste deve trovarsi in qualche luogo e riempire qualche spazio, e che ciò che non è né sulla terra né in cielo da nessuna parte è nulla. Tutte queste e molte fantasie affini abbiamo anche riguardo a quella essenza insonne e veramente esistente, poiché, a causa di questo stato di sogno, diventiamo impotenti a risvegliarci e affermare la verità; vale a dire, che a un'immagine [il fenomeno] appartiene, considerando che non è il modello stesso di se stesso, su cui esso è stato creato, ma è sempre il fugace sembiante di un altro, in un altro per venire all'essere, aggrappandosi all'esistenza come meglio può, sotto pena di non essere affatto; ma all'essenza veramente esistente la ragione, in tutta la sua esattezza, viene come un'alleata, dichiarando che finché una cosa è una e un'altra cosa è un'altra, nessuna di esse verrà a essere nell'altra, in modo che la stessa diventi contemporaneamente uno e due."

È facilmente ravvisabile l'influenza della filosofia eleatica, ma la qualificazione del mondo fenomenico come mera apparenza o illusione, e dell'*avidya* (lett., il 'non vedere', evidentemente il contrario del significato riposto nell'idea platonica) come stato ordinario della condizione umana sono temi così caratteristici della filosofia indù, ed esprimibili in termini così affini nel pensiero platonico, da far pensare che una influenza diretta dell'India su alcuni ambienti greci vi sia stata prima delle conquiste di Alessandro Magno. Anche il buddhismo predica la necessità del 'risveglio', e 'Buddha' significa 'svegliato'. Forse si può pervenire a concezioni così affini per vie indipendenti; però gli attacchi di Zenone alla molteplicità, il rapporto che Timeo ravvisa tra il fenomeno e l'essenza, l'insistenza sulla verità della conoscenza di ciò che non appartiene al mondo sensibile, distinta dalla vera opinione, il tutto sistematizzato ed esposto secondo un ordinamento razionale che fa appello all'intelligibilità, forse la stessa diffusione della filosofia attraverso scuole iniziatiche, induce a considerare seriamente la possibilità che il pensiero dell'antica India sia giunto ai Greci in età arcaica. Anche l'equiparazione, attribuita ai pitagorici, del corpo ad una tomba,[39] "τὸ μὲν σῶμά ἐστιν ἡμῖν σῆμα"

[39] "As we have seen, Socrates suggests that this view of the soul is that of "some clever Sicilian or Italian" (493a-b), thus attributing it to the Pythagorean tradition, broadly understood to include Empedocles" ; "Thus Plato distinguishes the doctrine of "the followers of Orpheus," who describe the body as the prison in which the soul is confined in punishment for wrongdoing, from the parallel view that the body (sóma) is the tomb (séma) in which the soul is buried in this life, which is really its death (Cratylus 400C; cf. Phaedo 62B, 67D1). The latter view is ascribed to "some Sicilian or Italian," that is, to Empedocles and the Pythagoreans (Gorgias 492E-93A). Eventually, of course, these two originally distinct traditions tend to merge, at least in their literary expression, and the lyre of Orpheus becomes the symbol for Pythagorean cosmic music. Socrates abruptly cites Euripides: "Who

[*Gorgia* 493a], sembra contiguo al concetto della 'liberazione' centrale nell'induismo e nel buddhismo. La successione ciclica di stati di vita e morte corporale descritta da Socrate nel *Fedone* sembra anch'essa affine al pensiero indù, piuttosto che, ad es., agli antichi Egizi, che credevano nella vita nell'oltretomba, ma non nella reincarnazione.

Se possiamo individuare connessioni in ambito filosofico, la loro ricerca nei trattati rituali-matematici vedici quali i Ś*ulba Sūtra*, che risalirebbero a epoche precedenti quella di Pitagora forse anche di secoli non conduce ad alcun risultato. L'edificazione corretta degli altari per il sacrificio esigeva conoscenze geometriche, e lo stesso poteva valere per l'architettura sacra presso ogni civiltà arcaica; scopriamo nei predetti trattati teoremi tra cui quello di Pitagora e altri, ma nulla dimostra che vi sia un qualche collegamento con la geometria greca. Piuttosto, vi è analogia tra Indiani ed Egizi per via dell'utilizzo di funi tese da parte di agrimensori e geometri ("tenditori di corde").

Infine, gli studi sull'armonia, la stessa definizione delle scale musicali connettono assai strettamente aritmetica e acustica. Ma la connessione si estende naturalmente all'intero cosmo, se si riflette sulla ripetitività del sistema delle note e dei cicli astronomici e stagionali. L'idea di un 'ritmo cosmico' di nuovo condurrebbe all'India, in particolare alla 'danza cosmica' di Śiva (*Tāṇḍava*), ma non è necessario ipotizzare un legame con

knows if life is really death, and death is life?" (Gorgias 492e). He connects this with the notion that the body is a tomb (sóma-séma) and with tales of the uninitiated in Hades carrying water in a sieve to fill a leaking pithos." [KAHN 2001] una cultura particolare, dato che musica e arti affini sono pervasive di ogni cultura come lo è la consapevolezza della circolarità dei ritmi stagionali e cosmici.

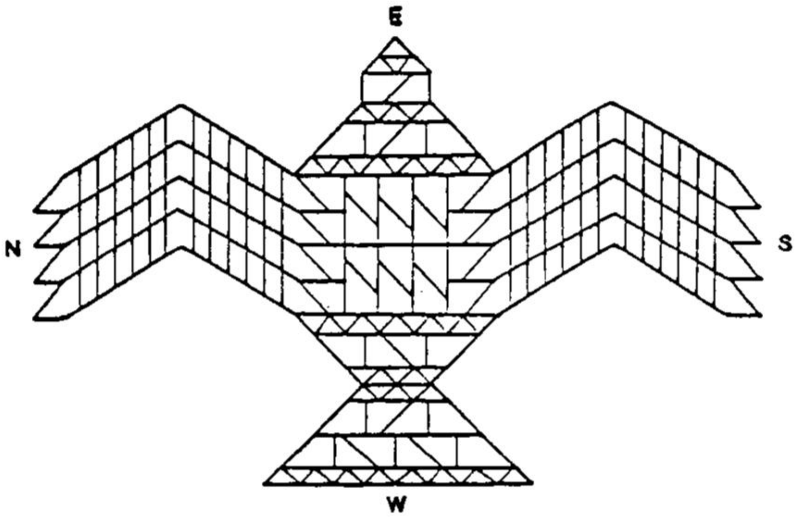
I testi della matematica indiana più antichi sono contenuti nei *Veda* (*Vēdaḥ*), nel *Vedanga Jyotiṣa*, e nei quattro *Śulbasûtra.* La datazione dei testi è indiretta e incerta; il *Ṛgveda*, o piuttosto le tradizioni in esso contenute, potrebbe risalire a prima del 1900 a.C. [KAK 2000]. I testi matematici dell’antica India ci svelano prospettive assai diverse e lontane da ciò che troviamo nelle tavolette babilonesi e nei pochi papiri egizi pervenutici, reperti che sembrano avere valenza essenzialmente pratica, forse esercitazioni per studenti, o spiegazioni di regole generali attraverso esempi particolari. La matematica indiana spiegata nei *Śulbasûtra* era in funzione della costruzione degli altari secondo norme rituali, e fa parte di una visione del mondo in cui non vi è distinzione tra scienza e religione. Tuttavia, ha una sua struttura interna di relazioni, che consente di confrontarla con i risultati delle altre antichissime civiltà. Una ulteriore differenza da questi è che i trattati indiani contengono enunciati e procedimenti in chiaro, affini ad alcune parti della matematica greca. Ma soprattutto, il carattere sacrale, esoterico della filosofia pitagorica e del platonismo evocano quello rituale, onnicomprensivo del cosmo e dell’uomo tipico del pensiero indiano al punto dall’indurre alcuni studiosi a ipotizzare un contatto diretto secoli prima dell’impresa di Alessandro, p. es. con i viaggi di Pitagora.

L’astronomia interessa per il calendario, per i cicli stagionali, ma non solo. “Il fatto che l'astronomia riveli che i periodi dei corpi celesti siano incongruenti potrebbe aver portato all'idea che la vera conoscenza risieda oltre la conoscenza empirica [si rammenti la distinzione che Socrate pone tra ‘conoscenza’ e ‘vera opinione’]. D'altra parte, è altrettanto probabile che sia stata un'analisi profonda della natura della percezione e del paradosso della relazione del percettore con il tutto a costituire la base del pensiero vedico, e l'incommensurabilità dei moti nel cielo fosse una conferma dell'intuizione che la conoscenza è ricorsiva. Questa visione vedica della conoscenza sembra aver ispirato gli inni più antichi, quindi non sembra fattibile rispondere alla domanda su cosa sia venuto prima. [KAK]

La riflessione sui moti celesti e sui cicli stagionali coinvolge ciò che non cambia, almeno apparentemente, come le costellazioni, le posizioni relative delle stelle fisse, la durata dell’anno, il ciclo lunare, i cicli stagionali, con ciò che muta con continuità, come la durata del dì, la posizione del sole rispetto alle costellazioni, ma soprattutto certe incongruenze. La durata dell’anno non è un numero esatto di giorni, il mese lunare con coincide con quello solare, ecc. Il calcolo di queste misure di tempo e delle loro differenze implicano l’aritmetica, l’attenzione per il numero e i rapporti; lo stesso se si studiano i periodi di rivoluzione dei pianeti. L’astronomia, ancor prima dell’architettura e della ripartizione del terreno e dei tributi, esige qualche pratica del numero.

Lo studio dei testi rivela che gran parte della mitologia vedica è un’esposizione di nozioni astronomiche. Questa interpretazione rientra in una tesi applicabile per le culture arcaiche in generale, sostenuta in particolare dal *De Santillana* e della quale vi è una breve esposizione nel suo *Le origini del pensiero scientifico*: "È l'osservazione dei moti celesti che ha stimolato l'uomo a ricercare gli *invarianti* impersonali che si celano dietro gli avvenimenti" e, poco oltre, "In effetti, solo ora [ca. metà del XX sec.] si comincia a capire che il vasto materiale protostorico di miti e di leggende di dèi e di eroi... può esser decifrato in quanto linguaggio tecnico di tuttora ignoti astronomi arcaici, ai quali dobbiamo anche la denominazione delle costellazioni... Qualcuno in epoche precedenti alla storia deve aver tracciato quelle figure per ragioni a lui chiare e con tale autorità che esse si sono ripetute irrevocabilmente, sostanzialmente le stesse dal Messico all'Africa e alla Polinesia – e sono rimaste nostro patrimonio a tutt'oggi. E questo processo è databile in qualche anno tra il 4000 e il 6000 a.C.". Questa valutazione concorda col giudizio espresso dal *Kak,* secondo cui " la preistoria del popolo vedico in India risale al quarto millennio e ancor prima. D'altro canto, nuove scoperte cronologiche mostrano nella tradizione indiana una continuità che va indietro nel tempo fino al 8000 a.C. (Shaffer and Lichtenstein, 1995)."

Il rapporto con il sacro era stabilito specialmente dal rituale dell'altare. Lo studio del rituale vedico ha mostrato che l'altare veniva utilizzato per mostrare simbolicamente le connessioni tra l'astronomia, la fisiologia e l'aspetto spirituale; nella forma degli altari e non in trattazioni sistematiche erano impresse le conoscenze astronomiche. Nei *Śulbasûtra*, trattati rituali-matematici sugli altari, lo stesso *Ṛgveda* è considerato un altare di mantra. Le misure e l’orientamento degli altari rappresentavano numeri ‘cosmici’ come nel caso del *mahāvedi*, un altare a forma di trapezio le cui specifiche dimensioni vanno realizzate con precisione: 36 passi da est a ovest, 30 (o 33) passi da nord a sud sul lato ovest e 24 passi da nord a sud sul lato est. La scelta di questi numeri è legata al fatto che la somma di questi tre equivale a un quarto dell'anno, ossia 90 giorni. Norme rituali conducono a problemi di geometria; p. es., nel rituale *gārhapatya* del fuoco lo spazio che accoglie il fuoco deve aver forma circolare, ma l’area deve misurare un *aratni* (grosso modo, un cubito) quadro. Gli altari del fuoco simboleggiavano l’universo, distinto in Terra, Spazio e Cielo, per cui vi erano in corrispondenza tre tipi di altare. Una tripartizione dell’universo intero si trova anche nel Timeo, in idee, mondo sensibile e spazio. L’altare per la Terra era circolare, quello per il Cielo quadrato. Il problema della quadratura del cerchio ha avuto origine da quello di costruire altari di forma diversa con la stessa area e potrebbe essere uno dei più antichi posti in geometria. 21 pietre erano disposte intorno all’altare per la Terra, 78 intorno a quello per lo spazio, le restanti 261 all’altare del Cielo per un totale di 360. Le regole da applicarsi erano molte: il numero totale dei mattoni di un certo tipo doveva essere 10800, che è il numero di divisioni di un giorno in trenta parti uguali a 48 min. (*muhūrta*) contenuto in un anno. Molti numeri sono in relazione con 360, i suoi sottomultipli e multipli di sottomultipli. Il loro ricorrere può essere dovuto sia alla durata (approssimativa) dell’anno, sia a certe loro proprietà numeriche, come l’essere scomponibili in potenze di 3, di 2, 4 ecc.; $36 = 4 \cdot 9$, $108 = 4 \cdot 27$ o $36 \cdot 3$ o $12 \cdot 9$; 432 (un numero anch'esso spesso presente nei testi antichissimi) = $16 \cdot 27$. Il numero 108 è pervasivo nella cultura indù; p. es., è il numero totale delle divisioni del cielo dell'astrologia vedica, che divide ogni segno dello zodiaco in nove parti.[40] Nell'assegnare all'anno la durata di soli 360 giorni si può intravedere il desiderio di trattare numeri con molti divisori, il che doveva facilitare il calcolo.



Altare del fuoco a forma di falco. Tutti gli altari di questo tipo dovevano avere la stessa forma; la superficie di quello 'di base' misurava 7,5 *puruṣa* quadrati (1 *puruṣa* corrisponde all'altezza totale di un uomo cone le braccia distese ed equivale a 5 cubiti). Gli altari, realizzati in cinque strati di

40 v. p. es. Navamsa - The Most Important Chart In Vedic Astrology | Jyotish Vidya, India.

mattoni, raggiungevano l'altezza del ginocchio. Ogni strato dell'altare a forma di falco conteneva 200 mattoni, arrivandocosì a un totale di 1.000 mattoni nei cinque strati. (immagine caricata da S. Kak su *The Astronomy of the Vedic Altars and the Rgveda*).

La complessità delle norme rituali per la costruzione degli altari, come il numero dei mattoni ecc., comportava la necessità di risolvere diversi problemi di geometria.

La divisione del tempo era basata sulla coesistenza di cicli lunari e solari, per cui il calendario era regolato in modo da conciliare i due ritmi. L'anno nominale era di 360 giorni, ma si riconosceva che la durata effettiva dell'anno solare fosse comprsa tra 365 e 366 giorni. Si riconoscevano 27 costellazioni (*nakṣatra*) lungo il percorso della luna, con una discrepanza di circa la terza parte del giorno rispetto al mese siderale, la cui durata esatta è ca. 27 giorni, 7 ore, 43 minuti, che misura l'intervallo di tempo che la luna impiega a tornare nella stessa posizione rispetto alle stelle fisse. L'anno lunare era di 354 giorni (ca. 13 volte il mese siderale). Gli antichi indiani definivano la durata del giorno in due modi: il giorno solare e il *tithi*, il cui valore medio è l'anno lunare diviso in 360 parti. Consideravano anche tre diversi tipi di anno: (1) *nakṣatra*, o un anno di 324 giorni (a volte 324 tithi) ottenuto considerando 12 mesi di 27 giorni ciascuno, dove 27 è l'approssimazione intera del numero di giorni in un mese lunare siderale; (2) lunare, che è poco più di 354 giorni (360 tithi); e (3) solare, che supera i 365 giorni (tra 371 e 372 tithi).

Alcune ricerche condotte verso la fine del XX secolo [KAK 1991, 1992, 2000] avrebbero condotto alla scoperta di precise relazioni tra fenomeni astronomici, costruzione degli altari e alcuni testi vedici: il numero delle stelle nel cielo è 10.800.000 (= al numero di *muhūrta* compresi in mille anni); il numero delle sillabe del *Ṛgveda* è 432000 (4 x 108 x 1000, o mille volte $2^4 \cdot 3^3$), il numero dei *muhūrta* compresi in quarant'anni; un ciclo di 95 anni è rappresentato da sequenze di 95 altari di dimensioni crescenti, ecc. Alcuni numeri in particolare avrebbero avuto particolare rilevanza: p. es. il già citato 108, che è 200 volte il diametro apparente del Sole (0,54° ; ammettendo comunque che gli astronomi ragionassero in decimali per le frazioni di grado e in sessagesimali per le misure angolari in generale), è multiplo di 27 e raggruppa quattro *nakṣatra.* Un altro numero interessante è 339, il numero di dischi solari che coprirebbero metà del cielo (in realtà, 339·0,54° = ca. 183°). *Ipparco* (190 – 120 a.C.) conosceva il valore di 0,55°, *Tolomeo* avrebbe tratto da osservazioni babilonesi 0,52° per il diametro lunare (le dimensioni apparenti del Sole e della Luna viste dalla Terra sono pressochè uguali) [CARMAN e BUZÓN], secondo Aristarco il diametro angolare apparente del sole è $\frac{1}{720}$ di quattro angoli retti [HEATH 1913]. Da questi confronti possiamo dedurre che la qualità delle osservazioni eseguite fino all'epoca vedica è paragonabile a quella della Grecia classica.

Gli astronomi indiani avrebbero stabilito già in tempi molto remoti che 108 sia il rapporto tra le distanze del Sole e della Luna dalla Terra (o piuttosto dall'osservatore) e i rispettivi diametri. Nel caso delle dimensioni apparenti di questi due astri, che sono inferiori a $1°$, si possono approssimare molto bene le misure angolari in radianti degli archi con le corde che uniscono i loro estremi; in trigonometria, detta α la misura in radianti di un arco di circonferenza di raggio r e detta a la corda sottesa, quando α è minore di $1°$ la differenza $\alpha - a$ è molto minore di entrambi; precisamente, per l'arco di $1°$, il rapporto tra tale differenza e l'ampiezza in radianti dell'arco è di ca. 2,5 parti su centomila, e l'approssimazione è ancora migliore per archi più piccoli. Se una sbarra è posta ad una distanza dal punto di osservazione uguale a 108 volte la sua lunghezza, in modo da formare un angolo retto con la retta che unisce il centro della sbarra al punto di osservazione, i suoi estremi definiscono un arco di ca. 53° ; in generale, l' ampiezza dell'arco è il doppio dell'arcotangente dell'angolo formato dal segmento condotto dal centro della sbarra al punto di osservazione con ciascuno dei segmenti che uniscono quest'ultimo a uno degli estremi della sbarra. Non è affatto necessario dedurne che gli astronomi vedici o posteriori fossero a conoscenza delle relazioni trigonometriche; è possibile giungere a questi risultati mediante disegni. Nel caso nostro, il calcolo fornisce

$$2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{216}\right) = 0.009259...(\text{rad.}) = 0.53°.$$

Rimando a *S. Kak* (2000) per ulteriori approfondimenti sulle conoscenze astronomiche dell'era vedica.

Lo studio sistematico della matematica ebbe dunque inizio nell'India vedica strumentalmente per l'edificazione di altari che raffigurassero nelle loro forme e nel numero dei mattoni che li costituivano le conoscenze astronomiche. Probabilmente anche nelle altre culture antiche avvenne un processo analogo, ma non è in queste supportato da documenti come è avvenuto in India. Infine, non dobbiamo trascurare una traccia solo apparentemente distante da quelle confluenti dell'astronomia e dell'edificazione di templi e altari, quella della musica. Che i testi lo riportino o meno, l'affinità della struttura aritmetica delle scale musicali divisibili in toni e semitoni, cioè composte di dodici semitoni, e la partizione dell'eclititca nei dodici segni zodiacali è così evidente da non poter trascurare l'idea che, in epoche assai antiche, questa corrispondenza abbia avuto una funzione importante nello sviluppo dell'aritmetica e più in generale nel definire una visione del mondo fondata su armonia, ritmo, ordinamenti ciclici. La corrispondenza non ha origine nel numero 12 per sé solo, nè questo numero deve necessariamente esprimere qualche relazione ancora più fondamentale, anche se è collegato alla vicinanza tra la durata del mese lunare (un poco più di ventinove giorni) e la dodicesima parte dell'anno. Numeri come 12 sono collegati a molti altri (24, 36, 48, 60...) che a loro volta hanno rapporti semplici tra di loro e con altri numeri. Proprietà matematiche e relazioni astronomiche, oltre alla pratica musicale soprattutto degli strumenti a corda, dovrebbero essere alla base di un certo modo di eseguire calcoli basato su somme di frazioni, e di una geometria basata su unione di figure semplici (si consideri la forma dell'altare del fuoco riportata prima).

