

## TEOREMA MULTINOMIALE

### *Tre dimostrazioni*

di Ezio Fornero

In algebra si presenta il problema seguente: data una somma di  $p$  variabili che denotiamo con  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , calcolare i coefficienti  $C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n, p}$  dei monomi  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}$  dello sviluppo di  $P_p^n(x_i)$   
 $= (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p)^n$ .

Il risultato si generalizza immediatamente al caso in cui le  $x_i$  siano moltiplicate per i coefficienti  $a_i$  o, ancora più in generale, sostituite da qualsiasi espressione o funzione, dato che ciò non influisce sul calcolo dei coefficienti delle  $x_i$ .

#### **Prima dimostrazione.**

Per calcolare i coefficienti  $C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n, p}$ , si può procedere come segue.

Lo sviluppo di  $P_p^n(x_i)$  in somma di monomi è dato da  $\sum_{k_1, k_2, \dots, k_p=0}^n C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n, p} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}$  dove tutti gli esponenti delle  $x_i$  variano da 0 a  $n$ , con il vincolo  $\sum_{i=1}^p k_i = n$ .

Infatti, i singoli coefficienti sono calcolati scegliendo  $k_i$  volte, in ognuno degli  $n$  fattori  $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p)$ , una delle variabili  $x_i$ , con  $1 \leq i \leq p$ . L'esponente  $k_i$  coincide con il numero di volte in cui  $x_i$  è stato scelto. Osserviamo ora che nel codice dell'algebra le potenze di  $x_i$ ,  $x_i^{k_i}$ , equivalgono a una "stringa" di termini  $x_i$  in numero di  $k_i$ , per cui il prodotto  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}$  può essere considerato una sequenza di simboli o elementi di "tipo" diverso nella quale gli esponenti sono il numero di simboli omogenei. Detto altrimenti: il coefficiente  $C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n, p}$  del monomio  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}$  è uguale al numero delle possibili sequenze ordinate di elementi  $x_i$ , distribuiti su  $n$  posizioni, ognuno dei quali compare  $k_i$  volte, con le condizioni  $1 \leq i \leq p$ ,  $0 \leq k_i \leq n$  e  $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$ . Quante sequenze di questo genere possiamo costruire?

Cominciamo esaminando un caso particolare. Dobbiamo riempire una fila di  $n$  posti con oggetti di  $p$  diversi tipi in modo che nessun posto resti vuoto ed eventualmente uno o più tipi non facciano parte della serie; vogliamo calcolare in quanti modi ciò sia possibile.

Un esempio può essere la sequenza ABAACCBCAB..., ammesso che i “tipi” distinti siano A, B e C. Questa particolare stringa può essere pensata come costituita da tre sottosequenze, AAAA, BBB e CCC, i cui elementi sono distribuibili in modo variabile su  $n = 10$  posti diversi. Immaginiamo ora di costruire la sequenza a partire dai termini A. Se la sequenza contiene 4 elementi A distribuiti su 10 posti, ogni diverso ordinamento dei termini appartenenti al tipo A (per es. A\_AA\_\_A\_\_ e AA\_\_\_\_\_AA) corrisponde a una diversa combinazione semplice di 10 elementi di classe 4. Proseguiamo ora coi termini B. Poiché 4 posti sono già stati occupati, il numero delle possibili distribuzioni dei tre elementi B è quello delle combinazioni semplici di  $10 - 4 = 6$  elementi di classe 3, mentre quello delle combinazioni di C, dopo aver distribuito gli A e i B è, evidentemente, 1. Il numero totale delle sequenze è il prodotto del numero delle serie contenenti solo gli A per il numero delle serie contenenti solo i B, o del primo per il numero delle serie di soli C, o il prodotto del numero delle serie di soli B o di soli C, a seconda di quale sia il tipo con cui si inizia a costruire la sequenza. In generale, se  $p$  è il numero dei tipi distinti, il numero delle sequenze possibili è il prodotto del numero di tutte le serie composte da elementi omogenei meno una – non importa quale. Passiamo ora alla dimostrazione generale, riprendendo le ipotesi sopra formulate.