I testi vedici non sono le più antiche testimonianze delle conoscenze matematiche indiane; le evidenze più antiche derivano dagli scavi a Mohenjodaro e Harappa nella valle dell'Indo (attuale Pakistan orientale) e risalirebbero a ca. il 3000 a.C. Il loro ambito era quello pratico: questa cultura avrebbe sviluppato un sistema di misure su base decimale, e si sono trovati campioni di peso e raffigurazioni artistiche in forme geometriche definite (cubi, coni, cilindri, cerchi, triangoli ecc...) [PEARCE]. "La civiltà della valle dell'Indo è stata la più antica civiltà progredita con misurazioni scientifiche basate su valori numerici nella maggior parte delle fasi di sviluppo. Il popolo della civiltà dell'Indo raggiunse una grande precisione nella misurazione di lunghezza, massa e tempo. Essi furono tra i primi a sviluppare un sistema di pesi e misure uniformi. La matematica veniva utilizzata anticamente per scopi pratici nella misurazione di pesi e distanze, nella rappresentazione in scala, nelle proporzioni fisse adottate nelle strutture urbane, nell'architettura, nella metallurgia, ecc., in molti piani di sviluppo della civiltà dell'Indo... La civiltà di Harappa è stata il grembo della matematica, da cui sono originati sia il concetto di numero sia il sistema numerico. Il sistema numerico usato inizialmente dagli abitanti di Harappa si diffuse successivamente in altre antiche civiltà... sono stati utilizzati pesi corrispondenti a rapporti di 0,05, 0,1, 0,2, 0,5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 e 500” [SINGH 2019]. Il quadro d’insieme è di una cultura organizzata secondo principi ingegneristici, pragmatica, nella quale la matematica è anzitutto misurazione.

Questo aspetto è ben presente nella necessità di rispettare rapporti geometrici nella costruzione degli altari vedici. La precisione della misura sembra essere stato il motivo ispiratore della più antica matematica indiana. Da questo punto di vista non c’è differenza rispetto a ciò che possiamo riconoscere nei reperti mesopotamici; le finalità sono diverse, dalla realizzazione di edifici sacri alla pianificazione della vita sociale, ma rapporti, proporzioni, valutazioni di quantità, sistemi di calcolo, le forme geometriche fondamentali, sembrano esser stati sviluppati a fini di razionalizzazione delle attività produttive e della vita sociale. Ciò non implica che tutto nasca di lì, ma è chiaro che le motivazioni economiche in un quadro politico centralmente organizzato hanno fortemente contribuito alla costruzione delle scienze matematiche.

Il percorso indicato nella letteratura vedica sembra diversamente orientato, cioè dall’architettura sacra all’uso profano: “Sebbene sia chiaro che la necessità della matematica a quel tempo non fosse in funzione del suo sviluppo, ma per scopi religiosi e astronomici, è importante non ignorare l'uso laico dei testi, cioè da parte degli artigiani che costruivano gli altari. Allo stesso modo, sembra probabile che con l’antico popolo di Harappa (almeno) la matematica di base si sia sviluppata fino a essere utilizzata da un gran parte della popolazione.” [PEARCE]

Altare del fuoco, dall’articolo di Bipin R. Shah

Diversi antichissimi testi indiani trattano di matematica, ma il *Vedāṅga Jyotiṣa* e soprattutto i *Śulbasūtra* meritano particolare attenzione. Il primo,[41] il cui titolo significa '[libro] astronomico ausiliario dei *Veda'*, attribuito al 'saggio' *Lagadha* (ca. 1180 a.C.), deve la sua importanza all'essere il primo esauriente trattato di astronomia indiana in funzione sia dei sacrifici rituali da parte dei sacerdoti, sia allo scopo di predisporre calendari per eventi religiosi e civili. Alla sua divisione del tempo è stato accennato senza citarlo nel capitolo precedente. Ve ne sono due versioni, con molti versi in comune alle due, una di 43, l'altra di 36. Si tratta quindi di un testo sintetico, un "manuale" come lo definisce il curatore dell'edizione di cui faccio uso nel presente saggio.

Il testo è costituito quasi completamente dalle divisioni del tempo e dalle correlazioni tra i vari periodi notevoli, corrispondenti ai fenomeni astronomici più evidenti, cercando di esprimerle mediante numeri interi; così uno *yuga* consta di cinque anni solari (tropici), 67 cicli lunari siderali (un ciclo siderale è il tempo impiegato dalla Luna per tornare nella stessa posizione rispetto alle stelle fisse), 1830 giorni, 1835 giorni siderali, ecc.; il giorno è diviso in più modi, per es. in 603 parti in modo che un *nakṣatra* ne contenga esattamente 610, e così via. Non era un sistema molto preciso, ma dovendo provvedere a fornire la base del calendario civile si era privilegiata la facilità

41 Per le date e tutto il resto, faccio riferimento all'edizione curata da K. V. Sarma con traduzione in inglese del prof. Kuppanna Shastry, 1985.

di computo a scapito della correttezza; p. es., se cinque anni corrispondono a 1830 giorni, ogni anno ne contiene 366, uno scarto abbastanza sensibile rispetto alla realtà. La necessità di rispettare i tempi effettivi doveva indurre i celebranti a introdurre delle correzioni; un semplice aggiustamento avrebbe potuto essere l'aggiunta di un giorno al termine del periodo di cinque anni (*yuga*), o rimedi equivalenti. Tuttavia, lo scopo dichiarato del testo – a prescindere dalle necessarie correzioni – era quello di stabilire i tempi dei riti: "Infatti i *veda* sono stati rivelati per amore del compimento dei sacrifici. Ma questi sacrifici dipendono dai tempi. Perciò, solo chi conosce la tradizione del tempo (*Jyotiṣa*) comprende il compimento dei sacrifici."

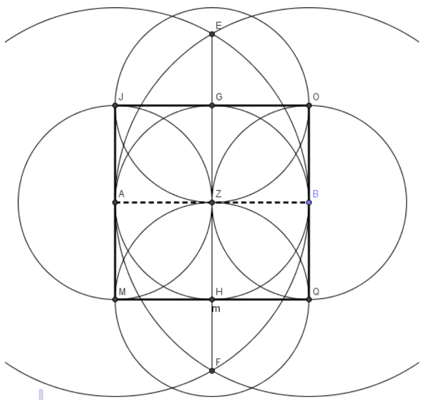
Se l'importanza del *Vedāṅga Jyotiṣa* è legata al suo posto nella tradizione indù, e (per noi) al modo di sincronizzare le divisioni convenzionali del tempo con calcoli facilmente eseguibili, quella dei *Śulbasūtra* investe direttamente la geometria. Questo nome designa quattro trattati (*Baudhāyana*, *Āpastamba*, *Kātyayāna*, *Mānava*) cui se ne aggiungono altri quattro considerati di minore importanza; il più interessante per noi è il *Baudhayana*, il più antico, redatto presumibilmente prima del 500 a.C, forse secoli prima.

"L'importanza per la matematica del *Baudhāyana* e del *Āpastamba* sta nella precisa formulazione della relazione tra i quadrati dei lati di un rettangolo e della sua diagonale (Teorema di Pitagora), nella realizzazione della irrazionalità di numeri come $\sqrt{2}$, nei tentativi di calcolane i valori per approssimazioni, nel trasformare [cioè, stabilire regole di equivalenza] quadrati in rettangoli, cerchi ecc., nel calcolo delle approssimazioni di π ." [SEN e BAG 1985]. Si tratta degli stessi problemi che furono affrontati dai Greci, e dai Babilonesi molto prima, come si può dedurre dalle tavolette di argilla. È quindi molto importante stabilire una datazione precisa quanto basta per confrontare cronologicamente il più antico dei *Śulbasūtra* con i reperti babilonesi dell'Antico Regno. Vi è un certo consenso nel collocare il *Baudhāyana* tra l' 800 e il 500 a.C., circa un millennio dopo le tavolette. Sotto l'ipotesi che la matematica abbia avuto un centro di diffusione, questa differenza temporale può far supporre che gli Indiani abbiano tratto la loro geometria dai Babilonesi, più vicini geograficamente rispetto all'Egitto. Inoltre, il trattato che prende il nome da *Baudhāyana,* anche qualora sia stato redatto da un solo autore, può contenere molto materiale, se non tutto, ancora più antico. Negli *Elementi* vi sono proposizioni enunciate, se non dimostrate o non sufficientemente provate, cent'anni prima, o anche di più, e di più ancora se fossero state tratte dalle conoscenze dei più avanzati popoli vicini. Inoltre, nulla prova che la geometria di questi testi sia stata *tutta* elaborata sotto l'esigenza di costruire altari che rispettassero certe condizioni, anche se *tutto* quello che in essi è contenuto fosse necessario allo scopo. Non è neppur detto che una geometria debba essere pensata per qualche finalità che non sia per l'interesse verso la geometria stessa in quanto tale. Gli esempi di teorie e teoremi che hanno trovato una qualche applicazione tempo dopo non mancano. Considerazioni di questo genere, per quanto prescindenti da qualsiasi conferma documentaria, spostano la datazione delle antiche conoscenze matematiche indiane indietro nel tempo, non si può sapere di quanto; potrebbe anche essere che un testo sia conservato per le sue finalità, in questo caso religiose, e altri eventualmente precedenti e di contenuto simile siano andati persi. Sulla terra d'origine degli autori del *Baudhāyana* e degli altri testi sono state avanzate differenti proposte: la regione di *Andhra*, sulla costa sud-orientale della penisola indiana; la piana vicina alla confluenza tra lo *Jumna* e il Gange, nel nord, ecc. Evidentemente, dalla geografia non si ottiene nulla.

Syena-citi (altare di mattone a forma di falco) presso Purola, Uttarakhand, databile tra il II sec. a.C. e il I d.C. Da Archaeological Survey of India Dehradun Circle -Uttarkashi.

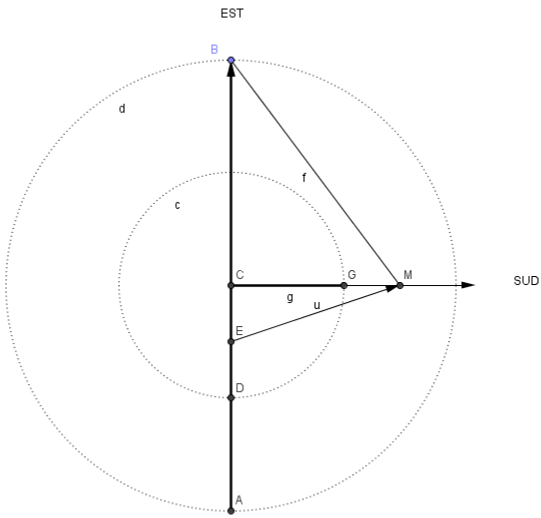
Diviso in 21 capitoli, contiene 285 versetti, che – eccetto i tre iniziali – sono regole (teoremi) di geometria piana (capp. 1 – 2) seguite da indicazioni su come eseguire le costruzioni.

1.4 e **1.5** spiegano come costruire un quadrato. La prima costruzione utilizza una corda uguale al lato del quadrato e la sua metà come raggi di circonferenze. Si traccia l'asse di un segmento AB lungo quanto la corda unendo le intersezioni delle circonferenze con centri negli estremi e raggio la corda stessa. Intersecandolo con la circonferenza avente centro nel punto medio di AB e raggio uguale alla sua metà si ottengono gli estremi del diametro perpendicolare ad AB. Si tracciano quattro circonferenze con centri negli estremi dei due diametri perpendicolari e raggi uguali a metà della corda; queste si intersecano a due a due in quattro punti che sono i vertici del quadrato cercato.



La seconda mi sembra piuttosto una costruzione non ‘canonica’ cioè non esattamente replicabile con l’uso euclideo di riga e compasso, e il testo non appare chiarissimo. Si prenderebbe una corda AB, di lunghezza doppia del lato del quadrato che si vuol tracciare, si segnano il suo punto medio C, che separa la parte CB orientata da ovest ad est dalla parte CA, a sua volta divisa dal suo punto medio D in due parti uguali, e ancora si divide CD a metà nel punto E. Si segnano questi due punti sulla corda. Tutta la corda misura $2a$ dove a è il lato cercato, $CA = CB = a$, $CD = \frac{a}{2}$, $BE = \frac{3}{4}a$. Si fissano i due capi della corda rispettivamente ai punti C e B, in modo che l’estremo A finisca in C e la si dispone in tensione in modo che la traccia E finisca sulla perpendicolare alla direzione AB (da ovest verso est) sul lato sud. Scopo del procedimento è tracciare un angolo retto di vertice C in comune a due lati del quadrato.[42]

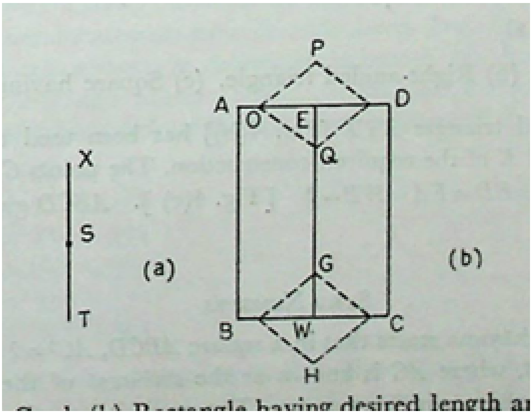
[42] Mi sono attenuto all’interpretazione offerta da Sen e Bag (1983), già cit. Le immagini sono tratte dal testo da loro curato.



Il punto A viene fissato in C e quindi la somma dell'ipotenusa BM e del cateto CM del triangolo rettangolo BCM è $2a$. E viene a trovarsi in M .

Si può vedere nella costruzione il triangolo rettangolo BCM di cateti $\frac{3}{4}a$ ed a , caso particolare della terna (3, 4, 5), ma non sembra che questa sua proprietà sia il cardine della costruzione. Inoltre, il segmento CG è solo metà del lato del quadrato; fino a questo punto, la figura sembra piuttosto una costruzione del rettangolo di lati uno il doppio dell'altro e si discosta dai metodi della geometria greca classica per l'uso della fune tesa.

1.6-8 spiegano come tracciare un rettangolo, date due corde uguali ai lati; l'interesse del metodo impiegato sta nell'uso di funi tese che ne fa una mescolanza di nozioni geometriche elementari e di procedimenti meccanici. Si tratta evidentemente di procedure miranti all'applicazione diretta, non alla sistemazione della geometria secondo uno schema razionale deduttivo. 1.6 chiede di tracciare un rettangolo date la lunghezza e la larghezza. Si fissano i due estremi E e W della lunghezza, e sulla retta per loro condotta si segnano due punti da una parte e dall'altra di ciascuno dei due estremi, e da questi equidistanti, ma tali che la loro distanza sia minore della metà della larghezza voluta. Sulla corda che misura la larghezza si fa un segno nel punto medio O ; se ne fissano gli estremi ai due punti aggiunti p. es. al punto E e tirandola per O la si tende da una parte rispetto alla retta EW , e si segna il posto in cui cade il vertice del triangolo isoscele così formato. In tal modo si conduce la perpendicolare *p* alla distanza che corrisponde alla lunghezza nel suo estremo E senza disegnare circonferenze, come si dovrebbe fare usando riga e compasso. A questo punto, si uniscono gli estremi della larghezza nel punto E e si segna il punto di *p* nel quale si viene a trovare O quando la corda della larghezza è allineata a *p*. La distanza EO è allora metà della larghezza voluta; si procede allo stesso modo per la parte opposta rispetto ad EW , e poi si fa lo stesso con l'altro estremo della lunghezza cioè W ecc.



La costruzione del rettangolo. EW è la lunghezza, XY = AD la larghezza, P Q e G H i punti equidistanti da E e da W, O il punto vertice del triangolo isoscele formato dalla corda XY posta in tensione con gli estremi in P e in Q (Sen e Bag 1983)

1.9 *la diagonale di un quadrato ne raddoppia l'area.*

1.10 *se l'altezza di un rettangolo è uguale al lato di un quadrato e la lunghezza è uguale al lato di un quadrato di area doppia [del primo], allora la diagonale è il lato del quadrato tre volte più grande.*

Corrisponde alla terna pitagorica irrazionale (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$).

1.11 corollario del precedente.

1.12 *le aree dei rispettivi quadrati dell'altezza e della lunghezza di un rettangolo unite sono uguali all'area del quadrato della diagonale.*

Enunciato del teorema di Pitagora.

1.13 *Questo è stato osservato in rettangoli aventi lati* 3 e 4, 12 e 5, 15 e 8, 7 e 24, 12 e 35, 15 e 36.

L'espressione "è stato osservato" fa pensare ad un risultato ottenuto 'empiricamente' cioè senza dimostrazione nel senso proprio del termine; non si fa riferimento a metodi per generare terne pitagoriche. Molto probabilmente, data l'universalità del teorema di Pitagora, il suo enunciato doveva essere noto da un tempo imprecisabile anteriore alla redazione del *Baudhāyana Śulbasūtra.* Vi sono altre citazioni delle terne pitagoriche in altri testi; v. *Sen* e *Bag* 1983, pp. 22-23. Vi comparirebbe anche la formula generatrice (*Kātyāyana Śulb.*, 6.7)

$$na^2 = \left[\frac{(n+1)\cdot a}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n-1)\cdot a}{2}\right]^2$$

Il capitolo 2 è dedicato alla costruzione di figure (rettangoli, quadrati, triangoli, trapezi) equivalenti.

2.1 *per unire due quadrati non aventi la stessa area, si separi nel quadrato maggiore un rettangolo con un lato uguale a quello del lato minore; la sua diagonale è il lato del quadrato che li unisce* [cioè la cui area è la somma delle aree dei due quadrati]. È una variante del teorema di Pitagora.

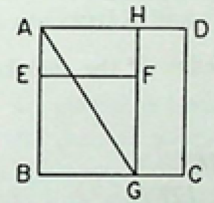


Fig. 12.

da Sen e Bag 1983

2.2 si occupa del problema inverso del precedente: *per sottrarre un quadrato da un altro, si separa dal maggiore un rettangolo con un lato uguale a quello del minore; si fa ruotare il lato più lungo del rettangolo* [quello interno al quadrato maggiore, intorno ad un estremo] *finché l'estremo mobile non tocchi il lato opposto. Da questo il punto di contatto separa* [il lato del]*la differenza* [dei due quadrati].

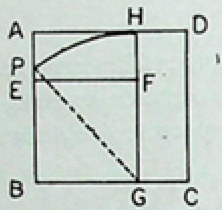


Fig. 14.

Disegnato il quadrato di minor area BGFE internamente a BCDA, si traccia l'arco $\hat{HP}$ che tocca AB in P. Il segmento BP è il lato del quadrato cercato.

Una dimostrazione può ottenersi facilmente con l'ausilio del teorema di Pitagora; infatti,

$$PB^2 = PG^2 - BG^2 = HG^2 - BG^2 = AB^2 - BG^2$$

Tuttavia, *B. Datta* (1932) ha proposto una dimostrazione più consona alle procedure degli antichi matematici indiane, basate talvolta sulla scomposizione delle figure:

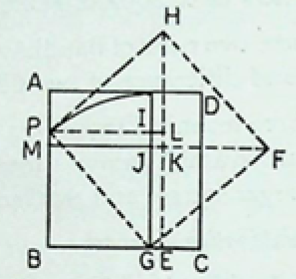


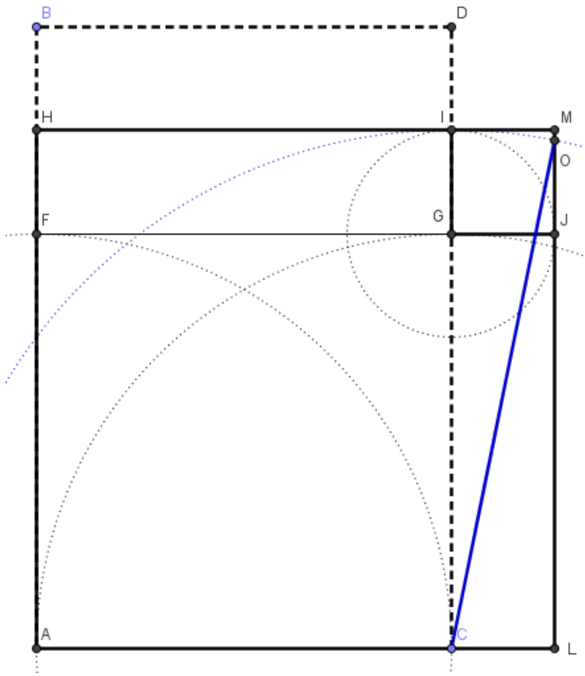
Fig. 15.

PROOF : The following proof based on the knowledge of the *śulbakāras* is due to Datta[a] (Fig. 15).

Now, sq. $PGFH$ = 4 tr. PGI + sq. $IJKL$
= 2 tr. PGI + 2 tr. PGI + sq. $IJKL$
= rect. $PBGI$ + rect. $PBGI$ + sq. $IJKL$
= (rect. $PBGI$ + sq. $IJKL$) + rect. $PBGI$
= (rect. $PBGI$ + sq. $IJKL$) + sq. $MBGJ$ + rect. $PMJI$
= (rect. $PBGI$ + sq. $IJKL$ + rect. $PMJI$) + sq. $MBGJ$
= (rect. $PBGI$ + sq. $IJKL$ + rect. $JGEK$) + sq. $MBGJ$
= sq. $PBEL$ + sq. $MBGJ$

or, sq $PBEL$ = sq. $PGFH$ — sq. $MBGJ$
$\therefore\ BP^2 = PG^2 - BG^2$
or $BP^2 = AB^2 - BG^2$

2.5 risolve un problema fondamentale, quello di costruire il quadrato equivalente ad un rettangolo dato, risolvendo geometricamente ed esattamente l'equazione $x^2 = ab$. *Per trasformare un rettangolo in un quadrato, si taglia da questo un quadrato di lato uguale alla larghezza* [la lunghezza è sempre maggiore della larghezza e il quadrato e il rettangolo hanno la stessa base]. *La parte rimanente è divisa in due parti uguali e* [queste sono collocate] *lungo i lati del quadrato*, cioè una delle due – quella non contigua al quadrato – è spostata lungo l'altro lato di questo. *Lo spazio vuoto* lasciato nell'angolo concavo della figura così ottenuta *è riempito da un quadrato* che, unito al poligono concavo finora costruito, forma un quadrato di area maggiore; sottraendolo da questo applicando il metodo già stabilito al punto 2.2 si ottiene il quadrato cercato. Il testo, escluse le integrazioni, è riportato in caratteri corsivi.



Il lato del quadrato cercato è il segmento CO.

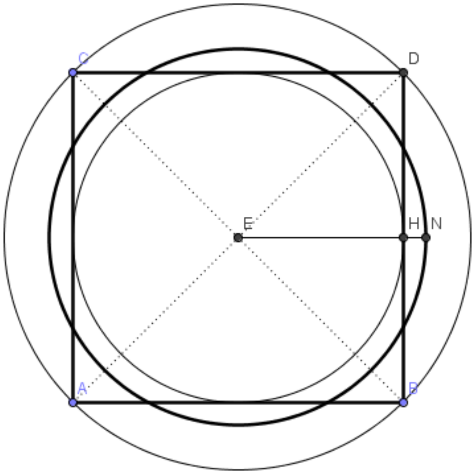
2.6, 2.7 e **2.8** spiegano come trasformare un quadrato rispettivamente in un trapezio isoscele, un triangolo isoscele e un rombo mediante tagli, spostamenti di una parte della figura che la trasformano in un'altra; questi procedimenti non sembrano implicare proporzioni e attenzione ai rapporti ed esprimono piuttosto l'idea della quantità come somma delle sue parti. Sotto questo aspetto, l'impostazione pitagorica (che verosimilmente accoglieva suggestioni dallo studio dell'armonia) si direbbe appartenere ad uno stadio più evoluto della visione della matematica, mentre quella indiana si accosterebbe piuttosto alla mentalità babilonese e forse egizia legata alla misurazione di aree e volumi. Ciò non indica di per sé alcuna trasmissione diretta, ma solo una somiglianza di percorsi paralleli. Potrebbe quindi essere che i metodi indiani avessero avuto origine da esigenze non solo architettoniche o legate a prescrizioni rituali, e d'altronde questo tipo di esigenza può essere soddisfatto solo se si ha una sufficiente conoscenza della geometria. È impossibile stabilire su una chiara base documentaria se questa fosse anteriore, e di quanto, alla codifica delle procedure per la costruzione degli altari, ma alcune procedure e regole del *Baudhāyana* – come quelle di questo capitolo – non hanno una relazione esclusiva con alcuna costruzione religiosa e non, potendo essere sviluppi interni alla geometria come avvenne nella Grecia classica, e tanto meno con l'astronomia. In effetti, il significato etimologico della parola 'geometria' dovrebbe essere inteso come quello originario; il resto deriverebbe dalla applicazione dei metodi relativi allo scopo originario ad altri fini.

2.9 *per trasformare un quadrato in un cerchio, metà della diagonale deve essere tesa dal centro verso est;* [si intende che la semidiagonale sia disposta in direzione perpendicolare a due lati opposti] *aggiungendo un terzo al rimanente* [cioè sommando un terzo della parte della semidiagonale esterna al quadrato alla parte interna] *si traccia il cerchio* [cioè, si è ottenuto il raggio del cerchio].

In termini numerici, posto che l'area del quadrato sia unitaria, quella del cerchio così tracciato vale

$$\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi$$

cioè ca. 1,017252435. Il valore implicito di π è 3,088311754, cioè il reciproco del quadrato del raggio calcolato, e differisce dal valore corretto (3,141592653) per 17 parti su mille, meno preciso del valore di $\frac{22}{7}$ spesso utilizzato dai Greci e – forse - dai costruttori della Piramide di Cheope, e anche di quello da molte fonti attribuito ai Babilonesi, uguale a $\frac{25}{8}$ = 3,125. Il confronto con quest'ultimo sembra escludere che gli Indiani avessero tratto parti significative delle loro conoscenze matematiche dai Babilonesi. La costruzione geometrica è la seguente:



Il cerchio trovato di raggio EN è compreso tra quello inscritto di raggio EH e quello circoscritto di raggio ED. È estremamente probabile che la scelta sia stata guidata dall'apparente (quasi) uguaglianza tra le aree dei segmenti circolari intercettati dal quadrato sul cerchio trovato e le aree dei triangoli curvilinei intercettate dal cerchio sul quadrato. È un metodo empirico, caratteristico di una geometria non ancora molto sviluppata.

Una verifica della correttezza della costruzione di 2.9 era possibile in base ai valori di $\sqrt{2}$ e di π forniti dallo stesso *Baudhāyana.* Il primo (in 2.12) vi è approssimato a $\frac{577}{408}$ = ca. 1,4142157 per cui il raggio poteva essere valutato a $\frac{1393}{2448}$ = 0,5690359… ; il secondo (in 4.15) è valutato 3,0885. Attenendoci ai valori riportati nello stesso trattato, si trova per l'area del cerchio, calcolata come $\left(\frac{1393}{2448}\right)^2 \cdot 3{,}0885$, il valore di ca. 1,0000622 (con raggio unitario), così vicino a quello vero da far pensare che gli antichi Indiani lo ritenessero esatto (Baudhāyana non accenna ad approssimazioni, ma a scopi pratici l'esattezza o meno del risultato poteva anche essere trascurabile, data l'ottima approssimazione).

2.10 e **2.11** affrontano il problema della quadratura del cerchio. *Per trasformare un cerchio in un quadrato, si divida il diametro in otto parti; si divida in ventinove parti una di queste e si sottraggano ventotto di queste* [cioè, ne resta la ventinovesima parte] *e poi dal rimanente si tolga la sesta parte meno un ottavo.* Il lato del quadrato equivalente al cerchio è la somma dei sette ottavi del diametro più il resto ora calcolato.

In termini numerici, si riduce l'ottava parte del diametro a $\frac{1}{29}$, poi si sottrae da questa il prodotto di $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}$ per $\frac{1}{29}$; infine il lato cercato è

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{29} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{29}\right] = \frac{9785}{11136} = \text{ca. } 0.878682$$

volte il diametro. Se lo poniamo uguale a 1, l'area del cerchio sarà data da $\frac{\pi}{4}$ = ca. 0.7853982 ; quella del quadrato, 0.772… con una differenza di ca. una parte su cento. In 2.12, Baudhāyana propone anche l'approssimazione che il lato del quadrato sia i $\frac{13}{15}$ del diametro; l'area del quadrato sarebbe

$0{,}75\overline{1}$. Va notato che, mentre questo secondo metodo è definito esplicitamente un'approssimazione, tale definizione non è applicata al primo. Non è chiaro in qual modo Baudhāyana o altri prima di lui sia giunto al primo risultato; sono state proposte diverse soluzioni, alcune assai complicate;[43] la più semplice sembra passare per il calcolo del reciproco del risultato ottenuto al punto 2.9 per il calcolo del raggio del cerchio equivalente al quadrato, che conduce al risultato di 2.11 sostituendo a $\sqrt{2}$ il valore di seguito riportato.

2.12 fornisce un'approssimazione di $\sqrt{2}$: *la misura* [del lato del quadrato] *deve essere aumentata di un terzo, a sua volta aumentato di un quarto meno la trentaquattresima parte*; *questa è la diagonale.*

Si ottiene

$$1 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{34} \right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34}$$

cioè $\frac{577}{408}$ = ca. 1,4142157, che al quadrato fa ca. 2,000006007, confrontabile in quanto a precisione a quello riportato dalla tavoletta YC 7289 cioè 1;24,51,10 =

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} = 1.414212962$$

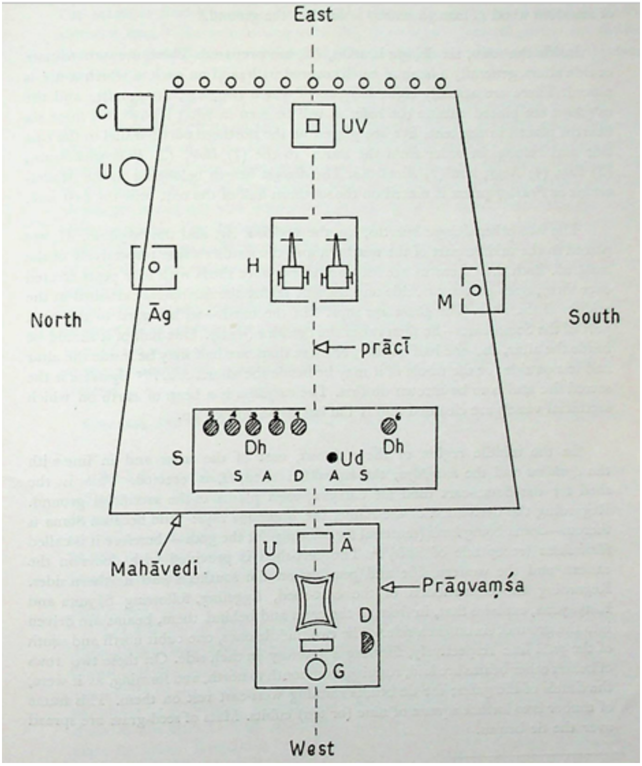
che al quadrato fa 1.999998304...

[43] v. Sen e Bag, p. 162 e segg.

I *Śulbasūtra* non spiegano come si sia arrivati a questo calcolo (v. cap. seg.) Si deve notare una forte preferenza per l'impiego di frazioni con numeratore 1, similmente ai metodi degli antichi Egizi.

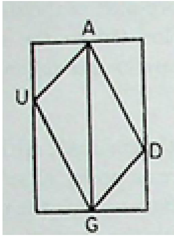
I capp. dal 3 al 21, cioè tutto il resto di questo trattato, illustrano la posizione, le dimensioni, la forma e tutte le caratteristiche dei vari tipi di altare secondo la tradizione, da rispettare nella loro edificazione. I *Śulbasūtra* di *Baudhāyana* e di *Āpastamba* sono trattati per la costruzione degli altari del fuoco sacrificale, un antico culto completamente stabilito all'epoca nella quale furono composte le *Saṃhitā*, le raccolte di testi sacri risalenti al II millennio a.C. I metodi esposti avrebbero tratto origine dalla condizione che fossero predefiniti sia l'area degli altari, composti di più strati di mattoni e di varie forme, sia il numero dei mattoni, anch'essi fatti in forme diverse. La matrice della matematica ivi sviluppata sarebbe quindi indoariana, e non vi sarebbe relazione diretta con quella dell'antico impero babilonese (le procedure di calcolo sono diverse) e neppure con quella di Harappa (che sembra orientata a fini pratici), ma non si può escludere che già nel *Baudhāyana* vi sia il germe di una geometria e di un'aritmetica svincolate dal rituale, p. es. nella formulazione delle serie numeriche che approssimano π e $\sqrt{2}$. I primi due capitoli non si applicano necessariamente solo alla costruzione degli altari. Per il resto, il carattere architettonico di questo tipo di matematica si intravede nel modo di trasformare figure (tagli, ricomposizioni, divisioni) e di eseguire calcoli mediante divisioni, somme e differenze. Nel *Baudhāyana* non si trovano proporzioni o medie più complesse di quella aritmetica.

La seguente pianta illustra le disposizioni degli altari e dello spazio sacro secondo Baudhāyana. Il *mahāvedi* ('grande altare') è orientato lungo l'asse ovest-est (*prācī*) e ha forma di un trapezio isoscele di base maggiore uguale a 30 *pada* (piedi), e minore di 24 situate rispettivamente ad ovest e ad est, distanziate di 36 [sono tre misure in progressione aritmetica la cui somma è 90; l'area del *mahāvedi* è $54 \cdot 18 = 27 \cdot 36 = 972$ *pada* quadrati]. All'interno vicino al lato ovest è posta una tenda (*sadas*) rettangolare riservata ai sacerdoti, orientata con le basi parallele a quelle del *mahāvedi* e tagliata a metà dalla direttrice ovest-est. All'interno del *sadas* sono approntati sei focolari (*dhiṣnya*); altri due si trovano all'esterno del *sadas.* L'area sacrificale (*prāgvaṃśa*) è posta all'esterno del lato ovest del *mahāvedi* e in essa son posti i quattro fuochi, tra cui il fuoco *ghārapatya* in prossimità del lato ovest, e gli altri tre sugli altri tre lati, secondo una precisa disposizione geometrica. Il capo della casa riceveva il *ghārapatya* da suo padre e lo trasmetteva ai suoi discendenti; era un fuoco sacro perpetuo.

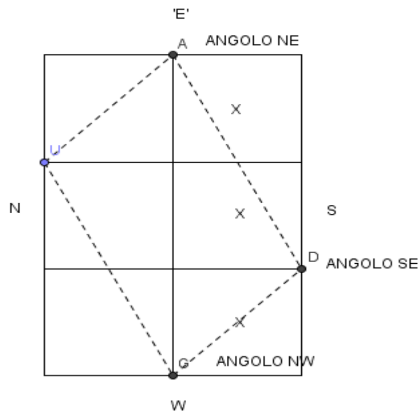


Āg e *M* indicano i due *dhiṣnya* posizionati fuori dal *sadas*; *UV* sta per *uttara vedi* (‘altare più alto’); *H* indica il capanno dove è posto il carro caricato con le piante di *soma.* G, U, Ā, D denotano i quattro fuochi, alcuni per cuocere il cibo offerto agli dèi, altri per cuocere il cibo ordinario.

Le posizioni reciproche di tutte le parti che compongono lo spazio sacro sono rigorosamente stabilite. I quattro fuochi sono disposti secondo distanze precise; secondo i vv. **3.1 – 3.5**, si possono applicare tre metodi. Consideriamo solo il primo.



A, D, G indicano rispettivamente i fuochi *āhavaniya*, *dakṣigṇāgni*, *gārhapatya. Si divide AG in tre parti uguali, e su ciascuna di queste si costruiscono tre quadrati che si toccano ; poi, l'angolo a nord-ovest del quadrato più ad ovest, l'angolo a SE dello stesso quadrato e l'angolo a NE del quadrato a est segnano il posto dei tre fuochi gārhapatya*, *dakṣigṇāgni*, *āhavaniya.* La posizione del quarto fuoco, *utkara*, coincide con quella che D occuperebbe scambiando tra di loro A e G. Ho interpretato queste indicazioni nel modo seguente:



Seguono istruzioni per la costruzione degli altari, a seconda del loro tipo (**3.6-3.12**). Il v. 3.12 prescrive che un certo altare possa essere un trapezio isoscele simile al *mahāvedi* e con area uguale a un terzo, cioè 324 *pada* quadrati [il numero di giorni dell'anno di 12 mesi siderei ciascuno di 27 giorni], ma Baudhāyana non descrive come ottenerlo. Il cap. 4 passa alle aree dello spazio sacrificale, del *mahāvedi* ecc.; in 4.15 si riprende in considerazione il valore di π. In tutto il trattato ne vengono forniti quattro valori, uno dei quali cioè 3 è una grossolana approssimazione; gli altri tre sono

3,0883 (v. 2.9) che possiamo esplicitare nell'espressione

$$\frac{36}{(2+\sqrt{2})^2} \;;$$

3,0885 già citato a proposito della quadratura del cerchio, dato da una sorta di sviluppo in serie numerica;

$$3{,}00\overline{4} = 4\cdot\left(\frac{13}{15}\right)^2 \quad \text{(v. 2.12)}$$

I capp. 5, 6, 7 trattano come aumentare l'area degli altari. La serie di 95 altari di area crescente inizia dal più piccolo, la cui superficie misura 7,5 *puruṣa* quadrati (p) e termina con la superficie di 101,5 p ; la differenza tra l'area di un altare e il precedente nella successione è costante ed è uguale a 1 p. L'area dell'altare che occupa il posto $p + 1$ nella successione è $7.5 + p$, e il rapporto all'area del primo è $\frac{p}{7{,}5} = \frac{2p}{15}$. A questo punto, si sarebbe potuto dividere il quadrato di area p in 15 parti uguali ecc.; sono stati proposti altri metodi, p. es. il più tardo *Kātāyana Śulbasūtra* propone per l'incremento $\frac{2p}{15}$ la serie numerica finita $p\cdot\left(\frac{5}{5\cdot5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5\cdot5}\right)$, cioè dividere il quadrato unitario p in 25 parti, e prenderne la differenza tra cinque di queste e un terzo di cinque, cioè due terzi di cinque venticinquesime parti.

Le regole di edificazione che impongono due condizioni conducono alla soluzione di sistemi di due equazioni. I vincoli sono l'area dell'altare o dello spazio sacro, e il numero dei mattoni che devono essere impiegati secondo le regole rituali. L'area sacrificale *gārhapatya* deve essere un quadrato la cui area poniamo uguale a 1 unità di misura. Un metodo prevede che sia costituita da due strati di 21 mattoni di forma quadrata ciascuno e di tre diverse dimensioni, i cui lati sono la sesta parte, la quarta o la terza dell'unità di misura. Uno dei due strati è formato da mattoni del primo e secondo tipo, l'altro dal primo e dal terzo. Se vogliamo calcolare quanti mattoni di ogni tipo servono, dobbiamo risolvere due sistemi di equazioni ciascuno in due incognite, x e y e x e z rispettivamente.

Non ci è noto come il problema venisse risolto, e il perché della scelta di quelle dimensioni per i mattoni. Il numero di ogni tipo di mattoni è determinato dalle loro dimensioni, o viceversa. Sarebbe importante, nell'ambito della storia della matematica, stabilire se i costruttori degli altari avessero preventivamente risolto i due sistemi, come lo sarebbe scoprire la ragione delle approssimazioni mediante serie numeriche finite; trattandosi di sistemi di primo grado, si è tentati di supporre che fossero stati risolti in funzione del problema della costruzione, o anche prima, e i costruttori avessero utilizzato le soluzioni già trovate. In realtà, i parametri liberi sono quattro e non due, e – ammesso che la soluzione fosse stata trovata attraverso i calcoli – vi possono essere diverse vie per giungervi, ma in tutte queste si deve procedere per tentativi. P. es., si possono fissare arbitrariamente le dimensioni, iniziando dalle frazioni semplici dell'unità, e cercare le soluzioni intere dopo aver risolto i due sistemi in base alle dimensioni arbitrariamente stabilite. In linea di principio, è possibile (lo prova la stessa costruibilità degli altari che rispettino le prescrizioni rituali), ma non è affatto detto che allora si fosse proceduto in tal modo; diversa è la questione se, una volta constatato che soluzioni ci sono, si cerchi di comprendere come si possa giungervi per via matematica. Nelle fasi arcaiche, o meglio al loro termine, qualcuno si chiedeva come giustificare risultati ottenuti empiricamente, o per tentativi. È successo in Grecia, non si vede perché non debba essere successo in India, e altrove.

Comunque sia, Baudhāyana conosceva le soluzioni: 9 mattoni di lato un sesto dell'unità e 12 mattoni di lato un quarto per il primo strato; 5 di lato un terzo e 16 di lato un sesto per il secondo. Infatti, per il primo strato:

$$\frac{9}{36} + \frac{12}{16} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Questi stessi numeri possono indirizzarci a ipotizzare come fossero pervenuti alla costruzione. Una divisione in parti di forma quadrata suggerisce di sommare aree multiple di un sottomultiplo dell'unità che sia un quadrato esso stesso; il primo da considerare è $\frac{1}{4}$. Per ottenere 1 come somma di due aree multiple di un quarto dell'unità, il modo più semplice è sommare $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$. Dobbiamo ora sommare due frazioni tali che la somma dei numeratori sia 21 . Vi è più di una combinazione, ma si debbono prendere in modo che $\frac{x}{36} + \frac{y}{16} = 1$. Il confronto con le precedenti frazioni suggerisce che $x = 9$ e $y = 12$. Si osservi che le dimensioni possono essere dedotte dal numero prefissato di mattoni; infatti, se cerchiamo una frazione equivalente a $\frac{1}{4}$ di numeratore uguale a 9 , questa è $\frac{9}{36}$, e di conseguenza sarà $y = 12$. Questa procedura può sembrare logicamente ingiustificata (è premiata dal risultato), ma è verosimile che nelle fasi più antiche della matematica non si procedesse attraverso metodi relativamente più avanzati, come la traduzione di un problema numerico in un sistema di equazioni con più incognite. Più in generale, può in certi casi essere azzardato ipotizzare l'impiego di strumenti relativamente evoluti nella fase arcaica della matematica. Il teorema di Pitagora, per citare l'esempio più noto, molto difficilmente fu dimostrato prima di averne verifiche empiriche (almeno, non v'è nulla che documenti una sua dimostrazione presso le civiltà pre-elleniche); in questo caso, l'osservazione deve aver preceduto la prova 'razionale'.

I restanti capp. dall'ottavo al ventunesimo descrivono la costruzione di altari di varie forme: due tipi a forma di falco; a forma di uccello *alaja,*[44] di un triangolo isoscele, di un rombo, della ruota di un carro ecc.

Gli **altari a forma di falco** potevano essere 'rettilinei' se il corpo, le ali e la coda sono quadrati o rettangoli, o tali che le ali fossero ricurve, la coda espansa, e gli angoli del corpo e della testa tagliati via, in modo da meglio raffigurare il falco. Nel secondo caso, si impiegavano mattoni di cinque forme diverse: quadrato, con lato di 30 *aṅgula* [larghezza di un dito; è la dodicesima parte di una 'spanna', la ventiquattresima di un cubito e 108 *aṅgula* fanno un *dhanusha*, ca. 3 m[45]); metà dello stesso quadrato, quarta parte, trapezio rettangolo e triangolo isoscele poggiante su un rettangolo, sempre con misure rigorosamente definite. I mattoni erano disposti su più strati, e la loro disposizione poteva cambiare da strato a strato.

44 Una specie non identificata; v. Alaja: 5 definitions.
45 Da *Wikipedia*

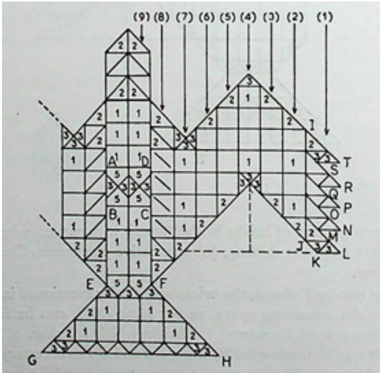


Fig. 40. Arrangement of bricks in the second layer.