Siano dati  $p$  simboli  $x_1, x_2 \dots x_p$ , rispettivamente in numero di  $k_i$ , con i vincoli  $k_1 + k_2 + \dots + k_i + \dots + k_p = n$ ,  $0 \leq k_i \leq n$  e  $1 \leq i \leq p$ . Costruiamo le sequenze di simboli  $x_i$  a partire dal primo,  $x_1$ . Un dato elemento può non comparire nella sequenza, o comparirvi più volte. Il numero di tali sequenze si ottiene per iterazione: si calcola il prodotto del numero delle serie contenenti  $k_1$  simboli

$x_1$ , che è uguale a  $C_{n, k_1}$  cioè  $\binom{n}{k_1} = \frac{n!}{(n-k_1)! \cdot k_1!}$ , per il numero delle serie contenenti  $k_2$  simboli

$x_2$  che è dato da  $C_{n-k_1, k_2} = \binom{n-k_1}{k_2} = \frac{(n-k_1)!}{(n-k_1-k_2)! \cdot k_2!} \dots$  per il numero delle serie di  $k_i$

simboli  $x_i$  cioè  $C_{n-S_{i-1}, k_i} = \binom{n-S_{i-1}}{k_i} = \frac{(n-S_{i-1})!}{(n-S_i)! \cdot k_i!}$  dove con  $S_i$  indichiamo la somma  $k_1 +$

$k_2 + \dots + k_i$ , posto  $S_0 = 0$ , fino a  $i = p$ . Ovviamente  $S_p = n$ . Calcolando il prodotto tra due fattori

consecutivi  $\frac{(n-S_{i-1})!}{(n-S_i)! \cdot k_i!} \cdot \frac{(n-S_i)!}{(n-S_i-k_{i+1})! \cdot k_{i+1}!}$ , il numeratore del secondo fattore si semplifica con

l'identico termine al denominatore del fattore precedente, per cui il numeratore del prodotto di tutti i fattori sarà  $n!$  in quanto il numeratore del primo fattore non può venire semplificato. I termini  $k_i!$  al denominatore non sono cancellati, quindi nel denominatore totale vi sarà il prodotto di tutti i  $k_i!$ . Nell'ultimo fattore, al denominatore otteniamo  $(n-S_p)! = 0! = 1$ , moltiplicato per  $k_p!$ . Quindi il

denominatore totale sarà il prodotto  $k_1! k_2! \dots k_p!$ . Si ottiene infine che il numero delle sequenze è dato da

$$C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n, p} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!}$$

Ne segue

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{k_i=0}^n \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p} \quad ; \quad \sum_{i=1}^p k_i = n.$$

Questa formula è nota come *Teorema multinomiale*.

Il termine  $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!}$  è solitamente indicato col simbolo  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p}$ .

Una **seconda dimostrazione**, variante della precedente, è la seguente.

Il metodo più semplice è probabilmente quello di calcolare i coefficienti  $C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n, p}$  dei monomi

$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p} = \prod_{i=1}^p x_i^{k_i}$  in base al numero delle permutazioni con ripetizioni di una lista di  $n$  posti,

avendo a disposizione un totale di  $n$  elementi non tutti dello stesso tipo, distribuiti tra  $p$  sottoinsiemi  $A_i$  in modo tale che  $k_i$  oggetti appartengano ad  $A_i$  e  $\sum_{i=1}^p k_i = n$ . Dimostriamo che i singoli

prodotti delle variabili  $x_i$ , considerati distinti in base all'ordine di scrittura delle variabili, sono in corrispondenza biunivoca con le permutazioni con ripetizioni di un insieme di  $n$  elementi. Infatti,

ogni prodotto delle  $x_i$  corrisponde alla scelta di una sola delle  $x_i$  da ognuno dei fattori uguali a  $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p)$  =  $\sum_{i=1}^p x_i$ ; ogni scelta equivale a una lista di  $n$  caselle ognuna delle quali può essere occupata da una sola delle  $x_i$ . Per esempio, nello sviluppo termine a termine di  $(x_1 + x_2 + x_3)^5$

si ottengono alcuni monomi  $x_1^2 x_2^1 x_3^2$  estraendo dai singoli fattori le variabili, in un dato ordine:

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|

[ogni casella corrisponde ad uno dei fattori  $(x_1 + x_2 + x_3)$ ]

oppure

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_2$ | $x_3$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_1$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|