La seguente figura rappresenta una variante detta *kaṅkacit*:

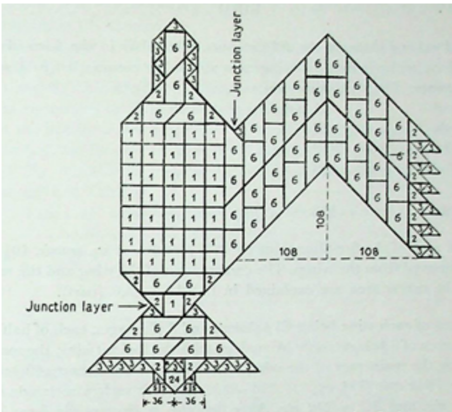


Fig. 48. Arrangement of bricks in the *kaṅkacit*—2nd layer.

Si impiegava la stessa tecnica per la costruzione di **altari del fuoco con la forma del triangolo isoscele** tracciato congiungendo gli estremi del lato di un quadrato con il punto medio del lato opposto. L'area doveva sempre essere uguale a 7,5 *puruṣa* quadrati, per cui i lati avrebbero dovuto essere esattamente $\sqrt{15}$ e $\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\sqrt{15} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ *puruṣa*, approssimati risp. a $464 + \frac{3}{4}$ e 519,5 *aṅgula* (1 *puruṣa* = 120 *aṅg.*) La misura di 464,75 *aṅg.* = $\frac{1859}{480}$ = ca. $\frac{1860}{480} = \frac{31}{8}$ fa pensare che proprio questa fosse l'approssimazione utilizzata per $\sqrt{15}$. Vi si può arrivare per approssimazioni successive della forma $3 + \frac{m}{n}$, finché non se ne trova una 'abbastanza vicina' al valore corretto; in questo caso, $3 + \frac{7}{8}$ o $4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8}$ sembra soddisfacente, dato che $\left(\frac{31}{8}\right)^2 = \frac{361}{64} = 15{,}015625$ differisce da 15 di ca. una parte su mille. Meno chiaro è il procedimento adottato per il lato obliquo. *Sen* e *Bag* riportano 519.6 o 519.5 *aṅg.* come risultato di $300\sqrt{3}$, che implicano rispettivamente $\sqrt{3} = \frac{433}{250}$ o $\frac{1039}{600}$; la seconda potrebbe intendersi come $\frac{1040-1}{600} = \frac{26}{15} - \frac{1}{600}$ che a sua volta potrebbe essere $2 - \frac{4}{15} - \frac{1}{600}$. Evidentemente queste sono solo congetture; ma verosimilmente gli autori dei *Śulbasūtra* conoscevano un metodo generale per il calcolo approssimato delle radici quadrate.

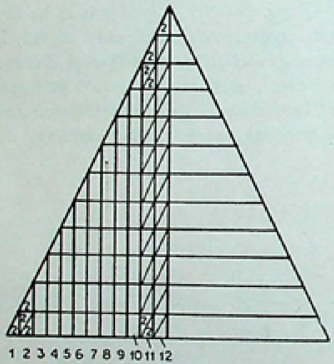


Fig. 54. Arrangement of bricks in the *praugaciti*—1st layer.

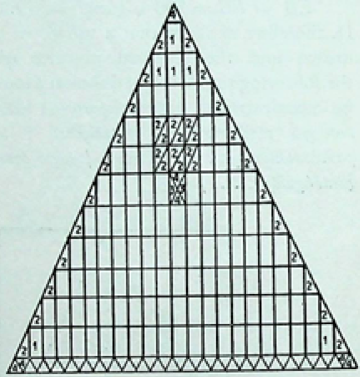
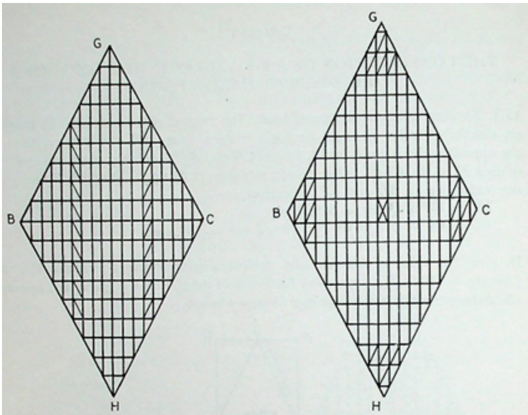


Fig. 55. Arrangement of bricks in the *praugaciti*—2nd layer.

Questi altari erano composti da quattro tipi di mattoni. La loro forma dominante è quella di un rettangolo con un lato doppio dell'altro e di area $\frac{1}{144}$ dell'area totale di 7,5 *puruṣa* quadrati. Poichè 1 *puruṣa* è ca. 2 m, l'area di ciascuno di questi mattoni è ca. 27,8 dm^2.

Gli **altari a forma di rombo** sono l'unione di due triangoli isosceli simili alla precedente figura, con l'area totale ancora uguale a 7,5 *puruṣa*, per cui tutte le lunghezze andrebbero divise per $\sqrt{2}$.



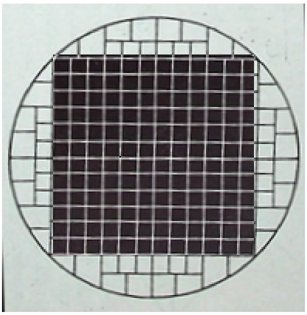
g. 57. Arrangement of bricks in the rhombus fire-altar—1st layer. Fig. 58. Arrangement of bricks in the rhombus fire-altar—2nd layer.

Più interessanti sono gli **altari a forma di ruota di carro**. Ve n'erano di due specie; nella prima, il cerchio è l'unione di un quadrato e di quattro segmenti circolari con la base coincidente con un lato del quadrato. Teoricamente, il raggio del cerchio è $\frac{l}{\sqrt{\pi}}$ dove l è il lato del quadrato equivalente; dato che l'area dell'altare deve misurare $7{,}5$ *puruṣa* quadrati, il valore esatto è $\sqrt{\frac{7{,}5}{\pi}}$ *puruṣa*; quello prescritto per la costruzione è $185{,}45$ *aṅg.*,[46] per cui il valore implicito di π è $7{,}5 \cdot \left(\frac{120}{185{,}45}\right)^2 = \frac{43200000}{13756681} = 3{,}14029\ldots$ migliore delle approssimazioni esplicitamente dichiarate da Baudhāyana. In effetti, le misure

46 Mi riferisco ai valori indicati nel commento e interpretazione del testo dell'edizione curata da Sen e Bag.

riportate sono quelle indicate nel commento sul *Baudhāyana* da parte di *Dvārakānātha*, che conosceva una migliore approssimazione per π . Il lato del quadrato inscritto nel cerchio è il prodotto del raggio per $\sqrt{2}$. La misura adottata dai costruttori è 262,27 *aṅg.*, che definisce implicitamente il valore di $\sqrt{2}$ come dato da 1,414235643, con l'approssimazione di ca. 15 parti su un milione, leggermente differente da 1,4142157 dichiarato in 2.12, il che fa supporre che la discrepanza sia dovuta alle approssimazioni fatte nell'esecuzione dei calcoli.

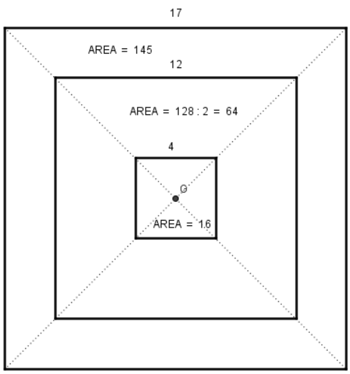
Lo schema della disposizione dei 200 mattoni è il seguente



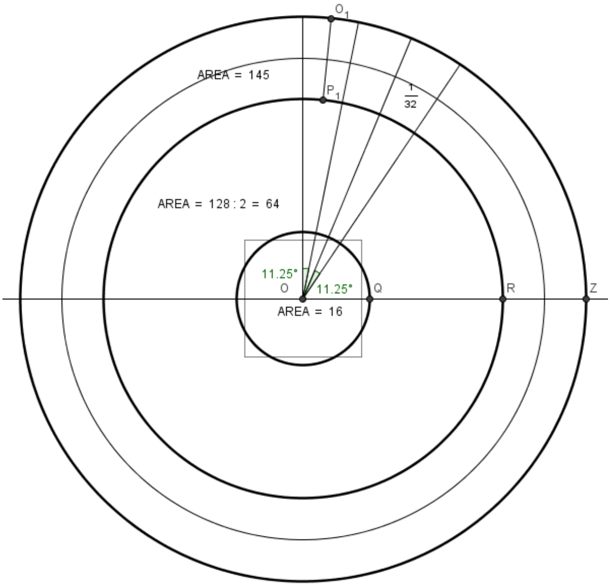
Di questi, 144 compongono il quadrato centrale; altri 14 per ogni segmento circolare, di cinque forme diverse, completano il cerchio. È evidente che la composizione del tutto è ottenuta riempiendo il cerchio con un numero prefissato di pezzi, rispettando semplici regole numeriche (12 x 12 quadrati per riempire il quadrato centrale) e non ha nulla a che vedere con metodi di approssimazione della circonferenza mediante tracciamento di poligoni regolari con elevato numero di lati. La geometria è di tipo ‘riempitivo’, accompagnata da un’aritmetica fatta di divisioni cioè frazioni e somme / differenze.

Molto più complicato è l’assemblaggio dell’**altare a forma di ruota con raggi**. La descrizione dettagliata è data nel *Commento a Baudhāyana* di *Dvārakānātha*, che si avvale di nozioni e abilità superiori. Lo schema consiste in tre cerchi concentrici e due corone circolari da essi limitata, divise in settori separati dai raggi. Gli stadi della costruzione si possono geometricamente dividere in tre fasi: 1. il tracciamento di tre quadrati concentrici e con i lati paralleli, ausiliari all’esecuzione del passo seguente; 2. il tracciamento di tre circonferenze concentriche ai rispettivi quadrati, e con la stessa area, come spiegato in 2.9 in modo che il cerchio interno corrisponda al mozzo e le due corone circolari allo spazio contenente i raggi e al cerchione; 3. il riempimento con mattoni. Limitiamoci ai primi due passi per il loro interesse matematico.

Il procedimento è basato su quadrati di numeri interi e sul vincolo per cui l’area dell’altare deve misurare 7,5 *puruṣa*. Assumendo come unità di riferimento un (mattone) quadrato equivalente alla trentesima parte di 1 *puruṣa*, si deduce che l’altare equivale a 15 x 15 = 225 unità. L’area totale occupata dai raggi, esclusi gli spazi che li separano e che saranno lasciati vuoti, dovrà essere di 64 unità. Al mozzo si assegnano 16 unità, che sommate alle precedenti fanno 80; ne mancano 145 per giungere a 225. Si traccia il quadrato di 16 unità equivalente al cerchio del mozzo, poi un quadrato di 289 unità, somma di 225 e 64 , di lato 17 , concentrico e con i lati paralleli, e infine un terzo quadrato di 144 unità e lato 12, concentrico e intermedio e allineato ai due già tracciati in modo che le 145 unità mancanti siano la differenza tra 289 e 144. Inoltre, 144 – 16 = 128 = 2 x 64; 64 unità sono le aree riservate rispettivamente all'insieme dei raggi della ruota e a quello degli spazi (settori di corona circolare) che separano due raggi vicini, e che saranno lasciati vuoti. L'area effettiva della zona compresa tra il mozzo e il cerchione è quindi di 64 unità soltanto. Il bordo esterno (il cerchione) sarà equivalente a 145 unità, il mozzo a 16, e la somma di tutte le unità è di 225, cioè 7,5 *puruṣa* quadrati. Questo per la misura delle aree; ricordiamo che l'unità è la trentesima parte di 1 *puruṣa* quadrato, ca. $\frac{2}{15}$ del metro quadro. Il numero totale dei mattoni deve essere 200, quindi non hanno tutti la stessa forma e dimensioni.



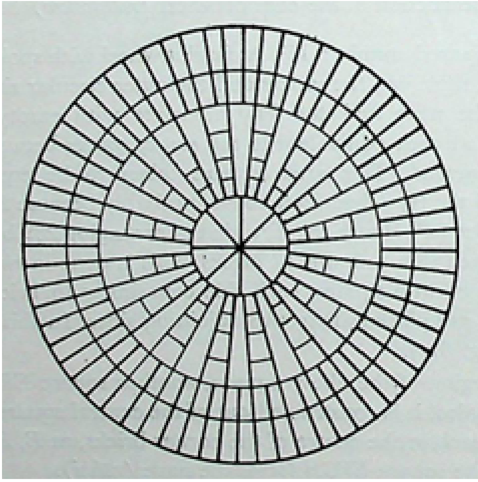
A questo punto possiamo passare a tracciare i cerchi e i raggi della ruota applicando 2.9.



Dall'interno verso l'esterno, i raggi delle circonferenze stanno nel rapporto 4 : 12 : 17. Il cerchione è diviso in due da una quarta circonferenza. I 32 settori di corona circolare compresi tra la circonferenza mediana e la più interna sono alternativamente i raggi e gli spazi vuoti.

Dei 200 mattoni, 8 compongono il mozzo (il cerchio interno), 4 ognuno dei 16 raggi (metà dei 32 settori) per un totale di 72; i restanti 128 (quattro per ogni arco di 32°, ripartiti nelle due corone circolari che dividono nella sua circonferenza media quella del cerchione, in modo che ognuno copre la sessantaquattresima parte di un giro) compongono il cerchione.

La realizzazione architettonica è la seguente.



Il primo strato. Da Sen e Bag, che riportano uno studio di Thibaut

Il metodo seguito è possibile grazie alla 'rete aritmetica' non basata su una base in particolare, come quella decimale, comprendente potenze di 2 (4, 16, 32, 64, 128) e multipli di 12 (lo stesso 12 , 72, 144. Il numero 145 è il complemento a 225 imposto dalla somma delle aree uguali a 16 e a 64, e conduce ad una circonferenza esterna di raggio uguale a 17 unità. Le differenze di quadrati svolgono una funzione importante; i quadrati 16, 64, 144, 289 hanno lati interi, e perciò stesso sono numeri matematicamente (e architettonicamente) interessanti. Ciò che si evince da questa costruzione è una conoscenza delle relazioni tra numeri interi che consente di operare solo attraverso di essi. Anche le frazioni non sono state impiegate.

Il rimanente di questo *Śulbasūtra* non presenta novità significative rispetto a quanto già visto.

I metodi del *Baudhāyana* hanno in comune con quelli babilonesi l'orientamento al calcolo e la dipendenza dal tracciamento di figure piane. Calcolare superfici di forme diverse ma riconducibili a semplici poligoni rettilinei esige l'adozione di procedure affini, ma i metodi di calcolo sono differenti. I Babilonesi – a giudicare dai reperti – erano superiori, come vediamo dalla loro abilità nel trattare moltiplicazioni e trovare terne pitagoriche, redigere tabelle di reciproci ecc., che li avvicinava a tecniche più moderne dell'uso di frazioni, somme e sottrazioni di frazioni ecc. Sotto questo aspetto, il *Baudhāyana* avrebbe maggiore affinità con il poco materiale pervenutoci da parte degli antichi Egizi. In tutti i casi – eccetto i Greci, almeno a partire dall'età classica, e forse da Talete e Pitagora, non abbiamo giustificazione alcuna delle regole o dei numeri impiegati, salvo per gli antichi Indiani le costruzioni fatte con l'aiuto di corde tese. Si tratta di *procedure* e non di teoremi, ma sotto questo aspetto la differenza con la fase arcaica della geometria greca potrebbe essere minore di ciò che suggeriscono gli sviluppi ulteriori di quest'ultima.

Il primo problema è la datazione delle nozioni matematiche citate nei due *Śulbasūtra* considerati i più importanti dal consenso degli studiosi, *Baudhāyana* e *Āpastamba.* Vi è più di una alternativa: che la matematica ivi contenuta abbia tratto origine in tempi ancora più antichi dalla necessità di rispettare le prescrizioni rituali, stabilite ancor prima; o che vi sia stato un inizio indipendente dalle prescrizioni rituali, e che la realizzazione di queste si sia avvalsa dei risultati già ottenuti; infine, che i *Śulbasūtra* e il *Baudhāyana* in particolare abbiano elaborato i procedimenti quasi per intero. Quest'ultima possibilità è la meno probabile; il riferimento all'uso delle funi tese, alle proprietà delle figure, l'accenno al teorema di Pitagora come noto almeno su base empirica e infine l'esigenza di comporre un dato numero di mattoni in figure di area prefissata farebbero pensare che la sostanza della geometria impiegata fosse anteriore. Potrebbe però essere che a Baudhāyana siano dovute alcune parti, come il calcolo approssimato di $\sqrt{2}$ e π .

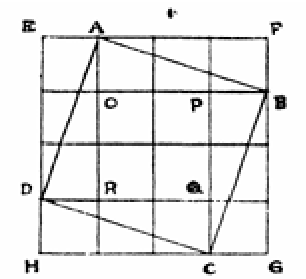
Gli studiosi hanno proposto diverse soluzioni; in *The Science of Śulba* (1932), *B. Datta* ritiene probabile che i problemi di geometria e anche di aritmetica siano sorti in India e vi siano stati studiati soprattutto in connessione con la costruzione di altari sacrificali. Questi dovevano soddisfare norme stringenti, pena l'inefficacia del rito. Problemi fondamentali erano costruire un cerchio equivalente a un quadrato, e viceversa, o tracciare un cerchio di area doppia, il che implica un calcolo per quanto possibile corretto di $\sqrt{2}$. In Grecia, gli abitanti di

Delo avrebbero dovuto edificare un altare a forma di cubo di volume doppio; interpretarono erroneamente il compito assegnato, e non furono guariti dalla pestilenza che imperversava. Aumentare di una quantità nota l'area di un altare per ottenerne un altro ad esso simile implicava la similitudine tra figure piane, ecc.

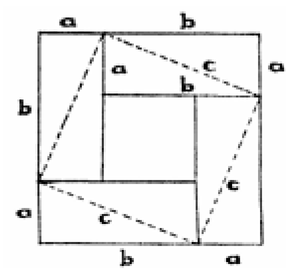
"Troviamo che numerosi passi del *Baudhāyana* e del *Āpastamba Śulba* connessi sia alle misure degli altari sia ai relativi metodi di costruzione si concludono con 'questo è noto'" o con richiami all'autorità della tradizione [DATTA 1932]. In alcuni passi, Āpastamba osserva che certe costruzioni non si accordavano con la tradizione, per cui si può dedurne che vi fossero contemplati altri metodi, quelli corretti. I più antichi riferimenti agli altari sacrificali e alla loro costruzione si trovano nella *Ṛgveda Saṃhitā*, e si può supporre che "il problema della quadratura del cerchio e del quadrato dell'ipotenusa siano antichi quanto il *Ṛgveda* stesso." [DATTA] anche se non vi sono specificate grandezza e forma. Una fonte autorevole, cui fanno talvolta riferimento Baudhāyana e Āpastamba quando si appellano alla tradizione, sarebbe la *Taittirya Saṃhitā.* Il problema è che non vi è accordo sulle date nè del *Ṛgveda* nè della *Taittirya.* Il primo può essere collocato tra il 1500 e il 1000 a.C., ma la tradizione orale precedeva la redazione scritta di secoli; *Datta* (a pag. 27) lo pone a prima del 3000 a.C. forse riferendosi al contenuto, eventualmente tramandato oralmente, ma è noto che gli studiosi indiani tendono a retrocedere le date. La *Taittirya* sarebbe stata composta tra il 12° e il 9° sec. a. C.

Possiamo dedurne che gli inizi della matematica in India siano stati fortemente incentivati dal rispetto di norme rituali nella seconda metà del II sec. a.C.

Un secondo problema si chiede se gli Indiani avessero prodotto una prova generale del teorema di Pitagora risalente alla fine dell'epoca dei *Śulbasūtra.* Il punto d'inizio è fornito nel *Katyayana Śulbasūtra*, dove si afferma che la diagonale di un rettangolo di lunghezza tre *pada* e larghezza un *pada* è il lato di un quadrato di area 10 *pada* quadrati. Si tratta di un'affermazione facilmente verificabile, ma limitata a un caso particolare, perché del rettangolo si danno solo misure assolute; non si individua una intera classe di rettangoli simili. La figura ha suggerito una possibile generalizzazione, che è effettivamente una prova.



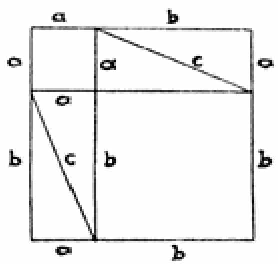
Eliminando la griglia, abbiamo una dimostrazione generale:



il quadrato di lato c è la differenza tra il quadrato esterno, $(a + b)^2$, e i quattro triangoli rettangoli di cateti a e b. Quindi

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab \text{ ecc.; o anche}$$
$$c^2 = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 2ab\,,$$

perché il quadrato di c è anche la somma del quadrato interno e dei quattro triangoli rettangoli. Una procedura simile è stata adottata secoli dopo da *Bhāskara* ed è simile al metodo attribuito ai pitagorici da alcuni studiosi, che fa ricorso al confronto tra scomposizioni di un quadrato di lato $a + b$. A favore dell'idea che un qualche metodo di scomposizione avrebbe potuto condurre gli Indiani ad una dimostrazione del teorema di Pitagora, Datta avanza un metodo proposto da Āpastamba per espandere un quadrato di lato b in un quadrato di lato $a + b$:



che corrisponde alla regola $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Āpastamba sarebbe stato in grado di dimostrare il teorema di Pitagora.

Un altro problema, collegato al triangolo rettangolo, consiste nello stabilire se le terne pitagoriche citate da Baudhāyana e

Āpastamba siano state ottenute mediante una formula generale, come potrebbe essere avvenuto con i Babilonesi. Baudhāyana cita qualche terna, e afferma che sono casi particolari del teorema del triangolo rettangolo, ma sembra che questa nozione sia di natura empirica, dato che non viene fornito alcun metodo generale per ottenere terne pitagoriche. In effetti, i *Śulbasūtra* sono testi tecnici nei quali si applicano regole utili piuttosto che trattati di matematica. Invece, una formula generatice è fornita dal più tardo (e sistematico) *Kātyāyana Śulbasūtra*, per costruire un quadrato di area n volte quella di un quadrato di lato a. Si ottiene una formula dipendente dalla variabile n, ma allo scopo di risolvere un particolare problema di costruzione. Kātyāyana avrebbe tracciato il triangolo isoscele ABC di base BC = $(n - 1)\,a$ e lato obliquo AC = AB = $\frac{n+1}{2}\,a$, in modo che il quadrato cercato sia $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot a^2$ - $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot a^2$, che è uguale a na^2; il quadrato cercato è quello dell'altezza relativa a BC. Il metodo è applicabile alla costruzione di $\sqrt{n}$, o di terne pitagoriche razionali, ma Kātyāyana non approfondisce; i singoli problemi sono considerati in funzione di uno scopo specifico, ciascuno per conto proprio.

Se le cose stavano in questo modo, sembra inutile chiedersi se gli autori dei *Śulbasūtra* attingessero a procedure dell'analisi indeterminata (diofantea), pur essendo riusciti a risolvere problemi che rientrano in questo ramo della matematica. In realtà non è possibile provare che non ne avessero fatto uso o che la ignorassero del tutto, visti i risultati ottenuti. Potrebbe essere che l'analisi indeterminata sia stata introdotta e studiata proprio in relazione a problemi di costruzione, per via delle regole sul numero dei mattoni, sull'estensione delle varie parti dell'altare ecc.; v. *A. K. Dutta* 2002, ma che non si arrivasse a una visione generale e si preferisse piuttosto risolvere una quantità di casi particolari, orientandosi sulla ricerca di soluzioni *ad hoc* piuttosto che alla formulazione di regole generali. O forse si trovarono metodi generali, ma una volta risolti i problemi di costruzione degli altari, la teoria fu dimenticata. Questo tipo di incertezze riguarda le fasi arcaiche in tutte le culture, facendo sembrare eccezionale la matematica greca, qualora si creda all'affermazione per la quale Pitagora avrebbe trasformato la matematica in una scienza liberale svincolandola dall'essere soltanto una collezione di risultati di problemi tecnici.

Nel *Baudhāyana Śulbasūtra* troviamo alcune approssimazioni di $\sqrt{2}$, tra cui

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34} = \frac{577}{408} =$ ca. 1,414215686, non molto distante dal valore reale $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ Non viene spiegato il procedimento per ottenere questo risultato. Esiste un metodo, relativamente semplice, che potrebbe essere stato quello applicato.

Si moltiplica 2 per $12^2 = 144$, e si cerca una prima approssimazione di $\sqrt{2 \cdot 144} = \sqrt{288} \approx \sqrt{289} = 17$. Poiché

$\sqrt{2 \cdot 144} = 12\sqrt{2}$ da cui $\sqrt{2} \approx \frac{17}{12} = 1.41\overline{6}$, non male, ma migliorabile. Per una maggior precisione, si deve sottrarre una quantità a tale che $(17 - a)^2$ sia più vicino a 288. Si suppone che i matematici dell'età vedica sapessero che il quadrato di $(b - a)$ sia quasi uguale a $b^2 - 2ab$ quando $a << b$; assumendo che questo sia il caso, risolvendo rispetto ad a l'equazione $289 - 34a = 288$, e dividendo poi il risultato ottenuto per 12 come nel precedente calcolo, otteniamo il termine da sottrarre alla precedente approssimazione. Questo risulta essere $\frac{1}{34 \cdot 12}$.

A questo punto, si esprime il risultato come somma e differenza di frazioni;

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{34 \cdot 12} = 1 + \frac{4+1}{12} - \frac{1}{34 \cdot 12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34}.$$

Il punto critico di questa ricostruzione è l'approssimazione $(b - a)^2 \approx b^2 - 2ab$; ma vi si può giungere in base a semplici considerazioni geometriche.

Lo stesso metodo potrebbe essere stato utilizzato per $\sqrt{15}$ e per $\sqrt{3}$. Moltiplichiamo 15 per $8^2 = 64$ e otteniamo 960; il quadrato più vicino, 961 , è quello di 31. Infine abbiamo $\sqrt{15} = \frac{31}{8}$.

Per $\sqrt{3}$, abbiamo $3 \cdot 15^2 = 675$, vicino a $676 = 26^2$; con questo stesso metodo otteniamo in prima approssimazione $\frac{26}{15}$, che è in eccesso. Possiamo ottenere una migliore approssimazione applicando la solita correzione, per cui sottraiamo $\frac{1}{52 \cdot 15}$ da $\frac{26}{15}$ e otteniamo $\frac{1351}{780} \approx$ 1.732051282, che al quadrato fa 3.000001643. Come si vede, è un'approssimazione molto buona, migliore del valore utilizzato da Baudhāyana per gli altari a forma di triangolo isoscele.

Vi è un altro procedimento per valutare $\sqrt{2}$, logicamente ancora più semplice, probabilmente utilizzato dai Babilonesi, e che conduce allo stesso risultato ottenuto sopra. Partendo da 1,5, si calcola la media aritmetica tra 1,5 e 2 : 1,5 che dà $\frac{17}{12}$ e si itera la procedura, ottenendo $\frac{577}{408}$ che è uguale a

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12\cdot 34}$, trovato prima. Si osservi che $1{,}5$ e $2/1{,}5$ sono rispettivamente la media aritmetica e la media armonica tra 1 e 2. Potrebbe quindi darsi che gli Indiani avessero applicato il secondo metodo, scrivendo poi l'approssimazione ottenuta come somma e differenza di frazioni con numeratore unitario.

I calcoli provano che i matematici dell'India vedica potevano aver fatto impiego di un metodo generale, che consiste in pochi passaggi: si moltiplica il numero n di cui si cerca la radice quadrata per il quadrato dei primi k numeri, ottenendo un *set* (n, $4n$, $9n$, k^2n...); tra tutti i suoi elementi, si cerca quello più vicino al quadrato di qualche naturale N ; allora, la prima approssimazione di $\sqrt{n}$ è $\frac{N}{k}$. Una migliore approssimazione si ottiene aggiungendo o sottraendo $\frac{1}{2kN}$. Questo procedimento non implica conoscenze molto approfondite, ma fa pensare che i matematici dovevano preventivamente aver preparato tabelle di quadrati dei numeri naturali. Benchè tecnicamente più semplice dei metodi babilonesi, non sembra molto inferiore a questi: il quadrato dell'approssimazione dei *Śulba* è $2{,}000006007$, quello dell'approssimazione fornita dalla tavoletta YBC 7289 è $1{,}999998304$, con le rispettive precisioni di sei parti su milione e di $1{,}6$ su un milione.

Non è possibile, solo in base a pochi confronti, stabilire se i matematici indiani avessero utilizzato risultati babilonesi o meno, ma i loro metodi sembrano indipendenti da questi ultimi.

IL SUÀN SHÙ SHŪ

Il *Suàn Shù Shū* ('Scritti sul calcolo') è una collezione di testi di argomento matematico assemblati da un ignoto scrittore contenuto in 190 strisce di bambù e rinvenuto nel 1983 a Zhāngjiāshān nell'Húběi, una provincia nel centro della Cina, in una tomba che sarebbe stata chiusa nel 186 a.C.[47] È certamente il più antico testo cinese scoperto con un contenuto matematico sostanziale. Inoltre, è considerevolmente più antico di qualsiasi altro testo matematico cinese attualmente esistente. È di livello intermedio tra l'aritmetica babilonese e quella egiziana. Rispetto alla prima tratta un insieme più ridotto di questioni, con particolare attenzione a problemi quotidiani e amministrativi; il suo ambito è il calcolo elementare esteso a interi e frazioni, quadrati e radici quadrate e un metodo originale di falsa posizione applicato a problemi di ripartizione e all'estrazione di radice quadrata. Rispetto alla seconda non ha le restrizioni di questa, trattando frazioni proprie e improprie con addizioni, moltiplicazioni, semplificazioni. Il confronto con i testi vedici è più difficile; questi sono in funzione della costruzione di altari, ma il livello della loro aritmetica è inferiore. In geometria piana troviamo che π è approssimato a 3, mentre in geometria solida si procedeva scomponendo il solido in una somma di elementi appartenenti ad un insieme definito secondo schemi sistematicamente organizzati. Non erano interessati alle questioni della geometria solida greca come poliedri regolari e relative costruzioni.

47 Ho ricavato questa e tutte le altre informazioni da *C. Cullen*, *The Suàn Shù Shū... "Writings on Reckoning"* 2004; 2006.

Un confronto tra i livelli raggiunti da civiltà differenti in epoche separate da secoli ha ovviamente un significato molto limitato nel nostro caso, data la distanza nel tempo (più di un millennio tra i Babilonesi o gli Egizi e il *Suàn Shù Shū*); tuttavia fornisce alcune indicazioni sulle modalità secondo le quali l'aritmetica procede oltre il semplice conteggio e giunge a operare efficacemente col numero, intero e frazionario. Queste modalità presentano molti tratti in comune, così come avviene nella geometria primordiale, ma anche differenze significative nei metodi di calcolo. Abbiamo visto che i Babilonesi superarono alquanto gli Egizi, e i metodi del *Suàn Shù Shū* pure sono a un livello alquanto inferiore, avvicinandoli agli Egizi per l'uso sistematico delle frazioni, ma superandoli come tecnica di calcolo. Per quanto riguarda l'aritmetica, la differenza tra i Babilonesi e tutti gli altri (per l'India, mi riferisco solo al trattato *Baudhāyana*) è comunque maggiore delle differenze tra questi ultimi (Greci esclusi). Sembra che i progressi della matematica cinese siano stati indipendenti dai risultati di altre civiltà; non avendo la stessa certezza per quanto riguarda l'area del vicino e medio oriente, il confronto tra il *Suàn Shù Shū* e tutto il resto può evidenziare caratteri comuni a tutte le fasi antiche o arcaiche dell'aritmetica.

In realtà, tale confronto non produce alcunché di sorprendente. Ciò che ne emerge è l'uniforme interesse per problemi ordinari e gestionali, che di per sé orientano verso l'applicazione di certe procedure, il collegamento con la misura, ecc.; le differenze riguardano il modo di eseguire le operazioni aritmetiche.

Fondamentali sono evidentemente addizione e sottrazione; più complessa è la questione per moltiplicazione e divisione. Quest'ultima è l'operazione più difficile, tant'è vero che i Babilonesi razionalizzarono a loro modo le procedure di calcolo sostituendo alla divisione la moltiplicazione del dividendo per il reciproco del divisore. Ma la moltiplicazione stessa è un'operazione più varia come modalità dell'addizione. Per quest'ultima, c'è differenza tra l'impiego o meno di una base come dieci, o se si ragiona su frazioni. Queste sono largamente impiegate in tutte le aritmetiche antiche, per cui si può affermare che gran parte di queste siano una teoria operativa dei numeri razionali. È verosimile che la base di ogni aritmetica consista di operazioni su interi positivi e frazioni come addizioni, semplici moltiplicazioni, divisioni in parti, semplificazioni; il resto deriva da perfezionamenti. La frazione con numeratore uguale a 1, in quanto parte di un intero o suo sottomultiplo, può avere un ruolo molto importante per gli Egizi e il *Baudhayana*, ma non nel *Suàn Shù Shū*, che tratta frazioni in generale sommandole, moltiplicandole ecc. Anche in geometria il metodo di scomposizione è il primo ad essere applicato per misurare aree e volumi, come pure tecniche primitive di approssimazione; queste ultime, in particolare, allo scopo di valutare l'area del cerchio ecc.

Il contenuto consta di: regole di operazioni sulle frazioni; questioni amministrative e commerciali come ripartizioni di un profitto comune in proporzione ai contributi versati, calcolo di somme dovuti a interessi, tasse, scambi di merci, valutazione dei tempi di lavoro ecc., calcolo di volumi e altro. In sostanza è prevalentemente matematica attuariale.

Le regole di calcolo con le frazioni includono semplificazioni e moltiplicazioni; è scritto esplicitamente che il prodotto di due frazioni ha per numeratore e denominatore rispettivamente i prodotti dei due numeratori e dei due denominatori. Per la semplificazione, si prescrive di dividere per due numeratore e denominatore; altrimenti, si cerca il massimo comun divisore tra il numeratore e il denominatore sottraendo il minore dal maggiore e iterando il procedimento con la loro differenza e il minore, e così via finché si giunge all'uguaglianza. Questo metodo per il calcolo del M.C.D. è esposto da Euclide in VII prop. 2. P. es., vogliamo semplificare $\frac{27}{45}$. Sottraiamo 27 da 45 e otteniamo 18, poi 18 (il minore) da 27 e otteniamo 9, infine 9 da 18 che dà ancora 9. Quindi questo è il M.C.D.; ora dividiamo 45 e 27 per 9 e otteniamo la frazione ridotta ai minimi termini, cioè $\frac{3}{5}$. Per quanto riguarda la somma o differenza di due frazioni, se hanno lo stesso denominatore, questo sarà il denominatore del risultato, e il numeratore sarà la somma o differenza dei numeratori; se un denominatore è multiplo dell'altro, ci si riconduce al caso precedente moltiplicando denominatore e numeratore di una delle due frazioni per lo stesso fattore; infine se non è nessuno dei casi precedenti, il denominatore è il prodotto dei due, il numeratore è la somma o differenza dei numeratori ciascuno moltiplicato per il denominatore dell'altra frazione. Per risolvere alcuni problemi della sezione 14 , che chiedono di calcolare la somma dei reciproci di n con n da 1 a un massimo, p. es. 10 , si prescrive di calcolare il M.C.D. tra tutti i denominatori e di procedere come facciamo oggi.

Vediamo alcune questioni esaminate.

Un problema di ripartizione: "Una volpe, un gatto selvatico e un cane passano attraverso un posto di dogana; pagano 111 soldi di tassa. Il cane dice al gatto selvatico, e il gatto selvatico dice alla volpe: "La tua pelle vale il doppio della mia; dovresti pagare il doppio della tassa!" Domanda: quanto viene pagato in ciascun caso? Risultato: il cane paga 15 soldi e 6/7 di soldo; il gatto selvatico paga 31 soldi e 5 parti [1 parte dovrebbe essere un settimo, a giudicare dai calcoli seguenti]; la volpe paga 63 soldi e 3 parti. Metodo: si consideri che ciascuno sia il doppio dell'altro, e si combinino (insieme) in 7 per ottenere il divisore; poi si moltiplichi ciascuno per la tassa [1, 2, 4 rispettivamente per 111] per ottenere i dividendi; si ottiene uno ogni volta che il dividendo si adatta al divisore [è un modo per dire che eseguendo la divisione dei dividendi per il divisore 7 si ottiene uno se sono uguali, per cui in generale si ottiene un numero intero di unità di pagamento più eventualmente dei resti] il rapporto tra quanto ciascuno paga e la frazione del totale spettante a ciascuno deve essere 1; 15 soldi e 6/7 = 111/7 , 31 soldi e 5 parti = 111 x 2 : 7 ecc.]"

È un problema assai elementare, ma è risolto esattamente impiegando interi e frazioni proprie.

Calcolo di una quantità iniziale di una progressione sapendo la somma dei suoi termini. Una donna abile a tessere raddoppia la sua [produzione ogni] giorno. In cinque giorni produce cinque *chí*.” Domanda: nel giorno in cui iniziò a tessere e nei giorni successivi, quanto [è stato prodotto] in ciascun giorno? Risposta: All'inizio ha tessuto 1 *cùn* e 38/62 *cùn*; poi 3 *cùn* e 14/62 *cùn*; poi 6 *cùn* e 28/62 *cùn*; poi 1 *chí* 2 *cùn* e 56/62 *cùn*; poi 2 *chí* 5 *cùn* e 50/62 *cùn*. [1 *chí* contiene 10 *cùn*] Metodo: sommare 2, 4, 8, 16, 32 per formare il divisore; moltiplicarli per 5 *chí* da un lato, ciascuno per formare il proprio dividendo; ottenere un *chí* per [ogni volta che] il dividendo contiene il divisore; ciò che non riempie un *chí*, moltiplicarlo per 10; [contare] 1 *cùn* per [ogni volta che il risultato] contiene il divisore; per ciò che non riempie un *cùn*, indicare la parte usando il divisore.”

Si calcolano i ‘dividendi’ $2 \cdot 5$, $4 \cdot 5$… e si dividono ciascuno per 62; alcuni dividendi ($16 \cdot 5$...) “contengono” il divisore 62, e dalla divisione otteniamo il quoziente di uno o più *chí.* Se il dividendo non “contiene” il divisore, cioè se è minore di 62, lo si moltiplica per 10, in modo da ricondursi al caso precedente. Si procede allo stesso modo, ottenendo quozienti in *cùn* e i resti finali sono lasciati come frazioni di *cùn.*

Per il primo giorno, moltiplichiamo 10 ($2 \cdot 5$) ancora per 10, dividiamo 100 per 62, otteniamo $1 + \frac{38}{62}$ *cùn*. Per il quinto, si divide il dividendo 160 per 62, ottenendo $2 + \frac{36}{62}$ *chìn* =

2 *chìn* $+ \dfrac{360}{62}$ *cùn* $= 2$ *chìn* , 5 *cùn* e $\dfrac{50}{62}$ *cùn.* Il sistema delle misure è decimale, ma il calcolo ha struttura frazionaria.

*Calcolo (sbagliato) di produzione di un manufatto. "*Ci sono 3 donne; la più anziana tesse 50 *chí* in 1 giorno; quella di mezzo tesse 50 *chí* in 2 giorni; la più giovane tesse 50 *chí* in 3 giorni. Ora la loro tessitura produce 50 *chí*. Domanda: quanti *chí* produce ciascuna? Il risultato: la più anziana produce 25 *chí*; quella di mezzo produce 16 *chí* e 12/18 *chí*; la più giovane produce 8 *chí* e 6/18 *chí*. Metodo: imposta 1; imposta 2; imposta 3; poi ciascuna contribuisca quanto necessario per formare il divisore. Poi moltiplica per 10 e per 5 per ottenere i dividendi; un *chí* risulta da [ogni volta che i dividendi] si adattano al divisore; per ciò che non riempie un *chí*, designa le parti secondo il divisore. 3 è il dividendo per la più anziana; 2 è [il dividendo] per quella di mezzo; 1 è [il dividendo] per la più giovane."

Il metodo generale consiste nel calcolare il tempo nel quale si producono 50 *chí* , e poi – in base alle rispettive produttività – trovare quanto ciascuna produce. In tre giorni, si produrrebbero $150 + 75 + 50 = 275$ *chí* ; il tempo in cui si producono 50 *chí* si trova in giorni dalla proporzione $275 : 3 = 50 : x \rightarrow x = \dfrac{6}{11}$. Le singole produzioni sono $\dfrac{300}{11}$, $\dfrac{150}{11}$, $\dfrac{100}{11}$ *chí.*

L'errore è di tipo logico; il redattore ha pensato che le relative produzioni fossero proporzionali a 3 , 2 , 1 , che invece riguarda i tempi in cui le lavoranti eseguono lo stesso lavoro, senza accorgersi che lo sono secondo la successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ delle velocità di esecuzione (rapporti tra quantità prodotte e unità di tempo) e quindi della quantità prodotta nello stesso tempo.

Dati due lavori che richiedono tempi diversi noti, in quanto tempo si eseguono entrambi. "Un uomo in 1 giorno fa 30 frecce; ne impenna 20. Ora si desidera istruire lo stesso uomo a fare frecce e impennarle. In un giorno, quante ne fa? Risposta: ne fa 12. Metodo: somma le frecce e l'impennarle per ottenere il divisore; prendi le frecce e l'impennare moltiplicati tra loro per ottenere il dividendo."

La risposta è $\frac{30 \cdot 20}{30+20} = \frac{600}{50} = 12$. Il ragionamento sottinteso è che il tempo per lavorare completamente una freccia è $\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12}$ del giorno, quindi le frecce completamente lavorate sono 12.

Calcolare una quantità iniziale diminuita un certo numero di volte secondo un rapporto costante sapendo quanto ne è rimasto. "Un uomo sta trasportando grano sgusciato - non sappiamo quanto - mentre passa attraverso tre posti di dogana. [Ogni] posto prende una tassa di una parte su tre [di quanto transita]. Dopo aver passato l'ultimo posto gli rimane un *dǒu* di grano sgusciato. Domanda: quando ha iniziato il viaggio, quanto grano sgusciato stava trasportando? Risultato: Il grano sgusciato che aveva portato era 3 *dǒu* 3 *shēng* e ¾. [1 *dǒu* = 10 *shēng*] Metodo: Parti da uno, e raddoppialo tre volte per ottenere il divisore. Poi metti da parte un *dǒu* di grano sgusciato e moltiplicalo per 3. Ancora un a volta moltiplicalo per 3 e (moltiplica per) il numero di passaggi per ottenere il dividendo."

La soluzione proposta richiede più abilità logica che aritmetica, ed è il metodo più rapido per giungere al risultato. Ad ogni passaggio di dogana si versa un terzo di quanto si trasporta, quindi restano due terzi del carico; alla fine, $\frac{8}{27}$, che in questo caso è 1 *dǒu*. Il carico iniziale era quindi $\frac{27}{8}$ *dǒu*, cioè 3 *dǒu* + $\frac{30}{8}$ *shēng* e infine 3 *dǒu* 3 *shēng* e $\frac{3}{4}$, in accordo col testo. Si può notare come il redattore abbia subito qualificato 8 come il divisore e 27 come dividendo, chiaramente sapendo che il carico iniziale era il reciproco della sua frazione rimasta dopo tutti i pagamenti.