In ciascuna di queste liste ognuno dei termini  $x_i$  può comparire  $k_i$  volte, con  $\sum_{i=1}^p k_i = n$ . Due liste contenenti gli stessi elementi distribuiti secondo ordini differenti sono due permutazioni distinte dello stesso insieme di  $n$  elementi. Se questi elementi fossero tutti distinti, il numero delle permutazioni sarebbe  $n!$ . Nel nostro caso,  $k_i$  elementi sono uguali a  $x_i$  e quindi indistinguibili. Una lista contenente  $k_i$  elementi  $x_i$  si trasforma in se stessa scambiando tra di loro due variabili con lo stesso indice  $i$ , p.es.  $[x_1 x_1 x_2 x_3]$  non varia se scambiamo tra di loro i due termini  $x_1$ , mentre si genera una lista distinta scambiando tra di loro due variabili  $x_i$  e  $x_j$  contrassegnate da indici diversi: p.es.  $[x_1 x_1 x_2 x_3]$  è distinta da  $[x_1 x_2 x_1 x_3]$  ma entrambe le liste corrispondono allo stesso monomio. Il numero delle liste distinte contenenti  $k_i$  elementi identici  $x_i$  tali che  $\sum_{i=1}^p k_i = n$  è il rapporto tra il numero di tutte le possibili permutazioni di un insieme  $I_n$  contenente  $n$  termini distinti e il numero di tutte le permutazioni dei  $k_i$  elementi di ciascuno dei  $p$  sottoinsiemi la cui unione è  $I_n$ , che è dato dal prodotto di tutti i fattoriali  $k_i!$  con  $1 \leq i \leq p$ , per cui si ottiene

$$C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n, p} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!} ; \sum_{i=1}^p k_i = n .$$

Una terza **dimostrazione di tipo ricorsivo** è la seguente. Consideriamo la somma di  $p$  variabili  $x_i$  come somma delle prime  $p-1$  scelte arbitrariamente e dell'ultima; posto

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = [(x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1}) + x_p]^n = P_p^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \sum_{l=1}^{p-1} x_l \right)^k \cdot x_p^{n-k} \quad (*),$$

cerchiamo una procedura ricorsiva per calcolare  $P_p^n$  a partire dal primo passo,

$$P_p^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot P_{p-1}^k \cdot x_p^{n-k} ;$$

$$\text{dove } P_{p-1}^k = \left( \sum_{l=1}^{p-1} x_l \right)^k \rightarrow P_1^k = x_1^k .$$

Applichiamo la stessa procedura ai polinomi  $P_{p-1}^k$  sostituendo al secondo membro di (\*):

$n \rightarrow k_{i-1}$  ( $n$  corrisponde a  $k_0$  nel passo iniziale);  $i$  crescente da 1 a  $p-1$  è l'indice del passo della procedura;

$k \rightarrow k_i$  ;

$p \rightarrow p-i+1$  (il valore finale di  $p$  è 2, perché l'ultimo passo della procedura è lo sviluppo della potenza  $n$ -esima di un binomio).

La formula generale è

$$P_{p-i+1}^{k_{i-1}} = \sum_{k_i=0}^{k_{i-1}} \binom{k_{i-1}}{k_i} \cdot P_{p-i}^{k_i} \cdot x_{p-i+1}^{k_{i-1}-k_i}$$

Giunti al passo di indice generale  $i$ , otteniamo

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{p-1}^k \cdot x_p^{n-k} = \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_i=0}^{k_{i-1}} \binom{n}{k_1} \cdot \binom{k_1}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{k_{i-1}}{k_i} \cdot P_{p-i}^{k_i} \cdot x_p^{n-k_1} \cdot x_{p-1}^{k_1-k_2} \cdot \dots \cdot x_{p-i+1}^{k_{i-1}-k_i}$$

Formalmente, nello sviluppo passo a passo di  $P_p^n$  l'ultimo coefficiente binomiale a destra  $\binom{k_{i-1}}{k_i}$  è

associato a  $P_{p-i}^{k_i}$ , cioè all' $i$ -esimo passo, e al fattore  $x_{p-i+1}^{k_{i-1}-k_i}$ .

Il calcolo si arresta quando giunti al passo  $i = p-1$  si ottiene

$$P_{p-i}^{k_i} = P_1^{k_{p-1}} = x_1^{k_{p-1}}, \text{ con } 0 \leq k_{p-1} \leq n,$$

generando la formula

$$\sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{p-1}=0}^{k_{p-2}} \binom{n}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \dots \binom{k_{p-2}}{k_{p-1}} \cdot P_1^{k_{p-1}} x_p^{n-k_1} \cdot x_{p-1}^{k_1-k_2} \cdot \dots \cdot x_2^{k_{p-2}-k_{p-1}}$$

Sostituiamo ora a  $P_1^{k_{p-1}}$  il suo valore  $x_1^{k_{p-1}}$  e finalmente otteniamo

$$P_p^n = \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{p-1}=0}^{k_{p-2}} \binom{n}{k_1} \cdot \binom{k_1}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{k_{p-2}}{k_{p-1}} \cdot x_p^{n-k_1} \cdot x_{p-1}^{k_1-k_2} \cdot \dots \cdot x_2^{k_{p-2}-k_{p-1}} \cdot x_1^{k_{p-1}}$$

La somma di tutti gli esponenti delle  $x_l$  è  $n - k_1 + k_1 - k_2 + \dots + k_{i-1} - k_i + k_i - \dots - k_{p-1} + k_{p-1} = n$ .

Per terminare il calcolo, consideriamo il prodotto dei coefficienti binomiali. Abbiamo

$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{k_1}{k_2} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{k_1!}{k_2!(k_1-k_2)!} = \frac{n!}{(n-k_1)!k_2!(k_1-k_2)!}$ ; quindi, tutto il prodotto

$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{k_1}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{k_{p-2}}{k_{p-1}}$  con  $k_{i+1} \leq k_i$  è uguale a  $\frac{n!}{(n-k_1)!(k_1-k_2)! \cdot \dots \cdot (k_{p-2}-k_{p-1})!k_{p-1}!}$

Ponendo ora  $n - k_1 = j_1$ ,  $k_1 - k_2 = j_2$ ,  $k_{i-1} - k_i = j_i$  e  $k_{p-1} = j_p$  otteniamo

$$P_p^n = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \dots \sum_{j_{p-1}=0}^{n-S} \sum_{j_p=0}^{j_{p-1}} \frac{n!}{j_1!j_2! \dots j_{p-1}!j_p!} x_p^{j_1} x_{p-1}^{j_2} \dots x_2^{j_{p-1}} x_1^{j_p}$$

nella quale  $S$  è la somma di tutti gli esponenti da  $j_1$  a  $j_{p-2}$  incluso.

Infatti le differenze  $k_{i-1} - k_i$  sono comprese tra un minimo = 0 e un massimo =  $n$  e lo stesso vale per l'esponente di  $x_l$ , cioè  $j_p$ . La forma del risultato può essere migliorata invertendo l'ordine di scrittura delle variabili in modo da far coincidere i loro indici inferiori  $l = p \dots 1$  con quelli dei rispettivi esponenti, risultato che si ottiene con la sostituzione  $l \rightarrow p - l + 1$ .

Utilizzando il simbolo  $\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_p}$  per i coefficienti multinomiali, e denotando con  $x_i$  le variabili, abbiamo infine

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_p=0 \\ \sum j_i=n}}^n \binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_p} \cdot \prod_{i=1}^p x_i^{j_i}$$

## Formule iterate

Per costruire un processo iterato per calcolare i coefficienti  $C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n, p}$  dei prodotti  $x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}$ , partiamo dallo sviluppo di  $(x_1 + x_2 + x_3)^5 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)^4$ . Il coefficiente  $C_{2,2,1}^{5,3}$  è dato da  $C_{1,2,1}^{5,3} + C_{2,1,1}^{5,3} + C_{1,2,0}^{5,3}$  - infatti, il monomio  $x_1^2 x_2^2 x_3^1$  si ottiene sommando i prodotti di  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  rispettivamente per  $x_1^1 x_2^2 x_3^1$ ,  $x_1^2 x_2^1 x_3^1$ ,  $x_1^2 x_2^2 x_3^0$ . Più in generale, dall'identità