Problemi dell'eccedenza e deficit. "Nel dividere contanti, se (ogni) persona (riceve) 2 allora l'eccedenza [la somma non distribuita] è 3. Se (ogni) persona (riceve) 3 allora il deficit è 2. Domanda: quante persone e quanti contanti? Risultato: 5 persone e 13 contanti. Si moltiplichino l'eccesso e il deficit reciprocamente per i numeratori per fare il dividendo. Si sommino i denominatori per fare il divisore. In ogni caso moltiplica il numeratore dell'eccedenza o del deficit reciprocamente per i denominatori e imposta ciascuno separatamente; riduci il numeratore maggiore sottraendo il numeratore minore; il resto diventi il divisore; (che il deficit diventi il dividendo)." Il metodo proposto è tutt'altro che chiaro e forse incompleto. Con i numeri dati non ci sarebbe nessuna necessità di fare tanti calcoli; è evidente che aumentando il numero della somma spettante al singolo di una unità si abbassa di cinque unità la rimanenza passando a un *deficit*, quindi le persone sono cinque e la somma totale è $2 \cdot 5 + 3 = 3 \cdot 5 - 2 = 13$ in unità di conto. Generalizzando, se distribuendo fra a persone una certa somma resta una eccedenza c, e ripartendola tra b si genera un *deficit* d, il numero x delle persone sarà $x = \frac{c+d}{b-a}$. Più difficile è comprendere il senso di alcuni passaggi. "L'eccesso e il deficit moltiplichino reciprocamente i numeratori per fare il dividendo" si riferisce al calcolo della somma da distribuire. Se si imposta il sistema (S1)

$$\begin{gathered} ax+c=y \\ bx-d=y \end{gathered}$$

nel quale x è il numero delle persone, e y la somma messa a disposizione, si trova $y = \frac{bc+ad}{b-a}$; il numeratore sarebbe il "dividendo", a e b i "numeratori", ma non è chiaro da dove derivi questo procedimento. "Riduci il numeratore maggiore sottraendo il numeratore minore" sembra riferirsi alla differenza $b - a$. "Si moltiplichino reciprocamente l'eccesso e il deficit per i numeratori per fare il dividendo. Si sommino i denominatori per fare il divisore" indicherebbe che la soluzione passi per la frazione $\frac{ad+bc}{b+d}$ che nel nostro caso vale $\frac{13}{5}$, dove il numeratore e il denominatore sono rispettivamente la somma totale e il numero delle persone, così come intende *Cullen*, p. 81. Questa interpretazione, se pure corrisponde al testo, non è soddisfacente dal punto di vista algebrico; il problema contiene due incognite e la soluzione non è una frazione, ma una coppia di numeri razionali. Allora i termini 'numeratore' e 'denominatore' andrebbero, almeno in questo caso e in casi simili, intesi come elementi di una coppia ordinata; in particolare, 'numeratore' starebbe per moltiplicatore o meglio coefficiente (i numeratori moltiplicano il numero incognito di persone) e "denominatore" indicherebbe uno dei termini noti nel sistema S1. Che l'autore del *Suàn Shù Shū* abbia risolto un sistema di due equazioni lineari in due incognite o, più semplicemente e ragionevolmente, abbia impostato e risolto l'equazione

$$ax + c = bx - d$$

il che giustifica il risultato del numero delle persone sarebbe logico (dal punto di vista algebrico); forse, per la somma y, dall'equazione ha ricavato $b(ax + c) - a(bx - d) = (b - a)\,y$ $\rightarrow y = \dfrac{ac+bd}{b-a}$. Si tratterebbe comunque di algebra con l'utilizzo di incognite, ma è alquanto improbabile.

L'applicazione dell'algebra non è da escludere *a priori* quando consente di ricostruire un procedimento che conduce allo stesso risultato di quello che ci viene presentato, ma presenta una grave difficoltà in quanto presuppone che alcuni millenni fa fossero in possesso degli strumenti concettuali oggi insegnati e utilizzati ordinariamente. La stessa riserva si deve applicare all''algebra' dei Babilonesi. In linea di principio, si devono cercare metodi risolutivi aritmetici che non si appoggino all'algebra, anche se è possibile che ciò che si scopre sia equivalente alle procedure attualmente in uso.

Lo stesso metodo è applicato in un problema di *calcolo di aree*: "C'è un campo di un *mǔ*: quanto misura in *bù* al quadrato? Risposta: misura 15 *bù* e 15/31 *bù* al quadrato. Metodo: se misura 15 *bù* al quadrato manca di 15 *bù*; se misura 16 *bù* al quadrato c'è un residuo di 16 *bù*. Risposta: combina l'eccesso e il deficit per ottenere il divisore; moltiplica il numeratore del deficit per il denominatore dell'eccesso, e il numeratore dell'eccesso per il denominatore del *deficit*; combina per ottenere il dividendo. Inverti questo procedimento come nel metodo per rivelare la larghezza." I numeratori sono 15 e 16, il divisore è la loro somma 31, il dividendo è il prodotto incrociato di numeratori ed eccedenze o *deficit* che vale $15 \cdot 16 + 16 \cdot 15 = 480$, il risultato è $\frac{480}{31} = 15 + \frac{15}{31}$ *bù* quadrati.

Le soluzioni proposte in questo testo passano attraverso calcoli con frazioni, eseguiti con metodi equivalenti ai nostri. Tuttavia, generalmente viene esposto l'algoritmo applicato, e non il ragionamento su cui si basa. Più che un vero testo di matematica, il *Suàn Shù Shū* è una raccolta di problemi pratici in funzione dell'apprendimento di una tecnica basata su dividendi e divisori. È quindi impossibile, solo in base a questo testo, stabilire quale fosse il grado raggiunto dalla matematica cinese durante le dinastie *Qin* e *Han*.

I commenti ai *Nove capitoli sull'arte matematica,* un trattato di autore ignoto databile ai primi secoli d.C. che raccoglie i risultati raggiunti nei secoli precedenti compresi i procedimenti illustrati nel *Suàn Shù Shū*, dovrebbero offrire una spiegazione al riguardo assai più credibile. In realtà anche i *Nove capitoli* si limitano ad esporre i procedimenti applicati senza giustificarli; nel nostro caso la spiegazione si trova nel *Commento* di Liú Huī (263 d.C.), cui si deve tra l'altro una prova del teorema di Pitagora.

Consideriamo il seguente problema dei *Nove capitoli*, affine a quello prima esaminato: "Ora c'è un caso di acquisto comune di un bue. Se (ogni gruppo di) 7 famiglie versa 190, mancano 330 [unità di conto]; se (ogni gruppo di) 9 famiglie contribuisce con 270, l'eccedenza è di 30. Domanda: quante sono le famiglie e qual è il prezzo del bue? Risposta: 126 famiglie; il prezzo del bue è 3750". Subito dopo [CULLEN p. 83], viene proposta la seguente procedura illustrata da Liù:

"Il metodo dell'eccesso e del difetto dice: Stabilire le tariffe di pagamento; l'eccesso e il difetto sono posti sotto ciascuna di esse; moltiplicare diagonalmente le tariffe di pagamento; combinare le tariffe ottenute per formare il dividendo; combinare l'eccesso e il difetto per formare il divisore; contare 1 per ogni volta che il dividendo ospita il divisore." Posto che a b c d siano nell'ordine le tariffe (i versamenti per ogni gruppo famigliare, 190 e 270 in unità non precisate), la quantità mancante e quella eccedente, si redige la tabella

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

che forse definisce i termini della riga superiore ‘numeratori’ e quelli inferiori ‘denominatori’. Il divisore è dato da $c + d$, per cui si dovrebbe applicare la formula generale per calcolare il numero delle famiglie e la somma totale:

$$\frac{ad+bc}{c+d}$$

È evidente che tale formula non serve a risolvere l’ultimo problema, come si vede già dal testo, dove si parla di raggruppamenti di 7 e 9 famiglie. Senza utilizzare questi dati non si può calcolare il numero delle famiglie; il risultato presentato è corretto, e lo otteniamo agevolmente assumendo come incognita il numero delle famiglie x :

$$190\,\frac{x}{7} + 330 \;=\; 270\,\frac{x}{9} - 30\,,$$

la cui soluzione è proprio 126. Anche un altro metodo proposto subito dopo non è applicabile. In realtà si direbbe che non venisse impiegato un metodo universale per tutti i problemi con due incognite, il che già di per sé escluderebbe che procedessero per via algebrica. Più oltre però troviamo una procedura di *falsa posizione* che potrebbe essere applicabile al nostro caso: si basa sull’idea di eliminare i termini noti, cioè l’eccedenza e il *deficit*, moltiplicando ciascuna delle due equazioni del sistema (i *Nove capitoli* ovviamente non si esprimono in questo modo) per il termine noto dell’altra, ottenendo un dividendo $ad + bc$ e un divisore $b + c$ in accordo con i risultati già trovati. Il primo fornisce una somma totale, il secondo il numero dei contribuenti. Il procedimento giustifica la soluzione proposta dal *Suàn Shù Shū* del problema relativo al sistema S1 (*vedi*), non il problema dell'acquisto del bue.

Il metodo illustrato impiega combinazioni lineari, ed è in queste che va cercata la sua giustificazione. Supponiamo che

$ax + m = s$ e $bx - n = s$; moltiplichiamo la prima per n e la seconda per m , e sommiamo membro a membro. Si cancellano i termini noti e si ottiene $(na + mb)\,x = (m + n)\,s$, da cui possiamo dedurre che la quantità incognita x sia *non* uguale alla somma dei termini noti (il 'divisore') ma ad esso proporzionale. Allo stesso modo, l'altra quantità s è proporzionale al 'dividendo' $na + mb$.

Il seguente quesito sul *prezzo di una stoffa* è un'applicazione dell'equivalenza tra aree: "Una striscia di seta è larga 22 *cùn* e lunga 10 *cùn*. Il suo prezzo è di 23 *cash*. Ora si desidera acquistare un taglio lungo 3 *cùn* in larghezza e 60 *cùn* in lunghezza. Domanda: quanti *cùn* totali e qual è il prezzo in *cash* - quanto ciascuno? Risposta: 8 *cùn* e 2/11 *cùn*; il prezzo è di 18 *cash* e 9/11 *cash*. Metodo: prendere 22 *cùn* come divisore; prendere la larghezza e la lunghezza [3 e 60 *cùn*] moltiplicate tra loro come dividendo; ottenere 1 *cùn* [per ogni volta che il dividendo] contiene il divisore. Procedere prendendo il numero di *cùn* in un *chí* come divisore [cioè 10]; moltiplicare il numero di *cash* nel prezzo di 1 *chí* per il numero di *cùn* ottenuto [sopra] per ottenere il dividendo. Ottenere 1 *cash* [per ogni volta] che il dividendo contiene il divisore.”

La prima domanda è trovare la lunghezza del pezzo di stoffa largo 22 *cùn* grande quanto un rettangolo di lati 3 e 60 *cùn*; questo perché secondo il regolamento in vigore all’epoca *Han* le misure delle stoffe dovevano riferirsi ad una larghezza di 22 *cùn*, per cui si divide 180 per 22 e si ottiene 8 col resto di 4, ovvero $8\ \textit{cùn} + \frac{2}{11}\ \textit{cùn}$. La risposta alla seconda si ottiene moltiplicando questo risultato (in *chí*) per il prezzo di 1 *chí,* cioè 23 *cash*.

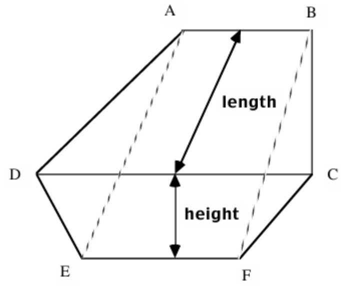
*Correzione di un’imposta. “*C'è una tassa su un campo di 24 *bù*. 8 *bù* producono [cioè pagano] 1 *dǒu*. La tassa è di 3 *dǒu*. Ora per errore è stata calcolata a 3 *dǒu* 1 *shēng*. Domanda: quanti *bù* rendono un *dǒu* secondo questo calcolo? Risultato: 7 *bù* 23/31 *bù* producono 1 *dǒu*. Metodo: si prende 3 *dǒu* 1 *shēng* come divisore; si moltiplicano per 10 la tassa e il campo; si adatta (il campo) al divisore per ottenere 1 *bù.*”

Si tratta di un problema di proporzionalità inversa. Il testo suggerisce una soluzione immediata, senza passare attraverso la proporzione: moltiplicare per 10 tassa e campo, e dividere il secondo per quella, ottenendo $\frac{240}{31}\ \frac{\textit{bù}}{\textit{dǒu}} = 7\ \textit{bù} + \frac{23}{31}\ \textit{bù}$ per ogni *dǒu* versato. La traduzione dall’Inglese alla fine parla di “adattare il campo al divisore (31 *dǒu*) per ottenere 1 *bù*”, ma questo ‘adattamento’ non sembra essere altro che una normale divisione, dove si ottiene quanti *bù* corrispondono a 1 *dǒu.*

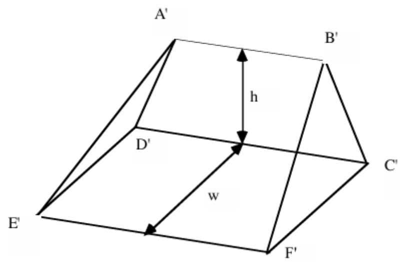
*Calcolo di radice quadrata. "*C'è un campo di un *mǔ*: quanto è quadrato in *bù*? Risposta: è quadrato 15 *bù* e 15/31 *bù*. Metodo: Se è quadrato 15 *bù* è in difetto di 15 *bù*; se è quadrato 16 *bù* c'è un avanzo di 16 *bù*. Risposta: combina l'eccesso e il difetto per fare il divisore; moltiplica il numeratore del difetto per il denominatore dell'eccesso, e il numeratore dell'eccesso per il denominatore del difetto; combina per fare il dividendo. Inverti questo come nel metodo per rivelare la larghezza."

" *bù"* e " *mǔ*" sono unità di superficie, e 1 *mǔ* equivale a 240 *mǔ.* Il metodo utilizzato è quello della 'falsa posizione' già abbondantemente visto negli esempi precedenti. Come in questi, si fa la somma dei prodotti incrociati $15 \cdot 16 + 16 \cdot 15 = 480$ e si divide per $16 + 15 = 31$, ottenendo 15 *bù* $+ \dfrac{15}{31}$ *bù.* Il risultato è abbastanza preciso, dato che al quadrato $\dfrac{480}{31}$ fa ca. 239,75026, con una differenza da 240 di una parte su mille. In generale, date due approssimazioni a e b di $\sqrt{q}$ tali che $a^2 = q - c$ e $b^2 = q + d$, la radice approssimata sarà data da $\dfrac{ad+bc}{c+d}$, la formula buona per tutti gli usi. Calcoliamo la radice di 30; poniamo $a = 5$ e $b = 6$, due approssimazioni assai grossolane. Il risultato è $\dfrac{60}{11}$ il quadrato, 29,752066... differisce da 30 di una parte su quaranta. Il quadrato della media aritmetica $\frac{11}{2}$, $\frac{121}{4}$, differisce da 30 per $\frac{1}{4}$, cioè per meno di una parte su cento. Per quanto riguarda il problema visto prima, la media aritmetica 15,5 al quadrato fa 240,25, con una precisione uguale a quella del metodo della falsa posizione. Nel caso di $\sqrt{2}$, partendo da 1,4 e 1,5, troviamo $\frac{41}{29}$ = 1,413793... contro il valore di $\frac{17}{12}$ = 1,416666... dato dalla media aritmetica di $\frac{3}{2}$ e $\frac{4}{3}$, mentre il valore reale è 1,414213… quindi l'approssimazione del *Suàn Shù Shū* è migliore.

Geometria solida. Il carattere della geometria solida del *Suàn Shù Shū* e dei *Nove capitoli* è affatto diverso da quella greca. Quest'ultima venne ordinata secondo criteri di simmetria, come si vede dai poliedri regolari (tutti gli elementi, facce, diedri, angoloidi sono uguali), mentre quella tratta figure derivate modificando solidi dalle facce reciprocamente perpendicolari, come cubi, parallelepipedi, cuboidi, metà di un cuboide ecc., con relative formule per il calcolo dei volumi. Il *yán chú* è un solido di cinque facce, delle quali due sono trapezi perpendicolari CDEF e ABCD, la terza un trapezio AEFB, le altre i triangoli ADE e BCF.



Era noto come calcolarne il volume; il già citato *Liú Huī* il *yán chú* descrisse come scomporre il solido in parti elementari di volume noto. Alcuni problemi riguardano volumi di capannoni ecc.:



Cerchio e quadrato. Un problema chiede il volume di un tronco di cono date le circonferenze delle basi C e c e l'altezza h. La formula implicita nel procedimento illustrato è

$$V = \frac{h}{36}\left(C^2 + C \cdot c + c^2\right)$$

Sappiamo quindi che i Cinesi dell'epoca *Han* conoscevano le formule per il calcolo del tronco di cono, del cono e – si direbbe – della piramide ecc.; unita a quanto già visto possiamo dedurre che avessero una più che discreta conoscenza della geometria solida, e dell'uso delle proporzioni (il calcolo del volume del tronco di cono presuppone che il rapporto tra la parte di cono tagliata da un piano parallelo alla base e il cono intero sia uguale al cubo del rapporto tra le rispettive altezze). Non solo; la struttura della formula – data la dipendenza dei volumi dal cubo delle rispettive altezze – è quella del polinomio in due variabili che compare nella scomposizione della differenza di cubi: $b^3 - a^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Prima della compilazione del *Suàn Shù Shū* i matematici cinesi avevano trovato non solo la corretta relazione tra volume di un solido e le sue dimensioni lineari nel caso di coni, piramidi ecc. (il volume del cono è riducibile a quello della piramide), ma in qualche modo sapevano ridurre le differenze di cubi a prodotti di polinomi. Verosimilmente il metodo era quello di decomposizione, se vogliamo evitare l'impiego del calcolo letterale. Stabilito questo, la formula lascia perplessi, perché sembra implicare una buona padronanza della geometria solida insieme ad una geometria del cerchio assai grossolana. Confrontiamo la formula del *Suàn Shù Shū* con quella in uso oggi:

$$\frac{h}{36}(C^2 + C \cdot c + c^2) \quad \text{vs.} \quad \frac{h}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)$$

da cui troviamo che il quadrato della circonferenza equivale a dodici volte π per il quadrato del suo raggio, da cui troviamo che la circonferenza è sei volte il raggio, e $\pi = 3$. Infatti, sostituendo in entrambe le formule:

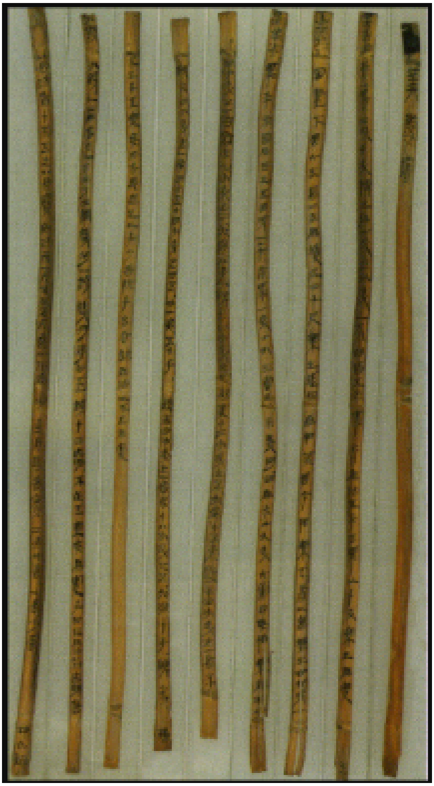
$$\frac{h}{36}\,36\,(R^2 + Rr + r^2) = \frac{h}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2) \rightarrow \pi = 3\,.$$

Questo valore di π è confermato dal calcolo del volume di un cilindro: “La circonferenza viene moltiplicata per se stessa; moltiplicala per l'altezza; prendi 1 su 12.”, cioè, assumendo che la circonferenza sia $2\pi R$, $4\pi^2R^2 = 12\cdot\pi R^2$ ecc.

Il contrasto tra un’approssimazione tanto scadente e tutto il resto del *Suàn Shù Shū* è stridente, almeno dal punto di vista di un matematico occidentale, e vale la pena cercarne una giustificazione. Che il rapporto tra circonferenza e diametro sia maggiore di tre, sia pure di poco, si vede subito inscrivendo un esagono regolare in un cerchio. È lecito chiedersi se non sia mai venuto in mente di confrontare la circonferenza con i poligoni in essa inscritti, o di tentare con qualche metodo di sovrapposizione; si confronti con il *Baudhayana.* Forse si riteneva 3 un’approssimazione sufficiente a fini pratici, e la matematica del *Suàn Shù Shū* è puramente applicativa, ma abbiamo visto che le applicazioni si basano su buona conoscenza di calcolo frazionario, geometria solida, capacità di analisi. Si può pensare che un errore relativo di una parte e mezza su trenta, tra quattro e cinque su cento, non fosse ritenuto così significativo da esigere – in uno specifico problema – una valutazione più precisa di π , ma questa ipotesi non convince: le soluzioni proposte negli altri problemi esaminati sono precise. E poi non è proprio un errore tanto piccolo. Una soluzione radicale è che almeno fino all’epoca *Han* compresa i matematici cinesi non sapessero come approssimare al meglio π . La ragione potrebbe essere che avessero esaminato solo le figure che si trattano in architettura, cioè rettilinee, piane o solide. In una prospettiva di estrema praticità, potrebbe forse darsi che semplicemente abbiano ritenuto il calcolo del rapporto tra circonferenza e raggio fuori dalla portata della geometria, a causa della natura non omogenea delle figure rettilinee e curvilinee, e non abbiano sentito l'esigenza di perfezionare il valore attribuito a π . Benché stranissima e del tutto incompatibile con la *forma mentis* occidentale, è difficile trovare una ragione plausibile diversa da questa.