$$\left(\sum_{l=1}^p x_l\right)^{n+1} = \left(\sum_{l=1}^p x_l\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^p x_l\right)^n \quad \text{otteniamo la formula iterata}$$

$$C_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{n+1, p} = \underbrace{C_{k_1-1, k_2, \dots, k_p}^{n, p} + C_{k_1, k_2-1, \dots, k_p}^{n, p} + \dots + C_{k_1, k_2, \dots, k_{p-1}-1}^{n, p}}_{p \text{ termini}}$$

che è una generalizzazione del triangolo di Tartaglia (o di Pascal). Per inizializzare il calcolo, poniamo

$$C_{\dots}^{0, p} = C_{\dots}^{1, p} = 1;$$

i termini con uno degli indici inferiori negativi devono essere nulli:

$$C_{-1, k_2, \dots, k_p}^{n, p} = C_{k_1, -1, \dots, k_p}^{n, p} = C_{k_1, k_2, \dots, -1}^{n, p} = 0;$$

deve essere rispettata la condizione  $\sum k_i = n$ . P.es.,  $C_{1,1,0}^{1,3}$  non entra nel computo.

## Esempi

$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + \dots + 2ab + 2ac + \dots + 2bc + \dots$ ; il coefficiente di  $a^2$  è

$$C_{2,0,0,0}^{2,4} = C_{1,0,0,0}^{1,4} + C_{2,-1,0,0}^{1,4}; \text{ evidentemente, } C_{2,-1,0,0}^{1,4} \text{ deve essere nullo. Il coefficiente di } ab, C_{1,1,0,0}^{2,4}$$

è la somma  $C_{0,1,0,0}^{1,4} + C_{1,0,0,0}^{1,4} = 1 + 1$ .

$(a+b+c)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \dots$ ; calcoliamo il coefficiente di  $a^3b^2$ ,  $C_{3,2,0}^{5,3}$ . Deve essere

$C_{3,2,0}^{5,3} = C_{2,2,0}^{4,3} + C_{3,1,0}^{4,3} = C_{1,2,0}^{3,3} + C_{2,1,0}^{3,3} + C_{2,1,0}^{3,3} + C_{3,0,0}^{3,3} =$   
 $= C_{0,2,0}^{2,3} + C_{1,1,0}^{2,3} + C_{1,1,0}^{2,3} + C_{2,0,0}^{2,3} + C_{1,1,0}^{2,3} + C_{2,0,0}^{2,3} + C_{2,0,0}^{2,3} = 10$  ; infatti, i quattro termini con un indice inferiore uguale a 2 sono uguali a 1 (sono i coefficienti di  $a^2$ ,  $b^2$  ecc.), ciascuno degli altri tre è uguale a 2 (sono i coefficienti dei prodotti misti  $ab$  ecc.).

$(a+b+c+d+e+f)^3$  ; calcoliamo  $C_{1,1,1,0,0,0}^{3,6} = C_{1,1,0,0,0,0}^{2,6} + C_{1,0,1,0,0,0}^{2,6} + C_{0,1,1,0,0,0}^{2,6} = C_{0,1,0,0,0,0}^{1,6} + C_{1,0,0,0,0,0}^{1,6} + \dots$  ; in totale sono 6 termini uguali a 1, quindi il risultato è 6.

Esaminiamo il calcolo del coefficiente di  $x_1^2 x_2^1 x_3^2$  nello sviluppo di  $(\sum_{l=1}^{10} x_l)^5$  (il risultato è 30)<sup>1</sup>

Albero di ricorsione completo per  $C_{2,1,2,0,0,0}^{5,10}$

Ometto p=10 (resta fisso) e scrivo solo (n;i,j,k,l,m,q).

Livello n=5 (radice)

(5; 2,1,2,0,0,0)

decrementa i,j,k (gli unici  $\geq 1$ ):

$= (4;1,1,2,0,0,0) + (4;2,0,2,0,0,0) + (4;2,1,1,0,0,0)$

Livello n=4

**A** = (4;1,1,2,0,0,0)  $\rightarrow$  decrementa i,j,k:

$A = (3;0,1,2,0,0,0) + (3;1,0,2,0,0,0) + (3;1,1,1,0,0,0)$

**B** = (4;2,0,2,0,0,0)  $\rightarrow$  decrementa i,k (j=0):

$B = (3;1,0,2,0,0,0) + (3;2,0,1,0,0,0)$

**D** = (4;2,1,1,0,0,0)  $\rightarrow$  decrementa i,j,k:

$D = (3;1,1,1,0,0,0) + (3;2,0,1,0,0,0) + (3;2,1,0,0,0,0)$

Livello n=3 (valori)

| Nodo            | Espansione                                            | Valore    |
|-----------------|-------------------------------------------------------|-----------|
| (3;0,1,2,0,0,0) | $(2;0,0,2,0,0,0) + (2;0,1,1,0,0,0)$                   | $1+2=3$   |
| (3;1,0,2,0,0,0) | $(2;0,0,2,0,0,0) + (2;1,0,1,0,0,0)$                   | $1+2=3$   |
| (3;1,1,1,0,0,0) | $(2;0,1,1,0,0,0) + (2;1,0,1,0,0,0) + (2;1,1,0,0,0,0)$ | $2+2+2=6$ |
| (3;2,0,1,0,0,0) | $(2;1,0,1,0,0,0) + (2;2,0,0,0,0,0)$                   | $2+1=3$   |

<sup>1</sup> il calcolo è stato eseguito dall'IA sulla seguente istruzione inizialmente per il caso n=3 e p=6: "il termine generico  $C(n,p,i,j,k,l,m,q)$  è uguale a  $C(n-1,p,i-1,j,k,l,m,q) + C(n-1,p,i,j-1,k,l,m,q) + C(n-1,p,i,j,k-1,l,m,q) + C(n-1,p,i,j,k,l-1,m,q) + C(n-1,p,i,j,k,l,m-1,q) + C(n-1,p,i,j,l,m,q-1)$ . Se  $n = 0$  o  $= 1$ , il termine generico è = 1. Se uno solo degli indici da i a q è uguale a -1, il termine generico è zero. Inoltre, deve essere  $i+j+k+l+m+q = n$ ." IA ha esteso l'istruzione al calcolo di  $C(5,10,2,1,2,0,0,0)$ .

| Nodo            | Espansione                      | Valore |
|-----------------|---------------------------------|--------|
| (3;2,1,0,0,0,0) | (2;1,1,0,0,0,0)+(2;2,0,0,0,0,0) | 2+1=3  |

Livello n=2 (valori)

| Nodo            | Espansione                      | Valore |
|-----------------|---------------------------------|--------|
| (2;0,0,2,0,0,0) | (1;0,0,1,0,0,0)                 | 1      |
| (2;0,1,1,0,0,0) | (1;0,0,1,0,0,0)+(1;0,1,0,0,0,0) | 1+1=2  |
| (2;1,0,1,0,0,0) | (1;0,0,1,0,0,0)+(1;1,0,0,0,0,0) | 1+1=2  |
| (2;1,1,0,0,0,0) | (1;0,1,0,0,0,0)+(1;1,0,0,0,0,0) | 1+1=2  |
| (2;2,0,0,0,0,0) | (1;1,0,0,0,0,0)                 | 1      |

(a n=1 tutti i nodi valgono 1 per definizione — caso base)

Ricomposizione dal basso verso l'alto

**n=3:**

$$(3;0,1,2,0,0,0)=1+2=3,$$

$$(3;1,0,2,0,0,0)=1+2=3$$

$$(3;1,1,1,0,0,0)=2+2+2=6,$$

$$(3;2,0,1,0,0,0)=2+1=3,$$

$$(3;2,1,0,0,0,0)=2+1=3,$$

**n=4:**

$$A=3+3+6=12 \quad B=3+3=6 \quad D=6+3+3=12$$

**n=5:**

$$C(5,10,2,1,2,0,0,0)=A+B+D=12+6+12=30$$

L'albero mostra bene la struttura "a diamante" tipica di questi coefficienti: nodi diversi al livello n=4 (come (4;1,1,2,...) e (4;2,1,1,...) ) condividono sotto-nodi comuni al livello n=3 (come (3;1,1,1,0,0,0)=6), proprio come nel triangolo di Pascal ordinario dove percorsi diversi si sovrappongono.