Che vi sia qualche seria difficoltà nel comprendere come il *Suàn Shù Shū* tratti rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio emerge da due problemi tuttora non ben compresi [CULLEN 2004, p. 103]. Anche più problematica è la procedura indicata nei *Nove Capitoli* per calcolare un lato di un rettangolo equivalente ad un cerchio di diametro dato (almeno, questo sembra essere il significato del quesito; non sarei certo, data la soluzione, che il testo sia stato correttamente inteso): "moltiplica il diametro 2 *chí* 5 *cùn* per se stesso; riducilo di 7 *cùn* moltiplicato per se stesso; quanto al resto, riducilo aprendo il quadrato (cioè trova la radice quadrata), e quella sarà la larghezza." Il quadrato del diametro sarebbe uguale al quadrato dell'area del rettangolo; non ha senso. Forse, si intende che il lato incognito sia la radice quadrata della differenza tra il quadrato del diametro e quello del lato assegnato, cioè il diametro del cerchio sarebbe uguale alla diagonale del rettangolo. Allora il quesito andrebbe inteso come segue: "dato il lato di un rettangolo inscritto in un cerchio di diametro noto, calcola l'altro suo lato"; non sembra però corrispondere alla lettera del testo.

L'ultima parte, con molte sezioni mancanti, tratta di lunghezze e aree con numeri misti.



Strisce di bambù contenenti il testo del *Suàn Shù Shū.*
1-s2.0-S0315086005001084-gr002.jpg , da
The Suàn shù shū, ScienceDirect

Due cose stupiscono del metodo utilizzato nel *Suàn Shù Shū*: la (apparente) stranezza della formula proposta, in particolare l'evidente somiglianza con quella utilizzata per risolvere problemi di tutt'altro genere, e il fatto che il risultato ottenuto sia molto, molto vicino a quello corretto dopo un solo passo seguente alla scelta delle approssimazioni per eccesso e per difetto della radice cercata, almeno nel caso in cui quella scelta per difetto, diciamo a, sia la maggiore tra tutte le prime approssimazioni per difetto, e quella per eccesso, diciamo b, sia la minore tra tutte quelle per eccesso. Ma prima di esaminare questo aspetto di sorprendente efficacia è opportuno analizzare la formula proposta (F5):

$$x = \frac{ad+bc}{c+d}$$

dove (v. cap. prec.) x è la radice cercata, a e b hanno il significato visto prima, c e d sono le rispettive differenze prese in valore assoluto tra il numero q del quale si cerca la radice quadrata e i quadrati delle prime approssimazioni a e b.

Ad un primo sguardo, non si capisce da dove questa formula possa derivare. *Sembra* una media 'pesata in senso inverso' tra c e d, nel senso che i 'pesi' al numeratore sono scambiati rispetto a c e d (c è la differenza tra q e a^2 ma è moltiplicato per b). Inoltre, è una media tra i valori assoluti delle differenze tra q e i quadrati delle prime approssimazioni, non tra queste. Si direbbe che una qualche media tra a e b sia la via principale per giungere ad una approssimazione utile della radice quadrata cercata, e non il calcolo del *Suàn Shù Shū.*

La soluzione più semplice è ammettere che i matematici cinesi non fossero giunti a F5 mediante passaggi ‘logici’ nel senso in cui i matematici di oggi intenderebbero questo termine, e neppure in un senso ‘euclideo’, vale a dire per premesse e conseguenze. Il processo potrebbe essere del tipo prova – verifica, ovvero euristico, forse suggerito dall’essere F5 efficace in altri campi. Non è una risposta molto soddisfacente, anzi si direbbe un *escamotage*, eppure c’è qualche motivo per non poterla respingere tanto facilmente.

Una prima osservazione, che forse è sfuggita agli studiosi (non ne sono certo, non avendo conoscenza diretta di tutta la letteratura in proposito) è che F5 è una complicazione non necessaria di una formula molto più semplice e significativa. Se si cerca una qualche logica alla base del metodo del *Suàn Shù Shū*, va trovata a partire da quest’ultima. Vi si perviene attraverso qualche passaggio algebrico:

$$\frac{ad+bc}{c+d} = \frac{a(b^2-q)+b(q-a^2)}{q-a^2+b^2-q} = \frac{(b-a)(ab+q)}{(b-a)(b+a)}$$

e, semplificando, otteniamo l’approssimazione (F6)

$$x = \frac{(ab+q)}{(b+a)}$$

che, con qualche sforzo, può essere considerata una media aritmetica tra due quantità – le due frazioni che si ottengono separando il numeratore nella somma di ab e q – la cui funzione può essere spiegata senza ricorrere a calcoli troppo complicati.

Supponiamo che $a = b$ sia la radice quadrata di q. Allora, x coincide con la radice quadrata cercata. Consideriamo

$$\frac{(x^2+q)}{(2x)} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$$

e chiediamoci come questa formula possa variare quando in luogo della radice esatta abbiamo due approssimazioni per difetto ed eccesso a e b; il passaggio naturale è sostituire a x la somma $a + b$ nel denominatore, il prodotto ab al numeratore. È chiaro che una somma tra

$$\frac{ab}{a+b} \quad \text{e} \quad \frac{q}{a+b}$$

si avvicina a una buona approssimazione alla radice quadrata di q. Possiamo rendercene conto valutando alcuni esempi numerici scelti in modo casuale.

q	x	x^2	q - x^2	%
10	22/7	9,87755	0,12245	1,2
50	106/15	49,93778	0,06222	0,12
290	596/35	299,97224	0,02776	$9{,}5\cdot10^{-3}$
343	685/37	342,75018	0,24982	0,72
624	1224/49	623,98001	0,01999	$3{,}2\cdot10^{-3}$
800	1612/57	799,79809	0,20191	0,025

9777	19479/197	9776,89301	0,10699	$1{,}1\cdot10^{-3}$

Ma quale logica abbia guidato gli antichi matematici cinesi non può essere dedotto dalle considerazioni svolte, dato che non si comprende perché una formula semplice anche se non proprio ovvia come la F6 dovesse essere sostituita da una più complicata concettualmente ed operativamente. Devono essere arrivati alla F5 per altra via, e quanto detto sopra è solo la giustificazione teorica della sua efficacia.

Liu Hui, III sec. d.C. Commentò i *Nove Capitoli dell'arte matematica*, un trattato che raccoglie i contributi di matematici cinesi tra il X e il II sec. a.C. da Wikipedia.

La simbologia legata al numero o alla figura è un argomento così vasto, e analizzabile sotto così tanti aspetti, da esigere molto di più di un capitolo per essere trattata in modo soddisfacente. Tuttavia, qualche esempio può fornire spunti interessanti riguardo alla formulazione di congetture che possono apparire azzardate, ma che sono suggestive e possono condurre a formulare collegamenti altrimenti insospettati.

Generalmente, lo studio delle relazioni tra numeri e figure simboliche conduce a interpretazioni avventate se non del tutto inconsistenti, che possono essere classificate nella migliore delle ipotesi come ‘fantasie sensate per qualcuno’, ma vale la pena esaminare qualche caso notevole. Prendiamo alcune interpretazioni fornite da *Schwaller de Lubicz*, cultore di esoterismo interessatosi all’egittologia, campo nel quale è stato per lo più ignorato, nel suo *Le miracle égyptien* (1963). Prendo dalla versione italiana (1994).

La prima connette il rapporto tra circonferenza e diametro (simbolo π) all’architettura egizia:

“Parlando dell’Unità assoluta, abbiamo detto che essa rappresenta l’essenza della forma perfetta, il Cerchio… Così avete assistito alla nascita *occulta*, non matematica, del Numero che è la chiave, la *porta*… raffigurata con due pilastri congiunti in alto da una terza trave, l’architrave, che ci ricorda anche i Dolmen. Il simbolo geroglifico che designa la ‘*porta*’ si legge *sba*, che significa anche “*stella*” e “insegnamento”… [nell’architettura faraonica] la Porta offre le Leggi fondamentali delle funzioni che verranno sviluppate all'interno del Tempio o del Santuario in cui questa porta ci introduce… Uno dei termini utilizzati nella scrittura geroglifica per designare la "Porta" deve ora attirare la nostra attenzione: si tratta del termine che si legge *rwty*... che può essere interpretato come "porta", "*entrata*" o "*periferia*". Ora, per una strana coincidenza, il simbolo faraonico della "*porta*" evoca in maniera incredibilmente netta la lettera greca "*pi*" [cioè π, o meglio la maiuscola Π), il numero irrazionale per eccellenza... [su questo punto è necessaria molta prudenza. È estremamente improbabile che tra gli antichi Egizi qualcuno si fosse accorto dell'irrazionalità di π o di qualche altro numero, e per quello che ne sappiamo nulla conferma tale ipotesi]… Ecco ora, in una tomba tebana, un uomo che corre verso il mondo dei "beati"… e questa porta ha come apertura le proporzioni 1 a $3{,}1416$ ovvero *1 a Pi.*" Questa descrizione sembra fantasiosa, nel suggerire un nesso tra 'porta' e 'periferia' [intesa, credo nelle intenzioni dell'Autore, come perimetro del cerchio] per via di π ; ma la congettura non è poi infondata. Intanto, la Grande Piramide era una tomba, e abbiamo visto che – in base alle dimensioni iniziali ad essa attribuibili – la sua profondità è $\frac{22}{7}$ dell'altezza, un'ottima approssimazione di π . Non solo; pare che questa approssimazione fosse utilizzata dai Greci. Tra l'altro, è possibile che questa fosse stata trovata proprio dagli Egizi, e sia poi stata diffusa.

Una seconda collega la misura di distanze al triangolo rettangolo (3, 4, 5). “Agli antichi Egizi viene attribuito un modo estremamente semplice e pratico per tracciare degli angoli retti… prendere una corda divisa da nodi in dodici parti. Lasciarne una estremità [una parte a iniziare da uno dei due capi] libera per una lunghezza *Tre*; fissare con due pioli la lunghezza *Quattro.* Rimane ora libera la seconda [in realtà, la terza] parte che misura *Cinque.*

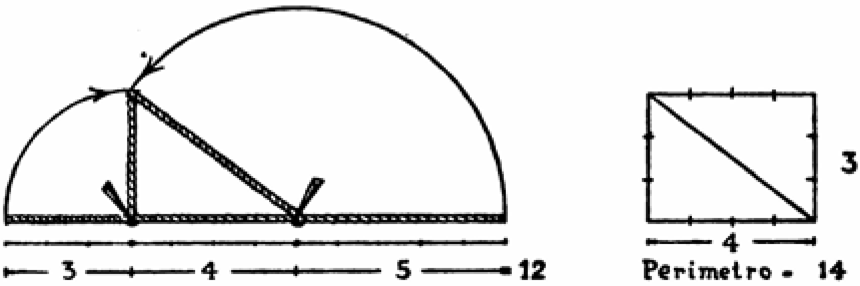


Fig. 22. *Due triangoli 3, 4, 5 riuniti formano un rettangolo, la cui superficie vale 12 e il cui perimetro vale 14.*

Ribattere i lati *Tre* e *Cinque*, che danno immancabilmente un triangolo rettangolo.” L’autore vede in questo procedimento l’applicazione del “triangolo sacro” di lati proporzionali a 3, 4, 5 , i tre numeri del circuito zodiacale, ovvero “il ciclo fondamentale formato da *tre volte quattro.*” Abbiamo visto che nel *Timeo* il triangolo rettangolo elementare o è isoscele, o è la metà del triangolo equilatero, ma la prospettiva era differente, perché orientata alla costruzione delle superfici delle figure cosmiche; se veramente per gli Egizi vi era un triangolo ‘fondamentale' ed era quello di lati proporzionali a $3, 4, 5$, dovremmo dedurre che Timeo non esponeva una cosmologia di matrice egizia. I dodici segni zodiacali sembrano piuttosto legati alla suddivisione dell'anno in mesi, la cui durata è molto vicina al ciclo lunare; più realisticamente, è più semplice utilizzare come strumento una corda tesa le cui terza e quarta parte siano multipli interi della lunghezza campione. È però vero che uno strumento del genere realizza materialmente i rapporti di cinque o sette a dodici, e i loro reciproci. È inoltre vero che l'area del rettangolo di lati tre e quattro rispetto ad una unità di misura è numericamente uguale alla somma di due lati consecutivi e della diagonale. Tuttavia, non è detto che questi calcoli aritmetici abbiano qualche importanza simbolica, anche se dobbiamo considerare che l'ottava consta di dodici semitoni ed è divisa in sette intervalli. Schwaller – de Lubicz propone anche uno strano, ma inquietante calcolo: il rettangolo di lati 3 e 4 ha perimetro 14 (rispetto ad una data unità di misura), numero dato da 3 + 1 + 4 + 1 + 5, le stesse cifre di $3{,}1415\ldots$ un'approssimazione paragonabile come precisione a $\frac{22}{7} =$ ca. $3{,}1428\ldots$ ($\pi = 3{,}14159265$). Il ragionamento aritmetico di Schwaller – de Lubicz è tutt'altro che ineccepibile, e ha il grave difetto di implicare una rappresentazione decimale molto più complessa di $3 + \frac{1}{7}$. Sembra che gli Egizi preferissero eseguire calcoli con frazioni con numeratore unitario. In questo caso, le cifre trovate scomponendo 14 dovrebbero essere risultato di una coincidenza.

Altri numeri trovati riguardano il numero aureo, $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Secondo Schwaller – de Lubicz, l'ombelico divide [idealmente] l'altezza dell'uomo in due parti, la minore delle quali (quella sopra l'ombelico) sta alla maggiore come 1 sta a φ,[48] e quindi tutta l'altezza sta alla minore come $1+\varphi$ sta a 1; $1+\varphi = \varphi^2$ trattandosi del numero aureo, quindi l'altezza è φ^2. Una buona approssimazione del numero aureo sarebbe il rapporto tra l'altezza delle facce laterali e la metà del lato di base della Grande Piramide.[*Vedi*]

La filosofia generale di Schwaller – de Lubicz è alquanto singolare, specie per quanto riguarda la sua valutazione della storia del pensiero occidentale a partire dai Greci. "Fu Pitagora il grande a trasferisce dall'Egitto in Grecia la tradizione della alta Scienza Sacra… Alcuni concetti generali furono trasmessi o diffusi e, su tali concetti generali, venne poi a costruirsi tutta la Filosofia detta "greca", divenuta in seguito la base della evoluzione del pensiero occidentale: dal triangolo rettangolo sacro venne creata la trigonometria; dai Numeri si generarono l'aritmetica, la matematica e l'astronomia; dall'Ermetismo fu co-

48 Non so dove Schwaller – de Lubicz abbia tratto questa proporzione, ma si trovano riscontri sul web. In particolare, esiste uno strumento detto *calibro aureo* facilmente costruibile, che separa una data distanza in segmenti proporzionali a 1 e al numero φ, nel modo descritto; v. p. es. Il calibro aureo – Blog di Matematica e Scienze per la costruzione dello strumento. In realtà, questo calibro approssima meccanicamente φ al rapporto $21{:}13$, in lieve difetto. Per quanto riguarda teorie egizie in proposito, v. The Cosmic Proportion Of The Human Figure - Egyptian Wisdom Center.

struita la porcheria chimica e così via;… dall'Unità furono formati l'Atomo di Democrito, il punto e il "punto in movimento", la linea di Euclide."

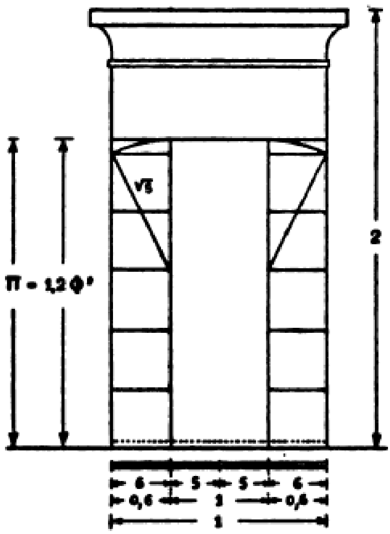


Fig. 27. *Per l'apertura della porta che vale* 1, *l'altezza dello zoccolo vale* 1,2 $\varnothing^2$ *o* Pi, *vale a dire*: 0,6 $(\sqrt{5}+3)=0{,}6\times 5{,}236=3{,}1416$. *Per la larghezza totale della porta che vale* 1, *l'altezza totale vale* 2.

Secondo Schwaller de Lubicz, gli Egizi applicarono nell'architettura un valore di $\pi = 1{,}2 \cdot \varphi^2$ dove φ è il 'numero aureo'.

L'iconografia religiosa indiana e buddhista è probabilmente il miglior esempio di sintesi di geometria e simbolismo religioso, specialmente per la valorizzazione della simmetria centrale nel piano. Qualcuno potrebbe obiettare che, nel caso del triangolo equilatero e del quadrato soprattutto, questa relazione di una figura con se stessa non sia così evidente; ma quello che la caratterizza non è la percezione immediata, che può essere guidata piuttosto dalle linee rette, dagli angoli, e molto dall'orientamento (un triangolo equilatero con un vertice in alto non appare come lo stesso con il vertice in basso) oltre che dal contesto generale, ma la forma della figura di per sé. La simmetria può non venire percepita come la caratteristica più evidente e significativa, ma definisce la figura, e determina quelle proprietà geometriche che costituiscono il valore simbolico della figura, ovvero la sua capacità di influenzare lo stato mentale dell'osservatore. Ovviamente questo non è determinato solo dall'aspetto geometrico che, come già detto, non è ciò che immediatamente è percepito, ma che coopera in qualche misura alla percezione. In un certo senso, la simmetria è un suggeritore silente. Si provi a modificare i rapporti tra gli elementi di una figura, e si veda se quella può continuare così modificata a mantenere il suo significato, la sua efficacia.

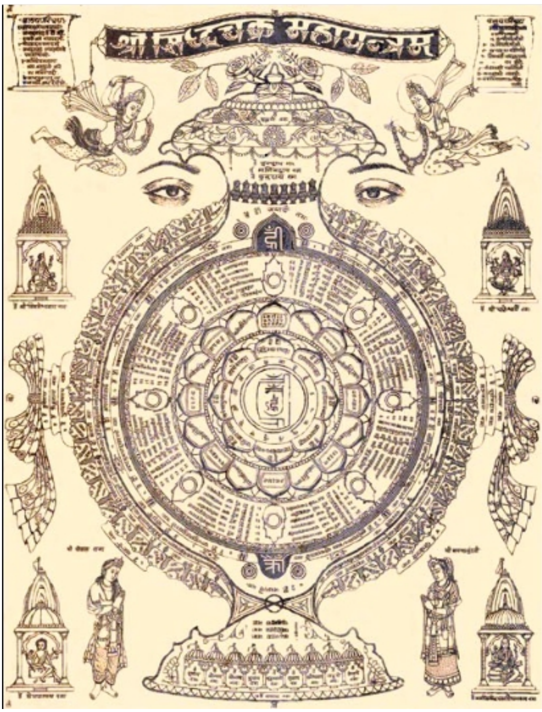
Tutti i poligoni regolari hanno diversi elementi di simmetria. Nel caso di un triangolo equilatero, quella assiale (verticale, in generale) si sovrappone all'orientamento, e quella centrale è forse meno percepita di altri rapporti come l'uguaglianza di lati e angoli; ma la simmetria centrale, percepita o meno come elemento della figura, è sia nella convergenza nello stesso punto di tutti e quattro i punti notevoli di un triangolo, sia nel fatto che ogni triangolo – come ogni poligono regolare – è inscrivibile in un cerchio, e circoscrivibile ad un altro cerchio concentrico al primo nel caso in cui il poligono sia regolare. La simmetria può non essere notata come elemento in sé, ma basta modificare la figura per rendersi conto della sua assenza; la sua importanza si vede quando non c'è. In particolare, la simmetria centrale (l'incrociarsi di tutti gli assi e di tutte le bisettrici nello stesso punto, centro delle circonferenze inscritta e circoscritta) è l'origine dell'armonia, dell'equilibrio della figura.

Nello sviluppo della geometria, sia greca sia non ellenica, non si è data molta importanza alla simmetria. Questa affermazione può sembrare avventata, ma: 1) la gran parte della geometria affronta e risolve problemi non legati alla simmetria. Il teorema di Pitagora, le equivalenze, la similitudine, i teoremi sulla circonferenza, molti teoremi di geometria solida non la implicano direttamente; 2) anche quando si tratta di poligoni o poliedri regolari, non sono principalmente le relazioni di simmetria ad orientare l'indagine matematica. La stessa costruzione dei poligoni regolari viene eseguita mediante procedure 'metriche', cioè basate sulle distanze; p. es. in quella del pentagono regolare, è essenziale costruirne il lato, o quello del decagono regolare; così per gli altri, a partire dal triangolo. Lo stesso vale per i poliedri. Le proprietà di simmetria non sono scindibili dal risultato della costruzione, ma questa ha di solito uno svolgimento che non la presuppone.

A parte il cerchio, i poligoni citati nei simboli religiosi sono triangoli equilateri, quadrati, ottagoni; anche esagoni, più raramente pentagoni, o poligoni con sedici lati.

Nell'induismo e nel buddhismo le figure geometriche aventi valenza rituale o sacra sono gli *yantra*, utilizzati per la meditazione e pratiche spirituali. Storicamente, gli *yantra* avrebbero le loro lontane origini nei testi vedici; i riferimenti più antichi si troverebbero nel *Ṛgveda*, che li descrive come oggetti di meditazione e contemplazione.