### Fattorizzazione rispetto ai coefficienti

Si vede immediatamente che lo scambio tra due qualsiasi indici  $i$  e  $j$  nei coefficienti multinomiali e di conseguenza tra i corrispondenti esponenti  $k_i$  e  $k_j$ , rimanendo invariati gli indici delle variabili, lascia invariati tutti i termini dello sviluppo. Per es.,  $C_{2,1,3,1}^{7,4} = C_{3,1,2,1}^{7,4} = C_{1,1,2,3}^{7,4}$  ecc. Il numero dei coefficienti uguali, aventi gli stessi indici inferiori diversamente ordinati, coincide con il numero delle combinazioni con ripetizioni degli indici inferiori. Esso è anche il numero dei prodotti omoge-

nei  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}$  di grado  $n$  con gli stessi esponenti  $k_i$  assegnati in modi diversi alle  $x_i$ , o il numero dei modi in cui possiamo assegnare  $m$  esponenti  $k_i$  a  $p \geq m$  variabili, con la condizione

$\sum_{i=1}^p k_i = n$ . Supponiamo che la stringa degli indici inferiori contenga  $p$  posti occupati da  $m$

numeri naturali distinti, con  $1 \leq m \leq p$ , anche ripetuti. Dobbiamo calcolare il numero delle combinazioni con ripetizione di  $p$  elementi di classe  $m$ .

Il numero di tutte queste possibili stringhe, assegnati i numeri  $k_1, k_2 \dots k_m$  e le loro rispettive occorrenze  $h_i$ , è  $C_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{p, m} = \binom{p}{h_1, h_2, \dots, h_m}$  dove  $h_1 + h_2 + \dots + h_m = p$ . Si noti che non dipende da  $n$ .

Applicando la proprietà distributiva al prodotto di  $n$  fattori uguali a  $(x_1 + x_2 + \dots + x_p)$  senza eseguire raccoglimenti parziali, si ottiene una somma di  $p^n$  prodotti delle potenze di  $x_i$ ; eseguendo raccoglimenti parziali rispetto ai coefficienti, si ottiene una somma di prodotti tra i coefficienti e somme di monomi omogenei con gli stessi esponenti, ma diversamente assegnati alle singole variabili  $x_i$ .

Per esempio, consideriamo  $(a + b + c)^3$ ; lo sviluppo, senza raccoglimenti, è  $a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2b + a^2b + abc + abc + abc + \dots$  con un totale di  $3^3 = 27$  termini. I termini  $a^3, b^3, c^3$  sono in numero di 3. Essi hanno lo stesso coefficiente  $C_{3,0,0}^{3,3} = C_{0,3,0}^{3,3} = C_{0,0,3}^{3,3} = 1$ . Il numero 3 è dato da  $C_{1,2}^{3,2} = \frac{3!}{1!2!} = 3$ . I termini  $a^2b$  ecc, che contengono solo due lettere, sono in numero di 6. Infatti, il

loro coefficiente comune,  $C_{2,1,0}^{3,3} = C_{1,2,0}^{3,3}$  ecc., uguale a 3, ha tre indici inferiori tutti distinti, quindi il numero dei prodotti di due variabili distinte è  $C_{1,1,1}^{3,3} = \frac{3!}{1!1!1!} = 6$ :  $a^2b, a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$ . Infine, il termine  $abc$  nello sviluppo di  $(a+b+c)^3$  occorre una sola volta. Infatti,  $C_3^{3,1} = \binom{3}{3} = 1$ .

1. Fattorizzando  $(a + b + c)^3$  rispetto ai coefficienti, otteniamo

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3 \underbrace{(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b)}_{6 \text{ termini}} + 6abc.$$

Vediamo  $\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^7$ . Calcoliamo il numero dei termini nei quali gli esponenti sono 3, 2, 1, 1 in

vario ordine; abbiamo  $C_{3,2,1,1}^{7,4} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 420$  e  $C_{1,1,2}^{4,3} = \frac{4!}{1!1!2!} = \frac{24}{2} = 12$ .

---

Questo articolo è una revisione ampliata di una precedente versione pubblicata nel luglio 2009.

Torino, settembre 2026.