I due seguenti *yantra* appartengono alla tradizione *jaina.*



La struttura geometrica di questo schema è in notevole misura fondata sul cerchio. Si possono contare molte circonferenze concentriche (il numero esatto dipende dall'osservatore; è soggettivo distinguere tra una sottile corona circolare e una circonferenza disegnata con un piccolo spessore) e, muovendosi verso l'interno, in successione, una stella ottagonale, una a sedici punte, di nuovo una ottagonale e, ancora più vicino al centro, una successione di sedici caratteri. La figura è complessivamente orientata dalla cornice rettagolare esterna. L'orientamento verticale è definito dalle numerose figure, iscrizioni, dai prolungamenti in alto e in basso del cerchio nel centro, il tutto disposto in modo da rispettare una simmetria rispetto all'asse verticale. Lo schema generale è costruito a partire da cerchio, rettangolo e ottagono. Possiamo vedere pentagoni e triangoli non rettilinei nelle forme delle punte delle figure stellate.

Il secondo (v. pag. seg.) arricchisce lo schema con una più accentuata varietà cromatica. Al motivo del cerchio, dominante nella parte centrale del precedente esempio, si sovrappone, integrandolo, quello della stella ottagonale, quella con le punte più lunghe in particolare, inscritta nel secondo cerchio (o piuttosto fascio di cerchi concentrici molto vicini tra di loro) dall'esterno. I numerosi cerchi riuniti in fasci concentrici molto ravvicinati, in numero di quattro nel caso della corona circolare mediana, solo due in quella esterna, evidenziano due corone circolari nello schema che, insieme ad una terza riempita da sedici pentagoni affiancati con le punte rivolte all'esterno,

definiscono una serie di tre circoli concentrici tra di loro equidistanziati che insieme alla corona circolare compresa tra il cerchio centrale e la più interna delle corone circolari si distinguono anche per il colore più intenso. L'orientamento della figura è definito dalle cuspidi che interrompono dividendoli in due archi uguali per ciascuno i quattro / cinque cerchi più esterni.

Rispetto al precedente esempio, questo *yantra* sembra sottolineare l'irraggiamento a partire dal centro, indebolendone però la simmetria radiale con una distribuzione non simmetrica delle aree colorate in rosso vivo. Anche in questo caso, la stella ottagonale sembra reggere tutta la costruzione, con i cerchi concentrici. Altra differenza rispetto al precedente è che la cornice è quadrata.

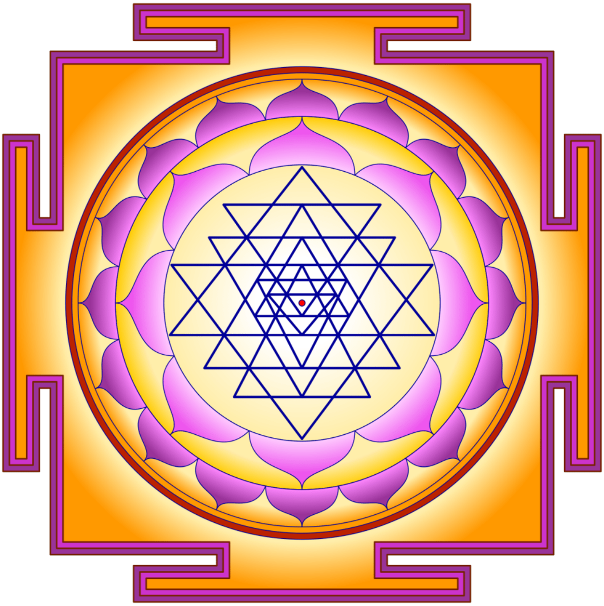
Nell'induismo, gli *yantra* sono utilizzati per scopi diversi, tra cui la stimolazione di visualizzazioni interne, o come talismani ecc.; in ambito tantrico, sostituiscono l'immagine iconografica della divinità oggetto di adorazione. Alla maggior parte delle divinità sono state assegnati simboli aniconici negli *yantra* a loro dedicati. Lo *yantra* è un simbolo dinamico della totalità del cosmo, quindi è rappresentato come una forma in espansione emanata da un punto (*bindu*). [ELIADE 1987]

Questa struttura simbolico-geometrica ha qualche relazione (non necessariamente in senso storico-cronologico; ma non è da escludere, considerando che ai Greci erano noti i *gimnosofisti* dalle conquiste di Alessandro in India) con l'idea della τετρακτύς (tetrade) come somma dei primi quattro numeri a partire da 1 compreso, e l'interpretazione per cui i quattro numeri siano le dimensioni del punto, del segmento, del triangolo (o della circonferenza, o del piano) e della sfera o dello spazio intero (per quattro punti non complanari passa una e una sola sfera). Simbolicamente, così intesa la tetrade esprimerebbe un'idea già contenuta negli *yantra*; ma anche la generazione dei numeri (triangolari, quadrati, ecc. e 'solidi') a partire dal vertice (l’unità iniziale, la monade) potrebbe essere stata una figurazione della stessa idea. Il problema è che il simbolico moltiplica i possibili significati e quindi le relazioni che si possono riconoscere tra ambiti diversi, e questi non possono essere dimostrati effettivamente sussistenti, a differenza delle relazioni di tipo matematico, che infine sono quelle che sono. La tetrade e gli *yantra* possono essere stati in rapporto diretto, o essere sviluppi della stessa intuizione, o non avere niente in comune salvo la scoperta di relazioni simboliche astratte puramente ipotetiche, suggestioni.

Il fatto è che la geometria, essendo legata all’immagine e all’immaginazione, funzione non verbale, può generare effetti attraverso la percezione di certi elementi della figura (linee e colori, e le simmetrie e direzioni) che sembrano associati ai poligoni regolari e alla circonferenza. Questo aspetto, pre-razionale e perciò stesso collegabili a forme magico-rituali, dovrebbe aver preceduto nel tempo la valenza costruttiva.

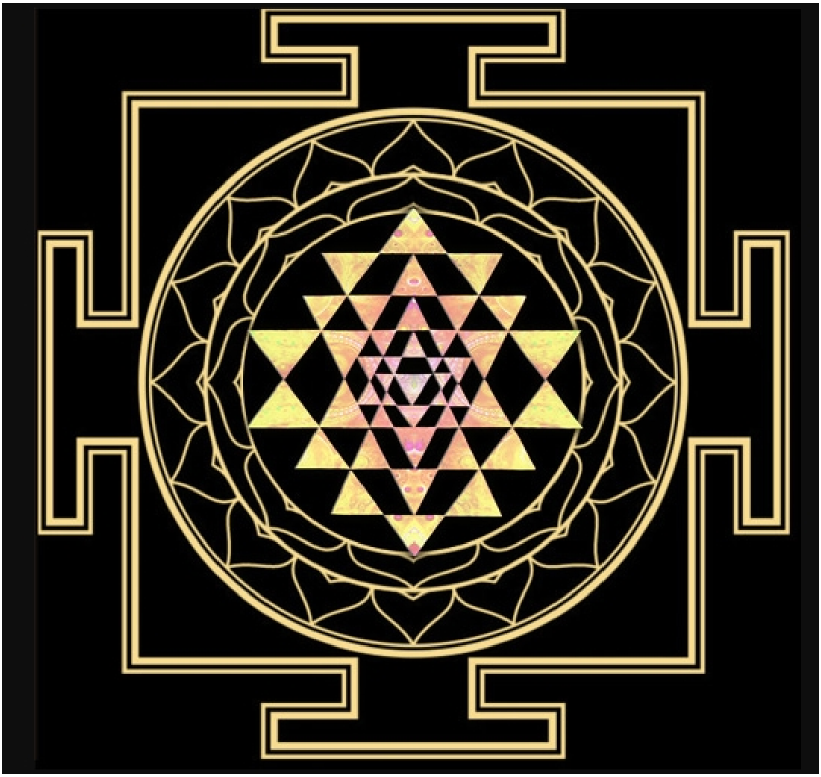
Generalmente, intorno al centro dello *yantra* sono disposte diverse forme geometriche concentriche ‘primarie’, come triangoli, esagoni, circoli, ottagoni, e anelli di petali di loto. Il contorno è un recinto quadrato con quattro sacre porte che si aprono verso i quattro punti cardinali. Gli *yantra* con proiezione verso l’esterno sono concepiti come un luogo sacro in cui risiede la divinità. Il loro significato cosmologico sta nell’irradiamento dal centro verso l’esterno e dalla serie dei cerchi concentrici nella quale si manifesta l’unità dei principi maschile e femminile nella sua discesa verso il mondo della molteplicità [ELIADE].

Forse, la forma più interessante è lo *Śrī Yantra*, diagramma mistico composto da nove triangoli intrecciati che è probabilmente una delle immagini tantriche più diffuse e conosciute.



È costituito dall'intreccio di quattro triangoli orientati verso l'alto, a rappresentare il principio maschile, impersonato da Śiva, e cinque rivolti verso il basso, che rappresentano Śakti, quindi il principio femminile. I due maggiori tra i triangoli sono inscritti nel cerchio interno e si intersecano lungo il diametro trasversale all'osservatore. Tutti i vertici appartengono al diametro verticale, che è rigorosamente l'asse di simmetria di tutta la figura, compresi i nove triangoli, e con l'eccezione dei due maggiori toccano la base di uno dei triangoli. I triangoli non sono simili tra di loro e la simmetria orizzontale non è rispettata, ma il triangolo che contiene il centro è equilatero.

Ecco un altro esempio.



Infine, un esempio di *Bhairavi Yantra*, associato a Śiva (pag. seg.), che si ispira geometricamente al doppio triangolo caratteristico del *Sigillo di Salomone*.

TESTI CITATI

AA. VV., *La nuova enciclopedia della musica*, Garzanti, Milano 1983.

ATIHYA, M. e SUTCLIFFE, P., *Polyedra in Physics, Chemistry and Geometry* 2003. arXiv:math-ph/.

BETEGH, G., *Pythagoreans, Orphism and Greek Religion*, in *A History of Pythagoreanism*, Cambridge University Press, Cambridge 2014.

BOTTAZZINI, U., FREGUGLIA, P. e TOTI RIGATELLI, L., *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze 1992.

BOYER, Carl B., *A History of Mathematics*, J. Wiley & Sons, I ed. 1968. Trad. italiana col titolo 'Storia della matematica' con prefazione di L. Lombardo Radice, Mondadori 1976, 1980.

BRETSCHNEIDER, C.C., *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides : Ein historicher Versuch* B. G. Teubner, Leipsig, 1870. Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.

BRITISH MUSEUM, *papyrus | British Museum*.

BURKERT, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, E. Minar (tr.), Harvard University Press, Cambridge (MA) 1972; 1ª ed. tedesca 1962. Walter Burkert's Lore And Science.

CALZOLANI, S., *La formula degli agrimensori – I Sumeri* e altro, Firenze 2017. formulaagrimensori.pdf.

CARMAN, C.C. e Buzón, R.P., *On the Sizes and Distances of the Sun and Moon*, Routledge, 2023. https://doi.org/10.4324/9781003184553.

CATTANEI, E., *Perché la matematica è una scienza? Spunti per una risposta in Aristotele,* in *Ordia prima* vol. 15, 2002.

CAVEING, M., *La tablette babylonienne AO 17264 du Musée du Louvre et le problème des six frères*, in *Historia Mathematica 12* (1985). La tablette babylonienne AO 17264.

CHEN MINZHEN, *Chinese antiques give new insight into history of pentagram* in *Chinese Social Science Today* 2024. Chinese antiques - CHINESE SOCIAL SCIENCES NET.

CLAGETT, M., *Ancient Egyptian Science - A Source Book. Volume Three - Ancient Egyptian Mathematics,* American Philosophical Society, Philadelphia 1999. Ancient Egyptian science.

COLLI, G., *La nascita della filosofia*, Adelphi, Milano, 1ª ed. 1975, 14ª ed. 1996.

CULLEN, C., *Astronomy and Mathematics in Ancient China : The 'Zhou Bi Suan Jing'*, Cambridge University Press 1996.

CULLEN, C., *The Suàn shù shū 'Writings on reckoning'*, Needham Research Institute, Cambridge 2004. Cullen_Nine-Chapters.pdf.

DATTA, B., *The Science of the Śulba*, Calcutta University Press, Calcutta 1932. The-Science.pdf.

DE SANTILLANA, G., *The Origins of Scientific Thought From Anaximander to Proclus,* The University of Chicago Press, 1961. Trad. it. *Le origini del pensiero scientifico*, Sansoni, Firenze 1966.

DE SANTILLANA, G., *Eudoxus and Plato – A Study in Chronology* in *Isis* 32 n. 2, 1940. Eudoxus and Plato. A Study in Chronology on JSTOR.

DONADONI, S., *Moeris*, in *Enciclopedia dell'Arte Antica* (Treccani) 1963. Moeris.

DUTTA, A. K., *Mathematics in Ancient India - 2. Diophantine Equations: The Kuttaka* in *Resonance* Vol. 7 No. 4, 2002. Mathematics in Ancient India.

ELIADE, M., *The Encyclopedia of Religion*, Macmillan, New York 1987.

FERGUSON, K., *La musica di Pitagora*, Longanesi & C., Milano 2009 (ed. speciale per *Le Scienze* 2010); tit. or. *The Music of Pyhagoras* 2008.

FERMANI, A. *Saggio introduttivo ai Topici* in *Organon,* a cura di M. Migliori, Bompiani, Milano 2016. Ed. on line Aristotele Organon.

FRACCAROLI, G. (traduttore), *Il Timeo*, Fratelli Bocca, Torino 1906.

FRANCI, R. e TOTI RIGATELLI, L., *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano 1979. Citato in Syllogismos.

FRIBERG, J., *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts* in *Notices of AMS* vol. 55 no. 9 (2008). tx080901076p.pdf.

FUNAIOLI, G., *Apollodoro di Atene*, in *Enciclopedia Italiana* (Treccani) 1929.

GIACARDI, L. e ROERO, S. C., *La matematica delle civiltà arcaiche*, Stampatori, Torino 1979.

JOHNSON, M. R., *Sources for the Philosophy of Archytas* in *Ancient Philosophy* 28, 2008. È uno studio che muove da C. Huffman, *Archytas of Tarentum: Pythagorean, Philosopher and Mathematician King,* Cambridge University Press, Cambridge 2005. Layout 1.

HEATH, T. L. (trad. della recensione di Heiberg), *The Thirteen Books of Euclid's Elements* 2ª ed. voll. I - III, Dover Publ., New York 1956. Euclid Elements Vol 1 of 3; Euclid's Elements Vol. 3

HEATH, T. L., *A History of Greek Mathematics* Vol. I, Clarendon Press, Oxford 1921. A history of Greek mathematics

HEATH, T. L., *Aristarchus of Samos – The Ancient Copernicus,* Clarendon Press, London 1913. Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus.

HELLER, A., *Why the Greeks Know so Little about Assyrian and Babylonian History*, in *Mesopotamia in the Ancient World - Proceedings of the Seventh Symposium of the Melammu Pro-*

ject (2013), Robert Rollinger and Erik van Dongen, Helsinki / Innsbruck © 2015 Ugarit-Verlag. Heller.

HORKY, P. S., *Plato and Pythagoraneism*, Oxford University Press, New York 2013.

KAHN, C. H., *Pythagoras and the Pythagoreans – A Brief History*, Hackett Publishing Company, Indianapolis/Cambridge (USA) 2001. Pythagoras and the Pythagoreans.

KAK, S. C, *The Astronomy of the Vedic Altars and the Ṛgveda* in *Mankind Quarterly* vol. 33, 1992. The Astronomy of the Vedic Altars and the Rgveda.

KAK, S., *Birth and Early Development of Indian Astronomy* in *Astronomy Across Cultures: The History of Non-Western Astronomy*, Helaine Selin (ed), Kluwer, 2000, pp. 303-340. arXiv:physics/0101063v1 [physics.hist-ph] 15 Jan 2001.

KANT, I. *Critica della ragion pura*, trad. it. di G. Gentile e G. Lombardo-Radice, Laterza, Bari 1971.

LIVERANI, M., *Uruk la prima città,* Laterza 2017.

LIVIO, M., *The Golden Ratio*, Broadway Books, New York 2002. The Golden Ratio.

LLOYD, G., *Pythagoras* in C.A. Huffman ed., *A History of Pythagoreanism*. Cambridge University Press 2014. Pythagoras (Chapter 1) - A History of Pythagoreanism.

LOOMIS, E. S., *The Pythagorean Proposition*, NCTM, Washington (D.C.), ripr. della 2ª ed. pubbl. in Ann Arbor (MI), 1940. Elisha Scott Loomis - Google Drive.

LUČIĆ, Z., *Irrationality of the Square Root of 2: The Early Pythagorean Proof, Theodorus's and Theaetetus's Generalizations*, in *The Mathematical Intelligencer* Vol. 37, 2015.

MAC TUTOR, *Thales of Miletus.* Thales of Miletus.

MANSFIELD, D. F., e WILDBERGER, N. J., *Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry* in *Historia Mathematica* vol. 44 iss. 4 (2017). Plimpton 322.

MARCACCI, F., *La dimostrazione matematica pre-euclidea: tra costruzione e rigore logico*, in *Episteme* X, 2004 e in La dimostrazione matematica pre-euclidea… .

MORROW, G. R. (trad.), *Proclus – A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton Univ. Press, Princeton 1970. A commentary on the first book of Euclid's Elements.

NEUGEBAUER, O., *The Exact Sciences in Antiquity,* 2ª ed, Brown University Press, Providence 1957. Trad. it. *Le scienze esatte nell'antichità,* Feltrinelli, Milano 1974.

NEUGEBAUER, O. e SACHS, A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and American Schools of Oriental Research, 1945.

PEARCE, I. G., *Indian Mathematics - Redressing the balance.* Serie di articoli in *Mac Tutor* (liberamente accessibile *on line*), St. Andrew University, Scotland.

PLATONE, *Tutte le opere* a cura di G. P. Carratelli, Sansoni, Firenze, 1974.

PLUTARCO, *De animae procreatione in Timaeo* sez. 14, Perseus Digital Library. Plutarco 14.

REGHINI, A., *La restituzione della geometria pitagorica*, Liber Liber 2017. Tratto da *Per la restituzione della geometria pitagorica* / Arturo Reghini. - Brancato 2012, Reghini Liber Liber; *Per la restituzione della geometria pitagorica e dei numeri pitagorici alla loro forma primitiva*, Atanòr, Roma 1978.

ROBSON, E., *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322* in *Historia Mathematica* 28 (2001). A Reassessment of Plimpton 322.

ROBSON, E., *Influence, ignorance, or indifference? Rethinking the relationship between Babylonian and Greek mathematics* in *The British Society for the History of Mathematics* bull. 4, 2005. Influence, ignorance or indifference?

ROWE, D. E., *Otto Neugebauer's Vision for Rewriting the History of Ancient Mathematics*, in *Anabases* 18, 2013.
Otto Neugebauer's Vision…

SAMA, K. V. (curatore) e KUPPANNA SASTRY, T. S. (traduttore), *Vedāṅga Jyotiṣa of Lagadha*, Indian National Science Academy, New Delhi 1985. Vedāṅga Jyotiṣa of Lagadha.

SANTOBONI, L., *Elementi di geometria razionale per i Licei Classici e Scientifici* vol. II, Petrini, Torino 1972.

SCHWALLER DE LUBICZ, R. A., *Le miracle égyptien*, Flammarion 1963; trad. it. *La scienza sacra dei Faraoni* di P. Crimini, Ed. Mediterranee, Roma 1994.

SCOTT, D. J., *History of the Pentagram* 2006; ult. Rev. 2018. History of the Pentagram — D. J. Scott's Oldschool Website.

SEN, S. N., e BAG, A. K., *The Śulbasūtras*, Indian National Science Academy, New Delhi 1983. The Sulaba Sutras Of Baudayana Apastamba Katyayana And Manava.

SHAH, B. R., *"Sulba Sutra" of Vedic India and Pythagorean Principle of Mathematics*. "Sulba Sutra" of Vedic India and Pythagorean Principle of Mathematics.

SINGH, R., *Early Description of Numerical and Measuring System in Indus Valley Civilization* in *International Journal of Applied Social Science*, 6 (6) (2019). https://scientificresearchjournal.com/wp-content/uploads/2020/05/Social-Science-6_A-1586-1589.

STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY, 'Archytas' 2003; ult. rev. 2025, Archytas; 'Aristotle and Mathematics' 2004, Aristotle and Mathematics; 'Philolaus' 2003, sostanzialmente riveduto nel 2024, Philolaus; 'Pythagoras' 2005, riveduto nel 2024, Pythagoras; 'Pythagoreanism' 2006; sost. riv. nel 2024, Pythagoreanism.

STEPHENSON, P., *Plato's Fourth Solid and the "Pyritohedron"* in *The Mathematical Gazette*, Vol. 77, No. 479 (1993). Plato's Fourth Solid and the "Pyritohedron" on JSTOR.

SZABÓ, Á. *The Beginnings of Greek Mathematics*, Reidel Publishing Company, 1978. Mathematics Books.

TAYLOR, A. E., *A Commentary on Plato's Timaeus*, Clarendon Press, Oxford 1928. Taylor.

TAYLOR, T., *The Commentaries of Proclus on the Timaeus of Plato*, edito dall'Autore, London 1820. The commentaries of Proclus on the Timaeus...

TANNERY, P., *La géométrie grecque*, Gauthiers-Villars, Paris 1887. La géométrie grecque.

THUREAU-DANGIN, F., *Une nouvelle tablette mathématique de Warka* in *Revue de Assyriologie et d'archéologie orientale* Vol. 31, No. 2 (1934), pp. 61-69, Presses Univesitaires de France. Une nouvelle tablette mathématique.

VER EECKE, P. (trad.), *Pappus d'Alexandrie – La collection mathématique*, Brouwer, Paris 1933. Pappus.

YUSTE, P., *Estudio geométrico de AO 17264*, in *Theoria: An International Journal for Theory, History and Foundations of Science, segunda epoca,* Vol. 20, No. 1(52), 2005.
577-678-1-PB.pdf.

ZEUTHEN, H. G., *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Verlag A. F. Hoest, Kopenhagen, 1896. Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.

ZONGYUN C. e al., *Geometric Proofs of the Irrationality of Square-roots for Select Integers*, arXiv:2410.14434 [math.HO] 2024.

FINE